一类半线性 Keldysh 型方程解的注记

张康群,孙福树,赵国俊

(南京工程学院数理部,江苏 南京 211167)

[摘要]　Keldysh 方程是在研究跨音速管道流问题时导出的一个简化的数学模型,也是研究混合型偏微分方程模型的一个典型代表.对于其含有非零源项的退化双曲部分的初值问题,本文利用部分 Fourier 变换与 ODE 求解的办法给出了相应线性方程解的一个显式表达式及其全局一致估计,并在这个估计的基础上利用不动点定理建立了一类半线性问题的解的全局存在性.同时给出了解的奇性传播可以仅沿一支特征线传播的一个例子.

[关键词]　Keldysh 型方程,初值问题,存在性,奇性传播

[中图分类号]O175.28　[文献标志码]A　[文章编号]1001-4616(2013)02-0005-05

A Note on the Solution of a Class of Keldysh-Type Equations

Zhang Kangqun,Sun Fushu,Zhao Guojun

(Department of Mathematics and Physics,Nanjing Institute of Technology,Nanjing 211167,China)

Abstract:Keldysh equation is a mathematical model which was derived in studying fluid dynamics,and also is a typical example of mixed type partial differential equations. For the initial value problem of its degenerate hyperbolic part with nonzero source term,we find a solution by use of partial Fourier transformation and ODE's method,and then derive its a global uniform estimate. Based on it and the fixed point theorem,we establish the global existence for solution of a class of semilinear problem. Meanwhile,we find an example to desmontrate the propogation of singularity which is only along one of the characteristics.

Key words:Keldysh-type equation,initial value problem,existense,singularity propogation

Keldysh 方程是在研究跨音速管道流问题时得到的一个典型的混合型偏微分方程模型.本文主要研究了下面一类半线性方程初值问题的解的全局存在性

$$\begin{cases} t\partial_{tt}U(x,t)-\partial_{xx}U(x,t)=F(x,t,U), \\ U(x,0)=\phi(x), \\ \partial_t U(x,0)=\varphi(x), \end{cases} \tag{1}$$

其中$(x,t)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^+$,右端非线性源项 $F(x,t,U)$满足

$$|\partial_U^j F(x,t,U)|\leqslant Ct^{\delta}|U|^{k-j}, \tag{2}$$

其中 $k\in\mathbf{Z}^+/\{1\}$,且当 $t\leqslant T$ 时 $\delta>0$,$t>T$ 时 $\delta<0$,$T(>0)$是在后面待定的常数.

1　主要结果

含有非零源项的 Keldysh 方程(3)和 Tricomi 方程(4)是混合型方程中的两个不同类型的典型代表:

$$t\partial_{tt}u(x,t)-\partial_{xx}u(x,t)=f(x,t), \tag{3}$$

$$\partial_{tt}u(x,t)-t\partial_{xx}u(x,t)=f(x,t). \tag{4}$$

在偏微分方程(3)和(4)中,当 $t>0$ 时,方程是双曲型的,当 $t<0$ 时,方程是椭圆型的.当变量 t 从负数到正数变化的时候,方程(1)就从椭圆型连续过渡到双曲型.$t=0$ 是方程的退化线.由于方程在退化线上奇性

收稿日期:2013-01-20.

基金项目:国家自然科学基金(11001122)、南京工程学院科研基金(YKJ201113、QKJC2010013).

通讯联系人:张康群,博士,讲师,研究方向:偏微分方程. E-mail:chkqnju@hotmail.com

的不同,引起两个方程解的性质的差异非常大. 本文将只针对 Keldysh 方程(3)进行研究,对于 Tricomi 方程的相关结果可以参考文献[1,2]及相关文献等.

在上半平面$\{(x,t):x\in\mathbf{R},t\in\mathbf{R}^+\}$中,Keldysh 方程是双曲型的,其特征面(如图1)方程满足:$4t=(x-x_0)^2$. 容易看出该光滑流形在其顶点处的两个切方向相反. 这完全不同于 Tricomi 方程特征面(如图2):$4t^3=9(x-x_0)^2$ 所具有的特点,其顶点处的两个切方向相同,此时该特征面形成一个尖角构成一个 cusp.

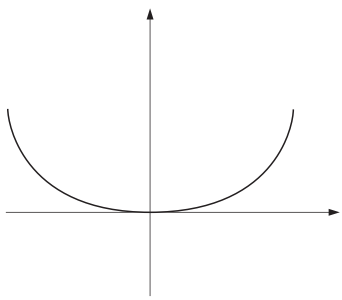

图1　外 cusp

Fig. 1　Exterior cusp

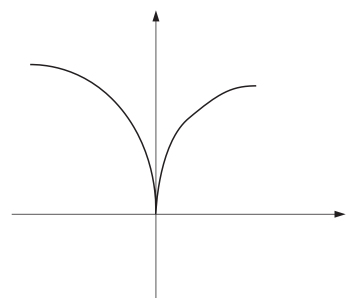

图2　内 cusp

Fig. 2　Interior cusp

目前对于含有 Keldysh 型退化性质的方程的研究结果很少. 陈恕行在文献[3]中给出了 Keldysh 型算子的基本解,表明 Keldysh 型算子在退化线附近的奇异性比 Tricomi 型算子强. Sunčica Čanić和 Barbara Lee Keyfitz 在文献[4]中证明了退化椭圆区域中光滑解的存在性. 在文献[2]中作者对退化双曲 Tricomi 型方程解的存在性和单点奇性传播进行了探讨. 对于 Keldysh 方程解的奇性传播我们将在后面的工作中展开深入探讨,这里仅考虑其解的存在性并举例说明退化型方程中低阶项对于奇性传播的影响. 此类方程由于在退化线附近含有较强的奇异性,以及其解在无穷远处的增长性质,使得无论对其线性问题还是非线性问题的研究都存在一定困难. 本文中,作者利用部分 Fourier 变换和 ODE 的求解办法给出了线性方程(3)的解的全局一致估计,并进一步建立了非线性方程(1)的解的全局存在性. 受到文献[5]的启发,在文章最后我们构造了一个退化双曲的 Keldysh 型方程的初值问题,来说明其解的奇性可以仅沿着一支特征线传播,这与严格双曲型方程不同.

本文的主要结果是:

定理 1　给定 C^∞ 光滑函数 $F(x,t,U)$满足条件(2),函数 $\phi(x)\in H^{s+\frac{1}{2}}(R)$和 $\varphi(x)\in H^{s-\frac{3}{2}}(R)$满足

$$\|\phi\|_{H^{s+\frac{1}{2}}(R)}+\|\varphi\|_{H^{s-\frac{3}{2}}(R)}<\varepsilon,$$

若 $s\geqslant\frac{3}{2}$,则对于适当小的常数 ε,半线性 Keldysh 方程的初值问题(1)存在唯一的解 $U(x,t)\in C(H^s(R),[0,+\infty))\cap C^1(H^{s-1}(R),[0,+\infty))$.

注释 1　初值函数 $\phi(x)$、$\varphi(x)$与解 $U(x,t)$的正则性的不一致性是由 Keldysh 方程本身在 $t=0$ 处的退化性质引起的. 事实上,容易发现当 $s=\frac{3}{2}$的时候,函数 $\phi(x)\in H^2(R)$,函数 $\varphi(x)\in L^2(R)$,而问题(1)~(2)的解 $U(x,t)\in C(H^{\frac{3}{2}}(R),[0,+\infty))\cap C^1(H^{\frac{1}{2}}(R),[0,+\infty))$,这完全不同于严格双曲型偏微分方程解的正则性质,也不同于退化 Tricomi 型方程解的正则性质. 即在区域内部,解本身的正则性低于初值,其一阶导数的正则性高于初值.

注释 2　定理1的结果可以平行推广到相应的含有多个空间变量的半线性 Keldysh 型方程的初值问题上,即

$$\begin{cases}t^m\partial_{tt}U(x,t)-\Delta U(x,t)=F(x,t,U),\\U(x,0)=\phi(x),\\\partial_t(x,0)=\varphi(x),\end{cases}\tag{5}$$

其中$(x,t)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^+$,$m\in\mathbf{R}^+/\{2\}$,$\Delta=\sum\limits_{i=1}^{n}\partial_{x_ix_i}$.

2 线性问题解的估计

在这一部分我们推导出了问题(1)的等价命题,进一步给出了相应的线性问题,并利用部分 Fourier 变换建立了解的显式表达式. 在此基础上给出了一个重要估计.

事实上,当 $t>0$ 时,方程(1)等价于

$$\begin{cases}\partial_{tt}U(x,t)-\dfrac{\partial_{xx}U(x,t)}{t}=\dfrac{F(x,t,U)}{t},\\ U(x,0)=\phi(x),\\ \partial_t U(x,0)=\varphi(x),\end{cases}\tag{6}$$

接下来,针对(1)的等价问题(6)进行研究.

首先,考虑相应的线性问题:

$$\begin{cases}\partial_{tt}u(x,t)-\dfrac{\partial_{xx}u(x,t)}{t}=f(x,t),\\ u(x,0)=\phi(x),\\ \partial_t u(x,t)=\varphi(x),\end{cases}\tag{7}$$

对上述问题关于变量 x 作 Fourier 变换,令 $z=4\mathrm{i}\sqrt{t}\,|\xi|$,引入记号 $W(z(|\xi|,t))=u^{\wedge}(\frac{z(|\xi|,t)}{2\mathrm{i}})\mathrm{e}^{\frac{z(|\xi|,t)}{2}}$,则当 $\xi\neq0$ 时得到如下相应的合流超几何方程的初值问题

$$\begin{cases}zW''(z)-(1+z)W'(z)+\dfrac{1}{2}W(z)=0,\\ W(0)=\phi^{\wedge}(\xi),\\ W'(0)=\varphi^{\wedge}(\xi),\end{cases}\tag{8}$$

其中 $\phi^{\wedge}(\xi)$ 表示 $\phi(x)$ 的 Fourier 变换,$\varphi^{\wedge}(\xi)$ 表示 $\varphi(x)$ 的 Fourier 变换. 由文献[6]中的结果,取 $m=-1$ 可以直接证明下面的结论:

引理 1 记函数 $h^{\wedge}(\xi)$ 是 $h(x)$ 的 Fourier 变换,函数 $g^{\wedge}(\xi,t)$ 是 $g(x,t)$ 对变量 x 的部分 Fourier 变换,则函数

$$\begin{aligned}u(x,t)=\Big(&V_1(|\xi|,t)\phi^{\wedge}(\xi)+V_2(|\xi|,t)\varphi^{\wedge}(\xi)+\\ &\int_0^t(V_2(|\xi|,t)V_1(|\xi|,\tau)-V_1(|\xi|,t)V_2(|\xi|,\tau))f^{\wedge}(\xi,\tau)\mathrm{d}\tau\Big)^{\vee}\end{aligned}\tag{9}$$

是满足线性方程初值问题(7)解的显式表达式. 其中 $V_1(|\xi|,t)=\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\sqrt{t}|\xi|}\Phi(a,c,4\mathrm{i}\sqrt{t}\,|\xi|)$,$V_2(|\xi|,t)=t\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\sqrt{t}|\xi|}\Phi(a-c+1,2-c,4\mathrm{i}\sqrt{t}\,|\xi|)$,满足

$$V_1(|\xi|,0)=1,\qquad V_2(|\xi|,0)=0,$$
$$\partial_t V_1(|\xi|,0)=0,\qquad \partial_t V_2(|\xi|,0)=1.$$

注释 3 函数 $V_i(|\xi|,t)$,$i=1,2$ 中的 $\Phi(a,c,z)$ 称为 Humbert 符号,满足曲线积分表示

$$\Phi(a,c,z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)(1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(c-a)})(1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}a})}\int_C^{(1+,0+,1-,0-)}\mathrm{e}^{z\zeta}\zeta^{a-1}(1-\zeta)^{c-a-1}\mathrm{d}\zeta,\tag{10}$$

积分曲线 C 是指从 ζ 复平面的实轴上的 0 和 1 之间的任一点 A(在该点满足 $\arg\zeta=\arg(1-\zeta)$)出发,绕 1 正方向,再绕 0 正方向,再绕 1 负方向,再绕 0 负方向,最后回到 A 点所经过的轨迹路线(如图 3). $\Phi(a,c,z)$ 又称为合流超几何函数,其相关基本性质可参阅文献[7].

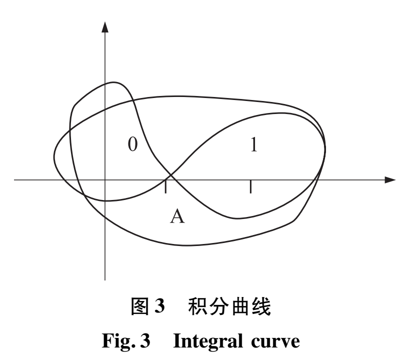

图 3 积分曲线

Fig. 3 Integral curve

接着利用合流超几何函数的渐进展开式和显式表达式(9),我们得到:

引理 2 如果 $\phi(x)\in H^{s+\frac{1}{2}}(R)$,$\varphi(x)\in H^{s-\frac{3}{2}}(R)$,$f(x,t)\in C(H^{s-1}(R),[0,+\infty))$,则存在常数 $C>0$ 和适当

的常数 $T>0$,使得问题(7)的显式解(9)满足如下的估计:

$$\|u\|_{H^s(R)}+\|\partial_t u\|_{H^{s-1}(R)}\leqslant C\left(\|\phi\|_{H^{s+\frac{1}{2}}(R)}+\|\varphi\|_{H^{s-\frac{3}{2}}(R)}+\int_0^t\|f(\cdot,\tau)\|_{H^{s-1}(R)}\mathrm{d}\tau\right),0\leqslant t\leqslant T,\tag{11}$$

和

$$t^{-1}\left(\|u\|_{H^s(R)}+\|\partial_t u\|_{H^{S-\frac{3}{2}}(R)}\right)+t^{-\frac{1}{4}}\|\partial_t u\|_{H^{s-1}(R)}\leqslant$$
$$C\left(\|\phi\|_{H^{s+\frac{1}{2}}(R)}+\|\varphi\|_{H^{s-\frac{3}{2}}(R)}+\int_0^t\|f(\cdot,\tau)\|_{H^{s-1}(R)}\mathrm{d}\tau\right),T<t.\tag{12}$$

证明　在文献[6]命题 3.1 中取 $m=-1$ 可得.

3　定理 1 的证明

证明　定义集合

$$S_M=U(x,t)\in C(H^s(R),[0,+\infty))\cap C^1(H^{s-1}(R),[0,+\infty))\cap C^1(H^{s-\frac{3}{2}}(R),[0,+\infty))\mid\sup_{t\in[0,+\infty)}|\|U\||\leqslant M\}\},$$

其中 M 是在后面待定的常数,并且

$$|\|U\||\equiv\min_{t\in[0,+\infty)}\{1,t^{-1}\}\left(\|U\|_{H^s(R)}+\|\partial_t U\|_{H^{s-\frac{3}{2}}(R)}\right)+\min_{t\in[0,+\infty)}\{t^{\frac{1}{4}},t^{-\frac{1}{4}}\}\|\partial_t U\|_{H^{s-1}(R)},\tag{13}$$

函数之间的距离定义为

$$\mathrm{d}(U,V)=\sup_{t\in[0,+\infty)}|\|U-V\||.\tag{14}$$

容易验证集合 S_M 是凸的.

针对半线性问题(6)以及条件(2)的约束下,考虑定义在集合 S_M 上的非线性映射 G

$$GU=V_1(|\xi|,t)\phi^\wedge(\xi)+V_2(|\xi|,t)\varphi^\wedge(\xi)+\int_0^t\left(V_2(|\xi|,t)V_1(|\xi|,\tau)-V_1(|\xi|,t)V_2(|\xi|,\tau)\right)\frac{F(x,\tau,U)}{\tau}\mathrm{d}\tau.$$

首先,运用引理 2 中的估计,条件(2)和 Schauder 引理,可以导出

$$|\|GU\||\leqslant C\left(\|\phi\|_{H^{s+1/2}(R)}+\|\varphi\|_{H^{s-3/2}(R)}+\int_0^t\left\|\frac{F(\cdot,\tau,U)}{\tau}\right\|_{H^{s-1}(R)}\mathrm{d}\tau\right)\leqslant$$
$$C\left(\|\varphi\|_{H^{s+1/2}(R)}+\|\varphi\|_{H^{s-3/2}(R)}+\int_0^t\tau^{\delta-1}\|U^k\|_{H^{s+1/2}(R)}\mathrm{d}\tau\right)\leqslant C\left(\|\varphi\|_{H^{s+1/2}(R)}+\|\varphi\|_{H^{s-s/2}(R)}\right)+C_1t^\delta\|U\|^k_{H^{s+1/2}(R)}.\tag{15}$$

因为 $k\in\mathbf{Z}^+/\{1\}$,取 $M=2C\left(\|\varphi\|_{H^{S+1/2}(R)}+\|\varphi\|_{H^{S-3/2}(R)}\right)<2C\varepsilon$ 使得 $C_1t^\delta M^k<M$,则(15)说明映射 G 是集合 S_M 到集合 S_M 的.

其次,对 $\forall\, U,V\in S_M$,类似于(15)可以导出

$$|\|G(U-V)\||\leqslant C\int_0^t\left\|\frac{F(\cdot,\tau,U)-F(\cdot,\tau,V)}{\tau}\right\|_{H^{s-1}(R)}\mathrm{d}\tau\leqslant$$
$$C\int_0^t\tau^{\delta-1}\|\partial_3F(\cdot,\tau,\theta V+(1-\theta)V)(U-V)\|\mathrm{d}\tau\leqslant C_2t^\delta M^{k-1}\|U-V\|_{H^{s+1/2}}.\tag{16}$$

由于 ε 任意性,当 $C_2t^\delta M^{k-1}<1$ 时,则估计式(16)说明映射 G 是集合 S_M 上的压缩映射.

最后联立式(15)、(16),利用不动点原理,我们导出映射 G 在集合 S_M 中存在唯一不动点,满足 $U(x,t)\in C(H^s(R),[0,+\infty))\cap C^1(H^{s-1}(R),[0,+\infty))$,是半线性问题(6)的解,也是问题(1)的解.

4　举例

含有低阶项的退化双曲型偏微分方程解的奇性可以仅沿着一支特征线传播,这与严格双曲型偏微分方程不同. 在[5]中,对于退化双曲的 Tricomi 型方程进行了举例. 但由于退化双曲的 Keldysh 型算子有着更强的奇性,其例子的构造也相对更加困难. 到目前为止,作者还没有发现给出相关例子的文献.

考察在 $t\geqslant0$ 上半平面上的含有低阶项的齐次 Keldysh 型方程的初值问题:

$$\begin{cases}tu_{tt}-u_{xx}\pm\dfrac{3}{2\sqrt{t}}u_x=0,\\u(x,0)=0,\\u_t(x,0)=u_0(x),\end{cases}\tag{17}$$

当 $u_0(x)\in C^2(R)$ 时,容易验证:$u(x,t)=tu_0(x\mp 2\sqrt{t})\in C^1(R)$ 是(17)的解.

特别地,在研究问题(17)的解的单点奇性传播的时候,假设 $u_0(x)$ 在点 $x=0$ 有奇性,那么通过方程(17)的解的表达式可以发现其奇性传播仅在右或左一条特征线上发生,这依赖于方程低阶项系数的符号.

[参考文献]

[1] Yagdjian K. Global existence for the n-dimensional semilinear Tricomi-type equations[J]. Comm Partial Differential Equations, 2006, 31(4/6): 907-944.

[2] Zhang Kangqun. Existence and regularity of solution to the generalized Tricomi equation with a singular initial datum at a point[J]. Acta Math Sinica, 2011, 28(6): 1 135-1 154.

[3] Chen Shuxing. The fundamental solution of the Keldysh type operator[J]. Science in China Series A: Mathematics, 2009, 52(9): 1 829-1 843.

[4] Sunčica Čanić, Barbara Lee Keyfitz. A smooth solution for a keldysh type equation[J]. Communications in Partial Differential Equations, 1996, 21(1/2): 319-340.

[5] Qi Minyou. On the Cauchy problem for a class of hyperbolic equations with initial data on the parabolic degenerating line[J]. Acta Math Sinica, 1958, 8: 521-529.

[6] Zhang Kangqun. Existence of solution for the n-dimension second order semilinear hyperbolic equations[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2011, 381(1): 427-440.

[7] Erdelyi A, Magnus W, Oberhettinger F, et al. Higher Transcendental Functions[M]. New York, Toronto, London: McGraw-Hill Book Company, 1953.

[责任编辑:丁　蓉]