关于不定方程$\frac{x^3-1}{x-1}=\frac{y^n-1}{y-1}$

管训贵

(泰州学院数理信息学院,江苏 泰州 225300)

[摘要]　本文证明了:不定方程$(x^3-1)/(x-1)=(y^n-1)/(y-1)$适合$n\geqslant 3\cdot 2^{2r-4}-1$且$2\nmid n$的例外解$(x,y,n)$满足$y<2^{n-r}$以及$x<2^{(n^2-(r+1)n+r+2)/2}$,其中$r>1$是整数.

[关键词]　指数不定方程,Goormaghtigh 猜想,例外解

[中图分类号]O156.1　[文献标志码]A　[文章编号]1001-4616(2013)03-0013-03

On Indefinite Equation $\frac{x^3-1}{x-1}=\frac{y^n-1}{y-1}$

Guan Xungui

(School of Mathematics,Physics and Information Science,Taizhou University,Taizhou 225300,China)

Abstract:This paper proved that if$(x,y,n)$is an exceptional solution of indefinite equation$(x^3-1)/(x-1)=(y^n-1)/(y-1)$ with $n\geqslant 3\cdot 2^{2r-4}-1$ and $2\nmid n$,then $y<2^{n-r}$ and $x<2^{(n^2-(r+1)n+r+2)/2}$,where $r>1$ be integer.

Key words:exponential indefinite equation,Goormaghtigh's conjecture,exceptional solution

1917 年,Goormaghtigh R[1]曾经猜测:方程

$$\frac{x^m-1}{x-1}=\frac{y^n-1}{y-1},\quad x>y>1,\quad n>m>2 \tag{1}$$

仅有正整数解$(x,y,m,n)=(5,2,3,5)$和$(90,2,3,13)$.

注意到方程(1)已知的 2 组解都适合$m=3$,因此 Goormaghtigh 猜想的一类特殊情形,即方程

$$\frac{x^3-1}{x-1}=\frac{y^n-1}{y-1},\quad x>y>1,\quad n>3 \tag{2}$$

倍受人们的关注. 此时方程(2)有 2 组正整数解

$$(x,y,n)=(5,2,5),(90,2,13). \tag{3}$$

我们约定:将方程(2)除了(3)以外的正整数解称为它的例外解.

1998 年,Nesterenko Y V 和 Shorey T N[2]证明了方程(2)适合$2\nmid n$的例外解都满足$n\geqslant 25$,而且$\max(x,y)<C(n)$,这里$C(n)$是仅与n有关的可有效计算的常数.

2002 年,乐茂华[3]证明了方程(2)适合$2\nmid n$的例外解(x,y,n)满足$x<2^{(n^2-4n+6)/2}$以及$y<2^{n-3}$.

2011 年,苟素和王婷婷[4]证明了方程(2)仅有正整数解$(x,y,n)=(5,2,5)$可使x是素数或者素数的方幂.

本文对方程(2)的例外解的上界给出更为精确的估计,即证明了:

定理　若r是大于 1 的整数,则方程(2)适合$n\geqslant 3\cdot 2^{2r-4}-1$且$2\nmid n$的例外解$(x,y,n)$满足$x<2^{(n^2-(r+1)n+r+2)/2}$以及$y<2^{n-r}$.

由此定理立即推出文献[3]中的结论.

收稿日期:2012-06-22.

基金项目:泰州学院重点课题资助项目(2011-ASX-01).

通讯联系人:管训贵,副教授,研究方向:基础数论. E-mail:tzszgxg@126.com

1　关键性引理

引理1　对正整数 k,若 $f(k)=C_{2k}^{k}/2^{2k}$,则 $f(k)$ 是关于 k 的递减函数,且

$$\sqrt{\frac{1}{k\pi}}<f(k)<\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2k+1}}\ (k>1).$$

证明　由于

$$f(k+1)=\frac{2k+1}{2k+2}f(k)<f(k),$$

所以 $f(k)$ 是关于 k 的递减函数,并且

$$f(k+l)=\frac{\prod_{i=1}^{l}(2k+2i-1)}{\prod_{i=1}^{l}(2k+2i)}f(k).$$

设 $A=\frac{\prod_{i=1}^{l}(2k+2i-1)}{\prod_{i=1}^{l}(2k+2i)}$,$B=\frac{\prod_{i=1}^{l}(2k+2i)}{\prod_{i=1}^{l}(2k+2i+1)}$,则 $A<B$.

又 $A^2<AB=\frac{2k+1}{2k+2l+1}$,故 $A<\sqrt{\frac{2k+1}{2k+2l+1}}$. 此时

$$f(k+l)<\sqrt{\frac{2k+1}{2k+2l+1}}f(k).$$

由于 $f(1)=\frac{1}{2}$,故 $f(l+1)<\sqrt{\frac{3}{2l+3}}f(1)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2l+3}}$,以 $k(k>1)$ 代换 $l+1$,得

$$f(k)<\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2k+1}}.$$

再根据 Stirling 公式知,$f(k)>\sqrt{\frac{1}{k\pi}}$. 引理1得证.

引理2　若 $2\nmid n$,则 $y^n/(y-1)=(S_1+S_2)^2$,其中

$$S_1=\sum_{k=0}^{(n-1)/2}C_{2k}^{k}y^{(n-1)/2-k}/2^{2k},\tag{4}$$

$$S_2=\sum_{k=(n+1)/2}^{\infty}C_{2k}^{k}/2^{2k}y^{k-(n-1)/2}.\tag{5}$$

证明　可参见文献[3].

2　定理的证明

设 (x,y,n) 是方程(2)的一组适合 $n\geqslant 3\cdot 2^{2^{2r-4}}-1$ 且 $2\nmid n$ 和 $y\geqslant 2^{n-r}$ 的例外解. 由方程(2)知

$$\frac{4y^n}{y-1}-(2x+1)^2=\frac{3y+1}{y-1}.\tag{6}$$

根据引理2,式(6)可化为

$$(2S_1+2S_2)^2-(2x+1)^2=(3y+1)/(y-1).\tag{7}$$

若用 $[z]$ 和 $\{z\}$ 分别表示实数 z 的整数部分和小数部分,并令 $u=(3y+1)/(y-1)$,$v=(2S_1+2S_2)+(2x+1)$,则式(7)成为

$$(2S_1+2S_2)-(2x+1)=[2S_1+2S_2]-(2x+1)+\{2S_1+2S_2\}=u/v.\tag{8}$$

由式(4)可知

$$2S_1=a+b/2^t,\tag{9}$$

其中 a 是正整数,b,t 都是整数且满足

$$0\leqslant b\leqslant 2^t-1,0\leqslant t\leqslant n-2. \tag{10}$$

当 $n\geqslant 3\cdot 2^{2^{2r-4}}-1$ 时,$(n+1)/2\geqslant 3\cdot 2^{2^{2r-5}}$,根据引理 1,

$$f\left(\frac{n+1}{2}\right)\leqslant f(3\cdot 2^{2^{2r-5}})<\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{3\cdot 2^{2^{2r-4}}+1}}.$$

由式(5)结合引理 1 可得

$$\frac{2}{y}\sqrt{\frac{2}{(n+1)\pi}}<2S_2=\frac{1}{2^n y}C_{n+1}^{(n+1)/2}\sum_{k=0}^{\infty} C_{n+1+2k}^{(n+1)/2+k}/2^{2k}C_{n+1}^{(n+1)/2}y^k<\frac{1}{2^n y}C_{n+1}^{(n+1)/2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{y^k}=$$

$$\frac{1}{2^n}C_{n+1}^{(n+1)/2}\frac{1}{y-1}=\frac{2f\left(\frac{n+1}{2}\right)}{y-1}<\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{3\cdot 2^{2^{2r-4}}+1}}\cdot\frac{1}{y-1}. \tag{11}$$

因为 $y\geqslant 2^{n-r}=\frac{1}{2^{r-2}}\cdot 2^{n-2}>\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{3\cdot 2^{2^{2r-4}}}}\cdot 2^{n-2}+1$,故由(10)、(11)可知

$$0<2S_2<\frac{1}{2^{n-2}}\leqslant\frac{1}{2^t}. \tag{12}$$

结合(9)、(10)可得

$$\{2S_1+2S_2\}\geqslant 2S_2. \tag{13}$$

因为 $0<\{2S_1+2S_2\}<1$,故由式(8)、(11)、(13)知

$$[2S_1+2S_2]=2x+1 \tag{14}$$

以及

$$u/v=\{2S_1+2S_2\}\geqslant 2S_2>\frac{2}{y}\sqrt{\frac{2}{(n+1)\pi}}. \tag{15}$$

由 $y^2-y-1>0$,得$\frac{(y+1)^2}{y^2}>\frac{y}{y-1}$,即 $y^{n-1}(1+\frac{2}{y}+\frac{1}{y^2})>\frac{y^n}{y-1}$,故

$$(y^{\frac{n-1}{2}}+y^{\frac{n-3}{2}})^2>\frac{y^n}{y-1}=(S_1+S_2)^2,$$

因此

$$y^{\frac{n-1}{2}}+y^{\frac{n-3}{2}}>S_1+S_2. \tag{16}$$

再由 $3y+1>0$,推得$(S_1+S_2)^2>(y^{\frac{n-1}{2}}+\frac{1}{2}y^{\frac{n-3}{2}})^2$,故

$$S_1+S_2>y^{\frac{n-1}{2}}+\frac{1}{2}y^{\frac{n-3}{2}}. \tag{17}$$

结合式(14)、(16)、(17)可知

$$2y^{\frac{n-1}{2}}+2y^{\frac{n-3}{2}}>2S_1+2S_2>[2S_1+2S_2]=2x+1\geqslant 2y^{\frac{n-1}{2}}+y^{\frac{n-3}{2}}. \tag{18}$$

此外,由 $2S_1+2S_2>2y^{\frac{n-1}{2}}+y^{\frac{n-3}{2}}$ 及 $2x+1\geqslant 2y^{\frac{n-1}{2}}+y^{\frac{n-3}{2}}$,得 $v>2y^{\frac{n-3}{2}}(2y+1)$,故

$$\frac{u}{v}<\frac{3y+1}{2y^{(n-3)/2}(2y+1)(y-1)}=\frac{3y^2+y}{y^{(n-1)/2}(4y^2-2y-2)}<\frac{1}{y^{(n-1)/2}}<\frac{2}{y}\sqrt{\frac{2}{(n+1)\pi}}. \tag{19}$$

(19)与(15)矛盾.因此,方程(2)适合 $n\geqslant 3\cdot 2^{2^{2r-4}}-1$ 且 $2\nmid n$ 的例外解(x,y,n)都满足 $y<2^{n-r}$.此时,由(18)可得 $x<2^{(n^2-(r+1)n+r+2)/2}$.定理得证.

[参考文献]

[1] Goormaghtigh R. L'Intermediaire Des Mathématiciens[M]. Paris:Gauthier-Vallars,1917:88.

[2] Nesterenko Y V,Shorey T N. On an equation of Goormaghtigh[J]. Acta Arith,1998,83:381-389.

[3] 乐茂华.关于 Goormaghtigh 方程$\frac{x^3-1}{x-1}=\frac{y^n-1}{y-1}$[J].数学学报,2002,45(3):505-508.

[4] 荀素,王婷婷.一类不定方程及其素数解[J].陕西师范大学学报:自然科学版,2011,39(3):20-22.

[责任编辑:丁　蓉]