求解稳态 N-S 方程的 Uzawa 算法的几何收敛性

陈浦胤,黄建国

(上海交通大学数学系,上海 200240)

[摘要] Temam 提出求解稳态 Navier-Stokes 方程的 Uzawa 算法并且证明了算法的收敛性. 然而,至今没有算法的收敛率分析. 本文证明该算法是以几何级数收敛的.

[关键词] Navier-Stokes 方程,Uzawa 算法,收敛率分析

[中图分类号]O24 [文献标志码]A [文章编号]1001-4616(2014)02-0015-04

On the Geometric Convergence of the Uzawa Algorithm for Steady Incompressible Navier-Stokes Equations

Chen Puyin,Huang Jianguo

(Department of Mathematics,Shanghai Jiao Tong University,Shanghai 200240,China)

Abstract:Temam proposed an Uzawa algorithm for solving steady incompressible Navier-Stokes equations and proved its convergence. However,the convergence rate analysis remains open until now. We prove in this paper that this method converges geometrically.

Key words:Navier-Stokes equations,Uzawa method,cnvergence rate analysis

给定空间 $\mathbf{R}^d$(维数 $d=2$ 或 3)的一个有界开多边形(多面体)区域,考虑其上的稳态 Navier-Stokes 方程

$$\begin{cases} -\nu\Delta\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}+\nabla p=\boldsymbol{f}, & \text{in } \Omega, \\ \nabla\cdot\boldsymbol{u}=0, & \text{in } \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

式中黏性系数 $\nu=\dfrac{1}{Re}$是雷诺数 Re 的倒数,$\boldsymbol{f}$ 代表外力,未知量是速度场 $\boldsymbol{u}$ 和压力 p. 相应的边界条件取为粘附边界条件,即

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}, \text{ on } \partial\Omega. \tag{2}$$

另外为了保证压力 p 的唯一性,对压力函数要求

$$\int_\Omega p\mathrm{d}x=0. \tag{3}$$

接下来,介绍一些后文将要使用到的记号,详见文献[1]. 令$(\cdot,\cdot)$表示 L^2 内积. 给定非负整数 s,令 $H^s(\Omega)$为通常意义下的 Sobolev 空间,该空间的元素是 L^2 可积函数,并且其不超过 s 次的广义导数仍旧 L^2 可积. 空间 $H^s(\Omega)$上定义标准的范数 $\|\cdot\|_s$和半范数$|\cdot|_s$. $C_0^\infty(\Omega)$在范数 $\|\cdot\|_s$下的完备化空间记为 $H_0^s(\Omega)$. $H_0^s(\Omega)$的对偶空间记 $H^{-s}(\Omega)$. 令 $\boldsymbol{H}^s(\Omega)$表示乘积空间$(H^s(\Omega))^d$,其上的范数、半范数和内积在不引起混淆的情况下,均采用与 $H^s(\Omega)$相同的记号. 对于 $\boldsymbol{H}_0^s(\Omega)$和 $\boldsymbol{H}^{-s}(\Omega)$也按同样的规矩来.

记 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$,$P=L_0^2(\Omega):=\left\{p\in L^2(\Omega),\int_\Omega p\mathrm{d}x=0\right\}$,定义两个 $\boldsymbol{V}^3$ 上的三线性型如下:

$$a_1(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=\int_\Omega(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}\mathrm{d}x,$$

$$N(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=\frac{1}{2}a_1(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})-\frac{1}{2}a_1(\boldsymbol{u};\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}).$$

收稿日期:2014-01-16.
基金项目:国家自然科学基金(11171219)、上海市教育委员会 E-研究院建设计划(E03004).
通讯联系人:黄建国,教授,博士生导师,研究方向:科学计算. E-mail:jghuang@sjtu.edu.cn

容易通过分部积分验证在 $\boldsymbol{V}^3$ 上两个三线性型等价,$N(\cdot;\cdot,\cdot)$ 可以视作 $a_1(\cdot;\cdot,\cdot)$ 的反对称化.

这样,变分问题(1)~(3)可描述如下(参见文献[2-4]):

问题 Q　寻找 $(\boldsymbol{u},p)\in\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{P}$ 使得

$$\begin{cases} N(\boldsymbol{u};\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})+\nu(\nabla\boldsymbol{u},\nabla\boldsymbol{v})-(p,\operatorname{div}\boldsymbol{v})=\langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}\rangle, & \forall\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}, \quad (4)\\ (\operatorname{div}\boldsymbol{u},q)=0, & \forall p\in P, \quad (5)\end{cases}$$

式中 $\boldsymbol{f}\in\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)$,$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 $\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)\times\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ 上的对偶形式.

在专著[2]中,Temam 提出了一个求解稳态 Navier-Stokes 方程(1)(或(4)~(5))的 Uzawa 算法并且证明了算法的收敛性. 然而,时过 40 多年至今还缺乏该算法的收敛率分析. 在本文中,我们将使用文献[5]中的一些技巧和巧妙的推导,证明该算法是以几何级数收敛的.

1　Uzawa 算法和一些基本结果

文献[2-4]指出,存在正数 N 使得

$$|a_1(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})|\leqslant N|\boldsymbol{u}|_1|\boldsymbol{v}|_1|\boldsymbol{w}|_1,\quad \forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{H}_0^1(\Omega),\tag{6}$$

并且有著名的 inf-sup 条件成立,即存在一个常数 $\beta\in(0,1]$,使得

$$\inf_{q\in P}\sup_{v\in V}\frac{(\operatorname{div}\boldsymbol{v},q)}{|\boldsymbol{v}|_1\|q\|_0}\geqslant\beta.\tag{7}$$

在本文中,定义

$$\Lambda=\nu^{-2}N\|\boldsymbol{f}\|_{-1},\tag{8}$$

式中

$$\|\boldsymbol{f}\|_{-1}:=\sup_{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)}\frac{<\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}>}{|\boldsymbol{v}|_1}.$$

在[2]中,Temam 提出了一个求解稳态 Navier-Stokes 方程(1)(或(4)~(5))的 Uzawa 算法,这是一个非线性算法,形式如下:

算法 1　问题 Q 的 Uzawa 算法

按如下方式构造序列 $\{(\boldsymbol{u}^n,p^n)\}$:

取任意初值 $\boldsymbol{u}^0\in\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ 和 $p^0\in L_0^2(\Omega)$,当 $\boldsymbol{u}^n,p^n$ 已知时,定义 $\boldsymbol{u}^{n+1}\in\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$,$p^{n+1}\in L_0^2(\Omega)$ 是下述方程的解

$$N(\boldsymbol{u}^{n+1};\boldsymbol{u}^{n+1},\boldsymbol{v})+\nu(\nabla\boldsymbol{u}^{n+1},\nabla\boldsymbol{v})=(p^n,\operatorname{div}\boldsymbol{v})+\langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}\rangle,\quad\forall\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}_0^1(\Omega),\tag{9}$$

$$(p^{n+1}-p^n,q)+\rho(\operatorname{div}\boldsymbol{u}^{n+1},q)=0,\quad\forall q\in L_0^2(\Omega),\tag{10}$$

式中 ρ 是正的参数.

Temam 在假设

$$\bar{\nu}:=\nu-\nu^{-1}N\|\boldsymbol{f}\|_{-1}>0\tag{11}$$

和

$$0<\rho<2\bar{\nu}\tag{12}$$

这两个条件下,证明了 $n\to\infty$ 时,$\boldsymbol{u}^n\to\boldsymbol{u}$ in $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$,$p^n\to p$ in $L_0^2(\Omega)$,其中 $(\boldsymbol{u},p)$ 是(1)的唯一解. 然而 Temam 没有给出收敛率分析.

使用我们的记号,条件(11)和(12)可以重写成

$$\Lambda<1,$$

和

$$0<\rho<2\nu(1-\Lambda).$$

在后面的推导中,我们也假设这两个条件成立.

下述引理包含一些后文要用到的已有结果,证明参见文献[2,3,5].

引理 1

(1)若 $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$,那么

$$\|\operatorname{div}\boldsymbol{v}\|_0\leqslant\|\nabla\boldsymbol{v}\|_0.$$

(2)令$(\boldsymbol{u},p)\in \boldsymbol{V}\times P$ 是问题 Q 之解,则

$$|\boldsymbol{u}|_1\leqslant \nu^{-1}\|\boldsymbol{f}\|_{-1}. \tag{13}$$

2 收敛率分析

我们在这里给出收敛率分析,结果如下述定理所示:

定理 1 令$(\boldsymbol{u},p)\in \boldsymbol{V}\times P$ 是问题 Q 之解,$\{(\boldsymbol{u}^n,p^n)\}$是算法 1 产生的函数序列. 若(8)中定义的参数 Λ 满足

$$\Lambda<1,$$

算法 1 中的参数 ρ 满足

$$0<\rho<2\nu(1-\Lambda),$$

则有

$$\nu(1-\Lambda)|\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{u}|_1\leqslant \|p^n-p\|_0, \tag{14}$$

且存在和 n 无关的正常数 $\gamma<1$,使得

$$\|p^{n+1}-p\|_0\leqslant\gamma\|p^n-p\|_0.$$

特别地,若 $\rho=\nu(1-\Lambda)$,则(22)给出的 γ 是拟最优的.

证明 记

$$\boldsymbol{E}^n=\boldsymbol{u}^n-\boldsymbol{u},e^n=p^n-p, \tag{15}$$

它们表示算法 1 的迭代序列与问题 Q 的解之间的误差.

(9)减去(4),有

$$\nu(\nabla \boldsymbol{E}^{n+1},\nabla \boldsymbol{v})-(e^n,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v})=-N(\boldsymbol{u}^{n+1};\boldsymbol{E}^{n+1},\boldsymbol{v})-N(\boldsymbol{E}^{n+1};\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}). \tag{16}$$

在上式中选择 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{E}^{n+1}$,并注意到 $N(\boldsymbol{u}^{n+1};\boldsymbol{E}^{n+1},\boldsymbol{E}^{n+1})=0$,可知

$$\nu|\boldsymbol{E}^{n+1}|_1^2=(e^n,\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}^{n+1})-N(\boldsymbol{E}^{n+1};\boldsymbol{u},\boldsymbol{E}^{n+1}). \tag{17}$$

联立(17)、(6)和(13),并使用引理 1,可推得

$$\nu|\boldsymbol{E}^{n+1}|_1^2=\|e^n\|_0|\boldsymbol{E}^{n+1}|_1+\nu\Lambda|\boldsymbol{E}^{n+1}|_1^2,$$

因此,(14)得以证明.

另一方面,根据(5)、(10)和(15),有

$$-(e^n,\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}^{n+1})=(e^n,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}^{n+1})=\rho^{-1}(p^n-p^{n+1},e^n)=\rho^{-1}(e^{n+1}-e^n,e^n)=$$
$$(2\rho)^{-1}(\|e^{n+1}\|_0^2-\|e^n\|_0^2-\|e^{n+1}-e^n\|_0^2),$$

将上式代入(17),得

$$2\rho\nu|\boldsymbol{E}^{n+1}|_1^2+\|e^{n+1}\|_0^2=\|e^n\|_0^2+\|e^{n+1}-e^n\|_0^2-2\rho N(\boldsymbol{E}^{n+1};\boldsymbol{u},\boldsymbol{E}^{n+1}). \tag{18}$$

我们推断

$$\|e^{n+1}-e^n\|_0\leqslant\rho|\boldsymbol{E}^{n+1}|_1. \tag{19}$$

事实上,根据(5)和(10)有

$$(e^{n+1}-e^n,q)=-\rho(\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}^{n+1},q).$$

取 $q=e^{n+1}-e^n$,应用 Cauchy-Schwarz 不等式和引理 1 即得(19).

由(6)、(8)、(13)、(18)、(19)可知

$$2\rho\nu|\boldsymbol{E}^{n+1}|_1^2+\|e^{n+1}\|_0^2=\|e^n\|_0^2+\|e^{n+1}-e^n\|_0^2-2\rho N(\boldsymbol{E}^{n+1};\boldsymbol{u},\boldsymbol{E}^{n+1})\leqslant\|e^n\|_0^2+\rho^2|\boldsymbol{E}^{n+1}|_1^2+$$
$$2\rho N|\boldsymbol{u}|_1|\boldsymbol{E}^{n+1}|_1^2\leqslant\|e^n\|_0^2+\rho^2|\boldsymbol{E}^{n+1}|_1^2+2\rho\nu\Lambda|\boldsymbol{E}^{n+1}|_1^2.$$

整理即

$$\rho(2\nu(1-\Lambda)-\rho)|\boldsymbol{E}^{n+1}|_1^2+\|e^{n+1}\|_0^2\leqslant\|e^n\|_0^2. \tag{20}$$

另一方面,根据 $\boldsymbol{E}^{n+1}$ 的定义并使用等式(16),能够得到

$$(e^n,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v})=\nu(\nabla\boldsymbol{E}^{n+1},\nabla\boldsymbol{v})+N(\boldsymbol{E}^{n+1};\boldsymbol{E}^{n+1},v)+N(\boldsymbol{E}^{n+1};\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})+N(\boldsymbol{u};\boldsymbol{E}^{n+1},\boldsymbol{v}).$$

再利用(6)、(7)与(13)可知

$$\beta\|e^n\|_0\leqslant\sup_{v\in V}\frac{(e^n,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v})}{|\boldsymbol{v}|_1}\leqslant\nu|\boldsymbol{E}^{n+1}|_1+N|\boldsymbol{E}^{n+1}|_1^2+2N|\boldsymbol{u}|_1|\boldsymbol{E}^{n+1}|_1,$$

即

$$\beta\|e^n\|_0\leqslant\nu(1+2\Lambda)|\boldsymbol{E}^{n+1}|_1+N|\boldsymbol{E}^{n+1}|_1^2.$$

使用此估计和(14),有

$$\beta\|e^n\|_0\leqslant|\boldsymbol{E}^{n+1}|_1(\nu(1+2\Lambda)+N|\boldsymbol{E}^{n+1}|_1)\leqslant|\boldsymbol{E}^{n+1}|_1(\nu(1+2\Lambda)+N\nu^{-1}(1-\Lambda)^{-1}\|e^n\|_0).$$

为叙述方便起见,记常数 $C_1=\nu(1+2\Lambda)$,$C_2=N\nu^{-1}(1-\Lambda)^{-1}$. 那么

$$|\boldsymbol{E}^{n+1}|_1^2\geqslant\frac{\beta^2}{(C_1+C_2\|e^n\|_0^2)^2}\|e^n\|_0^2.$$

将此结果代入(20)立得

$$\frac{C_\rho\beta^2}{(C_1+C_2\|e^n\|_0^2)^2}\|e^n\|_0^2+\|e^{n+1}\|_0^2\leqslant\|e^n\|_0^2,$$

即

$$\|e^{n+1}\|_0^2\leqslant\left(1-\frac{C_\rho\beta^2}{(C_1+C_2\|e^n\|_0^2)^2}\right)\|e^n\|_0^2,\tag{21}$$

式中 $C_\rho:=\rho(2\nu(1-\Lambda)-\rho)$. 可以说明

$$0<\frac{C_\rho\beta^2}{(C_1+C_2\|e^n\|_0^2)^2}<1.$$

这是由于 $C_\rho\leqslant\nu^2(1-\Lambda)^2<\nu^2$,$\beta\leqslant1$ 以及 $C_1+C_2\|e^n\|_0^2\geqslant C_1>\nu$. 因此,由(21)可知$\{\|e^n\|_0\}$是一个递减序列,得 $\|e^n\|_0\leqslant\|e^0\|_0$. 又

$$1-\frac{C_\rho\beta^2}{(C_1+C_2\|e^n\|_0^2)^2}<1-\frac{C_\rho\beta^2}{(C_1+C_2\|e^0\|_0^2)^2},$$

由该结果和(21)立知

$$\|e^{n+1}\|_0\leqslant\gamma\|e^n\|_0,$$

式中收缩数 γ 由下式给出

$$\gamma=\sqrt{1-\frac{C_\rho\beta^2}{(\nu(1+2\Lambda)+N\nu^{-1}(1-\Lambda)^{-1}\|p^0-p\|_0)^2}}.\tag{22}$$

特别地,若 Λ,β,N 和 ν 固定,对于给定初值 p^0,可知 γ 取到最小值当且仅当 C_ρ 取到最大值 $\nu^2(1-\Lambda)^2$. 因此 $\rho=\nu(1-\Lambda)$时,收缩数 γ 是拟最优的.

[参考文献]

[1] Adams R A. Sobolev Spaces[M]. New York:Academic Press,1975.

[2] Temam R. Navier-Stokes Equations[M]. North Holland:Amsterdam,1984.

[3] Girault V,Raviart P A. Finite Element Approximations of the Navier-Stokes Equations[M]. New York:Springer,1986.

[4] Quarteroni A,Valli A. Numerical Approximation of Partial Differential Equations[M]. Berlin:Springer,1994.

[5] Nochetto R H,Pyo J H. Optimal relaxation parameter for the Uzawa method[J]. Numer Math,2004,98:695-702.

[责任编辑:丁　蓉]