一类跳扩散过程下期权定价公式的参数估计

刘睿辰[1],刘国祥[2],叶 伟[2,3]

(1. 南京师范大学商学院,江苏 南京 210023)
(2. 南京师范大学金融与统计研究所,江苏 南京 210023)
(3. 无锡市第三高级中学,江苏 无锡 212028)

[摘要] 对于参数为常数的跳扩散过程模型下的期权公式,本文给出了较为方便的利用历史数据计算其参数的极大似然估计.

[关键词] 期权定价,跳扩散过程,参数估计
[中图分类号]O211.9 [文献标志码]A [文章编号]1001-4616(2014)03-0036-03

Parameter Estimation of the Option Pricing Formula on a Class of Jump-Diffusion Model

Liu Ruichen[1],Liu Guoxiang[2],Ye Wei[2,3]

(1. Business School of Nanjing Normal University,Nanjing 210023,China)
(2. Financial and Statistical Institute,Nanjing Normal University,Nanjing 210023,China)
(3. Wuxi Third Senior High School,Wuxi 214026,China)

Abstract:In this thesis,we study the option formula of a jump diffusion process model whose parameters are constants. Based on the history date of underlying asset prices,we propose a procedure to calculate more conveniently the maximum likelihood estimators of the parameters.

Key words:option pricing,jump-diffusion process,parameter estimation

期权定价问题是衍生证券定价问题的核心问题之一. Black 和 Scholes[1]假定股票价格服从几何 Brown 运动,并给出了著名的 Black-Scholes 公式. 这一开创性的工作被誉为现代金融理论的又一次“革命”. 由于几何 Brown 运动是连续随机过程,所以假设股票的价格过程是几何 Brown 运动就意味着假设股票价格路径是时间的连续函数. 但实践表明,几何 Brown 运动并不是刻画股票价格过程的理想模型. 因此,Merton[2]建立了股票价格带跳的扩散过程模型. 事实上,此后 Lo 和 Mackinlary[3]通过实测数据分析发现几何 Brown 运动与市场实际有一定差距,验证了股票的价格可能会出现间断的“跳跃”. 在 Merton 跳-扩散模型下,不少学者研究了各种期权定价问题,有的还给出了期权定价公式的解析式. 王献东、杜雪樵[4]假设股票价格的跳过程为 Poisson 过程,跳跃高度服从对数正态分布,得到了股票欧式期权的定价公式;宁丽娟、刘新平[5]以及王志、彭勃、滕宇[6]假定股票价格的跳过程为一类特殊的更新过程,分别推导出了基于股票的欧式期权定价公式;闫海峰、刘三阳[7]则在假定股票价格过程遵循带非时齐 Poisson 跳跃的扩散过程,并且股票预期收益率、波动率和无风险利率均为时间函数的情况下,获得了欧式期权精确定价公式. 而苏小囡、王文胜[8]假设标的资产价格服从跳扩散过程,市场利率满足 Vasicek 模型,当随机利率与资产价格相关时,求出了新型期权-幂式期权的定价公式;米玲侠、薛红[9]在股票价格服从带跳几何布朗运动模型假设下,获得了障碍期权和重置看涨期权的定价公式. 钱晓松[10]研究一类跳扩散模型中亚式期权的定价问题,得到了关于算术平均亚式期权的一个简单而统一的算法. 然而,要利用这些公式进行具体计算时我们还面临

收稿日期:2014-02-15.
基金项目:国家自然科学基金(61374080、10801056)、国家社会科学基金(13BJY171)、江苏省社会科学基金(09CJS002)、江苏省高校哲学社会科学基金(2013SJD790031).
通讯联系人:刘国祥,副教授,硕士生导师,研究方向:金融数学. E-mail:gxliu63@163.com

对其中参数或非参数进行估计的问题,为此,人们也做了不少的研究.例如,Synowiec[11]就模型中的跳幅度在5种不同分布假设下进行了比较分析;Javier[12]对Merton跳-扩散模型定价公式中的波动率估计问题进行了探讨;王建稳[13]利用有序样品聚类的思想,给出了Possion跳-扩散模型下,期权定价的参数估计.本文则从跳-扩散模型的基本假定出发,利用历史数据给出参数都为常数时的极大似然估计.

1 模型

假设标的资产价格 $S(t)$ 满足如下的跳扩散过程

$$\mathrm{d}S(t)=S(t)(\mu\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}B(t)+(e^J-1)\mathrm{d}N(t)), \tag{1}$$

其中,$(B(t))_{t\geqslant0}$ 为标准Brown运动,$(N(t))_{t\geqslant0}$ 是强度参数为 λ 的泊松过程,e^J-1 是标的资产价格发生跳跃时的相对跳跃幅度,$J\sim N(-\frac{\sigma_J^2}{2},\sigma_J^2)$,且 $(B(t))_{t\geqslant0}$、$(N(t))_{t\geqslant0}$、J 相互独立;参数 $\mu,\sigma^2,\lambda,\sigma_J^2$ 都是常数.

显然,在跳扩散模型(1)下各类期权的定价公式仅依赖于上述4个参数,事实上,有些公式还与参数 μ 无关,而且 μ 的值往往也不难观测到.

例如,资产或无两值看涨期权,在 $t=0$ 时刻的定价公式为

$$C=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda T)^n\mathrm{e}^{-\lambda T}}{n!}S(0)N(d_2^n), \tag{2}$$

$$d_2^n=d_1^n+\sqrt{n\sigma_J^2+\sigma^2T},$$

$$d_1^n=\frac{\ln\frac{S(0)}{K}+(r-\frac{\sigma^2}{2})T-\frac{n\sigma_J^2}{2}}{\sqrt{n\sigma_J^2+\sigma^2T}},$$

其中,r 为无风险利率,$N(\cdot)$ 为标准正态累积分布函数,T 为该两值期权的到期期限.

可见,(2)式中只有4个未知参数,而无风险利率 r 一般可通过市场观察得到,因此,为利用(2)式计算时我们需要估计 $\sigma^2,\lambda,\sigma_J^2$ 这3个参数.

2 参数估计

我们将采用历史数据来估计它们.首先,我们建立样本数据.

在 $t=0$ 时刻前,取 $n+1$ 个时刻 $t_0<t_1<\cdots<t_n=0$,使得 $t_{i+1}-t_i=t_i-t_{i-1}\triangleq\Delta t$,$1\leqslant i\leqslant n-1$.记 $[t_{i-1},t_i]$ 内标的资产的跳跃次数为 $N_i=N(t_i)-N(t_{i-1})$,$i=1,2,\cdots,n$.且

$$\overline{N}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}N_i.$$

又设 $[t_0,t_n]$ 之间标的资产有 m 次跳跃,时刻分别为 $t_1^m<t_2^m<\cdots<t_m^m$,记 t_i^m 时刻的相对跳跃幅度为 X_i,则

$$X_i=\frac{S(t_i^m)-S(t_{i-1}^{m-})}{S(t_{i-1}^{m-})},$$

又记 $J_i=\ln(X_i+1)$,$1\leqslant i\leqslant m$,

$$\bar{J}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}J_i,\quad V^2=\frac{1}{m+1}\sum_{i=1}^{m}(J_i-\bar{J})^2.$$

再记 $v=\min\{t_{i+1}^m-t_i^m,1\leqslant i\leqslant m\}$,$t_{m+1}^m=t_n$,这里不妨设 $t_m^m<t_n$.令 $\tau=\frac{v}{2}$,显然,在 $(t_i^m,t_i^m+\tau]$ 上标的资产没有发生跳跃,取标的资产价格 $S_{t_i^m},S_{t_i^m+\tau}$,$i=1,2,\cdots,m$.记

$$Y_i=\ln S_{t_i^m+\tau}-\ln S_{t_i^m}=\ln\frac{S_{t_i^m+\tau}}{S_{t_i^m}},1\leqslant i\leqslant m,$$

$$\overline{Y}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}Y_i=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\ln\frac{S_{t_i^m+\tau}}{S_{t_i^m}},$$

$$U^2=\frac{1}{m+1}\sum_{i=1}^{m}(Y_i-\overline{Y})^2.$$

于是,我们有如下结论.

定理　在上述假设条件及记号下,未知参数 λ、σ_J^2 及 σ^2 具有如下的极大似然估计,

$$\hat{\lambda}=\frac{1}{\Delta t}\overline{N},\hat{\sigma}_J^2=V^2,\hat{\sigma}^2=\frac{1}{\tau}U^2.$$

证明　由于泊松过程 $(N(t))_{t\geqslant 0}$ 具有平稳独立增量性,因此,$N_1,\cdots,N_n$ 独立同分布于 $N_{\Delta t}=N_{\Delta t}-N_0$,$N_{\Delta t}$ 服从参数为 $\lambda\Delta t$ 的泊松分布. 因此,$N_1,\cdots,N_n$ 可看成是来自 $N_{\Delta t}$ 的一组样本,从而有 $\lambda\Delta t$ 的极大似然估计

$$\hat{\lambda}\Delta t=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}N_i.$$

于是,λ 的极大似然估计为

$$\hat{\lambda}=\frac{1}{n\Delta t}\sum_{i=1}^{n}N_i=\frac{1}{\Delta t}\overline{N}.$$

由假设,各跳跃时刻相互独立,跳跃相对高度也相互独立,所以,所取的数据 $X_1,\cdots,X_m$ 相互独立,从而 $J_1,\cdots,J_m$ 也相互独立,且可看作 J 的一组样本. 而 $J\sim N(-\frac{\sigma_J^2}{2},\sigma_J^2)$. 所以,$\sigma_J^2$ 的极大似然估计为

$$\hat{\sigma}_J^2=V^2.$$

最后,我们来寻找布朗运动波动率 σ^2 的极大似然估计. 解方程(1)可得标的资产的价格

$$S(t)=S(0)\exp[(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma B(t)+JN_t],$$

于是

$$\ln\frac{S(t)}{S(0)}=(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma B(t)+JN_t.$$

显然,$\ln\frac{S(t)}{S(0)}$ 是由相互独立带漂移的布朗运动与复合泊松过程叠加而成. 记

$$R(t)=\ln\frac{S(t)}{S(0)}-JN_t=(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma B(t),$$

则 $R(t)$ 是一带漂移的布朗运动,没有跳,且具有平稳独立增量性,$R(t)\sim N((\mu-\frac{\sigma^2}{2})t,\sigma^2 t)$. 对于任何相邻两个跳跃时刻 $t'<t''$,对 $\forall\, t,t'<t<t''$,$R(t)=\ln\frac{S(t)}{S(0)}-JN_t$ 不含有跳跃项. 且当 $t'<t<t+\Delta t<t''$ 时,

$$\Delta R(t)=R(t+\Delta t)-R(t)=\ln S(t+\Delta t)-\ln S(t)=\frac{\ln S(t+\Delta t)}{\ln S(t)}=(\mu-\frac{\sigma^2}{2})\Delta t+\sigma\Delta B(t).$$

从而服从正态分布 $N((\mu-\frac{\sigma^2}{2})\Delta t,\sigma^2\Delta t)$. 所以,由 $R(t)$ 的平稳独立增量性易知,上述所取的数据 $Y_i=\ln\frac{S_{t_i^m+\tau}}{S_{t_i^m}}$,$i=1,2,\cdots,m$,独立同分布于 $\ln\frac{S_{t+\tau}}{S_t}$,可以看成取自 $\ln\frac{S_{t+\tau}}{S_t}$ 的一组样本. 于是 $\sigma^2\tau$ 的极大似然估计为

$$\hat{\sigma}^2\tau=\frac{1}{m+1}\sum_{i=1}^{m}(Y_i-\overline{Y})^2=U^2,$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{\tau}U^2.$$

[参考文献]

[1]　Black F,Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. Journal of Political Economy,1973;81(3):637-654.

[2]　Merton R C. Option pricing when underlying stock return are discontinuous[J]. Journal of Economics,1976,3:124-144.

[3]　Lo A W,Mackinlary A C. Stock market prices do not follow random walks:evidence from a simple specification test[J]. Review of Financial Studies,198,1:41-46.

[4]　王献东,杜雪樵. 跳扩散模型下的复合期权定价[J]. 数学的实践与认识,2009,39(14):5-11.

(下转第 47 页)

$$\frac{x_{2^{t+1}m+2}}{3}, x_{2^tm+1}, y_{2^tm+1}, x_{2^{t+1}m}, \cdots, x_{4m}$$

均不是平方数,它们至少为 D 提供 $t+3$ 个素因子. 因为 $\omega(D)=7$ 或 8,所以只要考虑 $t=2,4$.

当 $t=4$ 时,因为 $\omega(D)=7$ 或 8,则必有 $m=1$,否则 $x_m, x_{2m}/3$ 均不是平方数,这样式(10)右边至少为 D 提供 $(t+3)+2=9$ 个不同素因子,矛盾. 而 $m=1$ 时,$x_{2^{t+1}m+2}/3=x_{34}/3=67\times33\ 931\times757\ 793$ 为 D 提供 3 个素因子,这样式(10)右边至少为 D 提供 $(t+3)+3-1=9$ 个不同素因子,矛盾.

当 $t=2$ 时,由式(3)第 1 式及引理 7 可知 $x_{2^{t+1}m+2}/3=x_{8m+2}/3=(2y_{4m+1}-1)(2y_{4m+1}+1)/3$ 为 D 提供 2 个不同素因子. 这样

$$\frac{x_{2^{t+1}m+2}}{3}, x_{2^tm+1}, y_{2^tm+1}, x_{2^{t+1}m}, \cdots, x_{4m}$$

至少为 D 提供 $t+4$ 个素因子.

当 $t=2, m\neq1$、7 时,$x_{2m}/3$、x_m、y_m 均不是平方数,这样式(10)右边至少为 D 提供 $(t+4)+3=9$ 个不同素因子,矛盾.

当 $t=2, m=7$ 时,x_m 不是平方数,$x_{2m}/3=x_{14}/3=113\times337$,这样式(10)右边至少为 D 提供 $(t+4)+3=9$ 个不同素因子,矛盾.

当 $t=2, m=1$ 时,$Dz^{*2}=2^6\times3^2\times17\times19\times29\times41\times59\times577$,则 $D=17\times19\times29\times41\times59\times577$,此时 $\omega(D)=6$,矛盾.

致谢 本文作者衷心感谢导师陈永高教授的指导与帮助.

[参考文献]

[1] 管训贵. 关于 Pell 方程组 $x^2-2y^2=1$ 和 $y^2-Dz^2=4$ 的公解[J]. 华中师范大学学报:自然科学版,2012,46(3):267-270.
[2] 陈建华. 关于 Pell 方程组 $x^2-2y^2=1$ 和 $y^2-Dz^2=4$ 的公解[J]. 武汉大学学报:自然科学版,1990,36(1):8-12.
[3] 陈永高. 关于 Pell 方程组 $x^2-2y^2=1$ 和 $y^2-Dz^2=4$ 的公解[J]. 北京大学学报:自然科学版,1994,30(3):298-302.
[4] 马德刚. 方程 $6y^2=x(x+1)(2x+1)$ 的解的初等证明[J]. 四川大学学报:自然科学版,1985,22(4):107-116.

[责任编辑:丁　蓉]

(上接第 38 页)

[5] 宁丽娟,刘新平. 股票价格服从跳-扩散过程的期权定价模型[J]. 陕西师范大学学报:自然科学版,2003,31(4):16-19.
[6] 王志,彭勃,滕宇. 跳扩散和随机利率模型下的欧式双向期权定价[J]. 数学的实践和认识,2010,40(6):9-14.
[7] 闫海峰,刘三阳. 带有 Poisson 跳的股票价格模型的期权定价[J]. 工程数学学报,2003,20(2):35-40.
[8] 苏小囡,王文胜. 幂式期权在跳扩散模型下的定价[J]. 华东师范大学学报:自然科学版,2011,5:13-20.
[9] 米玲侠,薛红. 跳-扩散环境下障碍期权及重置期权定价[J]. 西安工程大学学报,2010,24(1):118-121.
[10] 钱晓松. 跳扩散模型中亚式期权的定价[J]. 应用数学,2003,16(4):161-164.
[11] Daniel Synowiec. Jump-diffusion models with constant parameters for financial log-return processes[J]. Computers and Mathematics with Applications,2008,56:2 120-2 127.
[12] Javier F Navas. Calculation of volatility in a jump-diffusion model[J]. Journal of Derivaitives,2003,12:66-72
[13] 王建稳. Possion 跳一扩散模型的参数估计[J]. 数学的实践与认识,2005,35(7):155-158.
[14] 杨珊,薛红,马惠馨. 分数跳-扩散下两值期权定价[J]. 四川理工学院学报:自然科学版,2010,23(4):391-393.

[责任编辑:陆炳新]