Pell 方程 $x^2-2y^2=1$ 和 $y^2-Dz^2=4$ 的公解

任小枝

(南京师范大学数学科学学院,江苏 南京 210023)

[摘要] 本文证明了当 D 模 12 不同余-1 且 D 为 7 或者 8 个不同奇素数之积时,Pell 方程 $x^2-2y^2=1$ 和 $y^2-Dz^2=4$ 仅有平凡解 $z=0$.

[关键词] Pell 方程,公共解,平凡解

[中图分类号]O156 [文献标志码]A [文章编号]1001-4616(2014)03-0044-04

On the Solutions of the Pell Equation $x^2-2y^2=1$ and $y^2-Dz^2=4$

Ren Xiaozhi

(School of Mathematical Sciences,Nanjing Normal University,Nanjing 210023,China)

Abstract:In this paper,the following conclusion is proved:If $D\not\equiv-1\pmod{12}$ and $D>0$ is an odd squarefree integer which has 7 or 8 distinct prime factors,the equation $x^2-2y^2=1$ and $y-Dz^2=4$ has only one trivial solution $z=0$.

Key words:Pell equation,common solution,trivial solution

对 Pell 方程组

$$\begin{cases}x^2-2y^2=1\\ y^2-Dz^2=4\end{cases}\tag{1}$$

的解问题,有不少人进行过研究,如:管训贵[1]证明了当 $D=2p_1p_2\cdots p_s$,$1\leqslant s\leqslant 6$(其中 $p_1,\cdots,p_s$ 为不同奇素数)时,除了 D 为 2×17、$2\times3\times5\times7\times11\times17$ 及 $2\times17\times113\times239\times337\times577\times665\ 857$ 外,方程组(1)仅有平凡解 $(x,y,z)=(\pm3,\pm2,0)$. 陈建华[2]证明了当 $D=p$ 或 pq(其中 p,q 为不同的素数)时,方程组(1)仅有的非平凡正解为:当 $p=5,q=7$ 时 $x=17,y=12,z=2$.

我们记 $\omega(D)$ 为 D 的不同素因子个数,以下 D 为无平方因子的正奇数.

陈永高[3]证明了以下定理:

(1)当 D 模 12 不同余-1 时,若 $\omega(D)\leqslant6$,且 D 不等于 $3\times5\times7\times11\times17\times577$ 及 $17\times19\times29\times41\times59\times577$,则方程组(1)仅有平凡解 $z=0$;当 $D=3\times5\times7\times11\times17\times577$ 时,方程组(1)的全部解为 $z=0,\pm24$;当 $D=17\times19\times29\times41\times59\times577$ 时,方程组(1)的全部解为 $z=0,\pm24$.

(2)当 $D\equiv-1\pmod{12}$ 时,若 $\omega(D)\leqslant3$,且 D 不等于 5×7 及 $29\times41\times239$,则方程组(1)仅有平凡解 $z=0$;当 $D=5\times7$ 时,方程组(1)的全部解为 $z=0,\pm2$;当 $D=29\times41\times239$ 时,方程组(1)的全部解为 $z=0,\pm26$.

本文对陈永高[3]定理 1 中的结果进行了改进,得到了以下结论:

定理 设 D 为无平方因子的正奇数,D 模 12 不同余-1,若 $\omega(D)=7$ 或 8,则 Pell 方程 $x^2-2y^2=1$ 和 $y^2-Dz^2=4$ 仅有平凡解 $z=0$.

1 预备知识与引理

熟知 $x^2-2y^2=1$ 的全部正解为 $x_n+\sqrt{2}y_n=\rho^n$(n 为任意正偶数);$x^2-2y^2=-1$ 的全部正解为 $x_n+\sqrt{2}y_n=\rho^n$

收稿日期:2013-12-11.

基金项目:国家自然科学基金(11371195).

通讯联系人:任小枝,硕士研究生,研究方向:数论. E-mail:1215836301@qq.com

（n 为任意正奇数），其中 $\rho=1+\sqrt{2}$，且有

$$x_n=\frac{\rho^n+\bar{\rho}^n}{2},\quad y_n=\frac{\rho^n-\bar{\rho}^n}{2\sqrt{2}}. \tag{2}$$

由 $x_n^2-2y_n^2=\pm1$ 知 x_n 为奇数. 当 n 为偶数时，由 $x_n^2-2y_n^2=1$ 知 y_n 为偶数；当 n 为奇数时，由 $x_n^2-2y_n^2=-1$ 知 y_n 为奇数.

引理 1 下列等式成立

$$\begin{cases}x_{4n+2}=4y_{2n+1}^2-1,\\ y_{2n}=2x_ny_n,\\ y_{2n+2}=2x_{n+2}y_n+2(-1)^n=2y_{n+2}x_n-2(-1)^n.\end{cases} \tag{3}$$

证明 由式(2)及 $\rho\bar{\rho}=-1$ 可知

$$4y_{2n+1}^2-1=4\left(\frac{\rho^{2n+1}-\bar{\rho}^{2n+1}}{2\sqrt{2}}\right)^2-1=x_{4n+2},$$

$$y_{2n}=\frac{\rho^{2n}-\bar{\rho}^{2n}}{2\sqrt{2}}=\frac{(\rho^n+\bar{\rho}^n)(\rho^n-\bar{\rho}^n)}{2\sqrt{2}}=2y_nx_n.$$

由式(2)及 $\rho^2-\bar{\rho}^2=4\sqrt{2}$ 可知

$$2x_{n+2}y_n+2(-1)^n=2\cdot\frac{\rho^{n+2}+\bar{\rho}^{n+2}}{2}\cdot\frac{\rho^n-\bar{\rho}^n}{2\sqrt{2}}+2(-1)^n=\frac{\rho^{2n+2}-\bar{\rho}^{2n+2}-(-1)^n(\rho^2-\bar{\rho}^2)}{2\sqrt{2}}+2(-1)^n=y_{2n+2}.$$

同理可证 $y_{2n+2}=2y_{n+2}x_n-2(-1)^n$.

引理 2[3] 设 m,n 为正整数，则

$$(x_n,x_m)=\begin{cases}x_{(m,n)}, & 2\text{ 不整除}\dfrac{mn}{(m,n)^2},\\ 1, & 2\mid\dfrac{mn}{(m,n)^2};\end{cases} \tag{4}$$

$$(x_n,y_m)=\begin{cases}x_{(m,n)}, & 2\mid\dfrac{m}{(m,n)},\\ 1, & 2\text{ 不整除}\dfrac{m}{(m,n)};\end{cases} \tag{5}$$

$$(y_n,y_m)=y_{(m,n)}. \tag{6}$$

引理 3[3] 设 $n\geqslant1$，则 x_n 为平方数当且仅当 $n=1$，y_n 为平方数当且仅当 $n=1,7$.

引理 4[4] Pell 方程组

$$\begin{cases}2x^2-3z^2=-1\\ 4y^2-3z^2=1\end{cases} \tag{7}$$

仅有 $x^2=1$ 的解.

引理 5 若 $x_n=3a^2$，$n,a\in\mathbf{N}$，则 $n=2$.

证明 (1)当 n 为奇数时，由式(4)知 $(x_n,x_2)=1$. 注意到 $x_2=3$，我们有 3 不整除 x_n，因而 $x_n\neq3a^2$.

(2)当 n 为偶数时，由 $x_n^2-2y_n^2=1$ 及 $x_n=3a^2$ 知 $9a^4-2y_n^2=1$. 变形可得 $(3a^2-1)(3a^2+1)=2y_n^2$. 因为 y_n 为偶数，且

$$\left(\frac{3a^2-1}{2},\frac{3a^2+1}{4}\right)=1,$$

所以可令 $3a^2-1=2b^2$，$3a^2+1=4c^2$，其中 $y_n=2bc$. 由引理 4 可得 $a^2=1$，因此 $x_n=3$；易知 x_n 是递增的，又 $x_2=3$，故 $n=2$.

引理 6 $y_{8k+3}\equiv2\pmod 3$，$y_{8k+5}\equiv2\pmod 3$，$y_{2k+1}\equiv1\pmod 4$.

证明 $x_n+\sqrt{2}y_n=(1+\sqrt{2})^n$，两边同乘 $(1+\sqrt{2})$，得 $x_n+2y_n+\sqrt{2}(x_n+y_n)=x_{n+1}+\sqrt{2}y_{n+1}$，容易推出 $y_{n+2}=2y_{n+1}+y_n$，反复应用该式，可知

$$\begin{cases} y_{8k} \equiv 0 \pmod 3, \\ y_{8k+1} \equiv 1 \pmod 3, \\ y_{8k+2} \equiv 2 \pmod 3, \\ y_{8k+3} \equiv 2 \pmod 3, \\ y_{8k+4} \equiv 0 \pmod 3, \\ y_{8k+5} \equiv 2 \pmod 3, \\ y_{8k+6} \equiv 1 \pmod 3, \\ y_{8k+7} \equiv 1 \pmod 3, \end{cases} \tag{8}$$

及

$$\begin{cases} y_{4k} \equiv 0 \pmod 4, \\ y_{4k+1} \equiv 1 \pmod 4, \\ y_{4k+2} \equiv 2 \pmod 4, \\ y_{4k+3} \equiv 1 \pmod 4, \end{cases} \tag{9}$$

故得证.

引理 7　当 n 为正奇数,$\varepsilon=1$ 或 -1 时,$(2y_{4n+\varepsilon}-1)/3$ 与 $2y_{4n+\varepsilon}+1$ 为互素的非平方数.

证明　由 n 为正奇数及 $\varepsilon=1$ 或 -1 知 $4n+\varepsilon\equiv 5$ 或 $3 \pmod 8$. 从而由引理 6 可得 $y_{4n+\varepsilon}\equiv 2 \pmod 3$,因此 $(2y_{4n+\varepsilon}-1)/3$ 为整数. 显然有

$$\left(\frac{2y_{4n+\varepsilon}-1}{3}, 2y_{4n+\varepsilon}+1\right)=1.$$

由引理 6 可得 $y_{4n+\varepsilon}\equiv 1 \pmod 4$,所以 $(2y_{4n+\varepsilon}-1)/3\equiv 3 \pmod 4$ 及 $2y_{4n+\varepsilon}+1\equiv 3 \pmod 4$. 因此 $(2y_{4n+\varepsilon}-1)/3$ 和 $2y_{4n+\varepsilon}+1$ 均不是平方数.

引理 8　若 Pell 方程 $x^2-2y^2=1$ 和 $y^2-Dz^2=4$ 有如下形式的解:$x=x_{4m}, y=y_{4m}, z=t\,(m\in\mathbf{N}, t\in\mathbf{N})$,则 $D\equiv -1 \pmod{12}$.

证明　由式(5)知 $(y_{4m}, x_2)=x_{(4m,2)}=x_2=3$,所以 $3\mid y_{4m}$. 又 y_{4m} 为偶数,D 为奇数及 $y_{4m}^2-Dt^2=4$,可得 $y_{4m}^2\equiv 0 \pmod{12}$,3 不整除 t,$2\mid t$. 所以 $t^2\equiv 4 \pmod{12}$,故 $D\equiv -1 \pmod{12}$.

2　定理的证明

本文定理的证明与文献[3]中此定理的证明方法一样,只有局部改动,以使结果得到改进.

假设方程组(1)有非平凡解,则必有非平凡正解,不妨设为 (x^*, y^*, z^*). 由引理 8 和 D 模 12 不同余 -1 知存在非负整数 n,使得 $x^*=x_{4n+2}, y^*=y_{4n+2}$. 再由 $z^*\neq 0$ 知 $y^*\neq 2$. 因为 $y_2=2$ 且 y_n 递增,所以 $n\geqslant 1$.

由式(3)第 2、第 3 式知

$$Dz^{*2}=y_{4n+2}^2-4=(y_{4n+2}-2(-1)^{2n})(y_{4n+2}+2(-1)^{2n})=2x_{2n+2}y_{2n}\cdot 2y_{2n+2}x_{2n}=$$
$$2x_{2n+2}\cdot 2x_n y_n\cdot 4x_{n+1}y_{n+1}x_{2n}=16x_{2n+2}x_{2n}x_{n+1}x_n y_{n+1}y_n.$$

在 n 及 $n+1$ 中一定有一个偶数,不妨设 n 为偶数,则 n 可写成 $n=2^t m$,其中 t 为正整数,m 为正奇数. 由式(3)第 2 式得

$$Dz^{*2}=16x_{2n+2}x_{2n}x_{n+1}x_n y_{n+1}y_n=2^{t+4}x_{2^{t+1}m+2}x_{2^{t+1}m}x_{2^t m+1}x_{2^t m}\cdots x_m y_{2^t m+1}y_m. \tag{10}$$

由式(4)及 m 为奇数知,

$$(x_{2^{t+1}m+2}, x_{2m})=x_2=3.$$

由引理 2 及 m 为奇数有

$$\frac{x_{2^{t+1}m+2}}{3}, x_{2^t m+1}, y_{2^t m+1}, x_{2^{t+1}m}, \cdots, x_{4m}, \frac{x_{2m}}{3}, x_m, y_m$$

两两互素及均为奇数. 因为 D 为奇数,所以 2^{t+4} 为平方数,则 t 为偶数.

由引理 3,5 知

$$\frac{x_{2^{t+1}m+2}}{3},x_{2^tm+1},y_{2^tm+1},x_{2^{t+1}m},\cdots,x_{4m}$$

均不是平方数,它们至少为 D 提供 $t+3$ 个素因子. 因为 $\omega(D)=7$ 或 8,所以只要考虑 $t=2,4$.

当 $t=4$ 时,因为 $\omega(D)=7$ 或 8,则必有 $m=1$,否则 x_m,$x_{2m}/3$ 均不是平方数,这样式(10)右边至少为 D 提供$(t+3)+2=9$ 个不同素因子,矛盾. 而 $m=1$ 时,$x_{2^{t+1}m+2}/3=x_{34}/3=67\times33\ 931\times757\ 793$ 为 D 提供 3 个素因子,这样式(10)右边至少为 D 提供$(t+3)+3-1=9$ 个不同素因子,矛盾.

当 $t=2$ 时,由式(3)第 1 式及引理 7 可知 $x_{2^{t+1}m+2}/3=x_{8m+2}/3=(2y_{4m+1}-1)(2y_{4m+1}+1)/3$ 为 D 提供 2 个不同素因子. 这样

$$\frac{x_{2^{t+1}m+2}}{3},x_{2^tm+1},y_{2^tm+1},x_{2^{t+1}m},\cdots,x_{4m}$$

至少为 D 提供 $t+4$ 个素因子.

当 $t=2$,$m\neq1$、7 时,$x_{2m}/3$、x_m、y_m 均不是平方数,这样式(10)右边至少为 D 提供$(t+4)+3=9$ 个不同素因子,矛盾.

当 $t=2$,$m=7$ 时,x_m 不是平方数,$x_{2m}/3=x_{14}/3=113\times337$,这样式(10)右边至少为 D 提供$(t+4)+3=9$ 个不同素因子,矛盾.

当 $t=2$,$m=1$ 时,$Dz^{*2}=2^6\times3^2\times17\times19\times29\times41\times59\times577$,则 $D=17\times19\times29\times41\times59\times577$,此时 $\omega(D)=6$,矛盾.

致谢 本文作者衷心感谢导师陈永高教授的指导与帮助.

[参考文献]

[1] 管训贵. 关于 Pell 方程组 $x^2-2y^2=1$ 和 $y^2-Dz^2=4$ 的公解[J]. 华中师范大学学报:自然科学版,2012,46(3):267-270.

[2] 陈建华. 关于 Pell 方程组 $x^2-2y^2=1$ 和 $y^2-Dz^2=4$ 的公解[J]. 武汉大学学报:自然科学版,1990,36(1):8-12.

[3] 陈永高. 关于 Pell 方程组 $x^2-2y^2=1$ 和 $y^2-Dz^2=4$ 的公解[J]. 北京大学学报:自然科学版,1994,30(3):298-302.

[4] 马德刚. 方程 $6y^2=x(x+1)(2x+1)$ 的解的初等证明[J]. 四川大学学报:自然科学版,1985,22(4):107-116.

[责任编辑:丁　蓉]

(上接第 38 页)

[5] 宁丽娟,刘新平. 股票价格服从跳-扩散过程的期权定价模型[J]. 陕西师范大学学报:自然科学版,2003,31(4):16-19.

[6] 王志,彭勃,滕宇. 跳扩散和随机利率模型下的欧式双向期权定价[J]. 数学的实践和认识,2010,40(6):9-14.

[7] 闫海峰,刘三阳. 带有 Poisson 跳的股票价格模型的期权定价[J]. 工程数学学报,2003,20(2):35-40.

[8] 苏小囡,王文胜. 幂式期权在跳扩散模型下的定价[J]. 华东师范大学学报:自然科学版,2011,5:13-20.

[9] 米玲侠,薛红. 跳-扩散环境下障碍期权及重置期权定价[J]. 西安工程大学学报,2010,24(1):118-121.

[10] 钱晓松. 跳扩散模型中亚式期权的定价[J]. 应用数学,2003,16(4):161-164.

[11] Daniel Synowiec. Jump-diffusion models with constant parameters for financial log-return processes[J]. Computers and Mathematics with Applications,2008,56:2 120-2 127.

[12] Javier F Navas. Calculation of volatility in a jump-diffusion model[J]. Journal of Derivaitives,2003,12:66-72

[13] 王建稳. Possion 跳一扩散模型的参数估计[J]. 数学的实践与认识,2005,35(7):155-158.

[14] 杨珊,薛红,马惠馨. 分数跳-扩散下两值期权定价[J]. 四川理工学院学报:自然科学版,2010,23(4):391-393.

[责任编辑:陆炳新]