关于丢番图方程$(65n)^x+(72n)^y=(97n)^z$

马米米,吴建东

(南京师范大学数学科学学院,数学研究所,江苏 南京 210023)

[**摘要**] 本文证明了对任意的正整数 n,丢番图方程$(65n)^x+(72n)^y=(97n)^z$ 仅有正整数解$(x,y,z)=(2,2,2)$.

[**关键词**] Jeśmanowicz 猜想,丢番图方程

[**中图分类号**]O156.1,O156.7 [**文献标志码**]A [**文章编号**]1001-4616(2014)04-0028-03

On the Diophantine Equation $(65n)^x+(72n)^y=(97n)^z$

Ma Mimi,Wu Jiandong

(School of Mathematical Sciences and Institute of Mathematics,Nanjing Normal University,Nanjing 210023,China)

Abstract:In this paper,we show that for any positive integer n,the Diophantine equation $(65n)^x+(72n)^y=(97n)^z$ has no solution other than $(x,y,z)=(2,2,2)$ in positive integers.

Key words:Jeśmanowicz conjecture,Diophantine equation

设 a,b,c 是两两互素的正整数且满足 $a^2+b^2=c^2$,则对任意的正整数 n,丢番图方程

$$(an)^x+(bn)^y=(cn)^z \tag{1}$$

一定有解$(x,y,z)=(2,2,2)$. 1956 年,Sierpiński[1]证明了当 $n=1$,$(a,b,c)=(3,4,5)$时,方程(1)仅有正整数解$(x,y,z)=(2,2,2)$. Jeśmanowicz[2]证明了当 $n=1$ 且$(a,b,c)=(5,12,13),(7,24,25),(9,40,41),(11,60,61)$时,方程(1)只有正整数解$(x,y,z)=(2,2,2)$. 并且 Jeśmanowicz[2]猜想对任意的正整数 n,方程(1)只有正整数解$(x,y,z)=(2,2,2)$. 最近,Miyazaki[3]证明了当 $n=1$ 且 $a\equiv\pm1 \pmod b$ 或 $c\equiv1 \pmod b$ 时,Jeśmanowicz 猜想成立. 1998 年,Deng 和 Cohen[4]证明了对任意的正整数 n,当$(a,b,c)=(3,4,5),(5,12,13),(7,24,25),(9,40,41),(11,60,61)$时,方程(1)仅有正整数解$(x,y,z)=(2,2,2)$. 最近,文献[5]及[6]分别证明了对任意的正整数 n,方程$(8n)^x+(15n)^y=(17n)^z$ 和方程$(36n)^x+(77n)^y=(85n)^z$ 仅有正整数解$(x,y,z)=(2,2,2)$.

本文考虑方程(1)中$(a,b,c)=(65,72,97)$的情况,得到如下的结论:

定理 对任意的正整数 n,丢番图方程

$$(65n)^x+(72n)^y=(97n)^z \tag{2}$$

仅有正整数解$(x,y,z)=(2,2,2)$.

1 引理

引理 1[4] 设正整数 a,b,c 满足 $a^2+b^2=c^2$. 若 $z\geqslant\max\{x,y\}$,则丢番图方程 $a^x+b^y=c^z$ 仅有正整数解$(x,y,z)=(2,2,2)$.

引理 2[7] 如果方程(1)有一个解$(x,y,z)\neq(2,2,2)$,则 x,y,z 互不相同.

引理 3[8] 设 a,b,c 是两两互素的正整数且满足 $a^2+b^2=c^2$. 假设丢番图方程 $a^x+b^y=c^z$ 仅有正整数解$(x,y,z)=(2,2,2)$,则方程(1)没有满足 $z<y<x$ 或 $z<x<y$ 的正整数解.

引理 4 方程 $3^x+1=2^y$ 的非负整数解为$(x,y)=(1,2),(0,1)$.

收稿日期:2013-12-10.

基金项目:国家自然科学基金(11371195)、江苏省高校自然科学研究项目(13KJD110005).

通讯联系人:吴建东,博士,讲师,研究方向:组合数论. E-mail:05348@njnu.edu.cn

证明 当$y\geqslant3$时，有$3^x\equiv-1(\bmod 8)$，这是不可能的；当$y=2$时，$x=1$；当$y=1$时，$x=0$；当$y=0$时，无解. 故$3^x+1=2^y$的非负整数解为$(x,y)=(1,2),(0,1)$.

引理5 丢番图方程

$$65^x+72^y=97^z \tag{3}$$

只有正整数解$(x,y,z)=(2,2,2)$.

证明 如果$y=1$，方程(3)为$65^x+72=97^z$，从而有$1+8\equiv33^z(\bmod 64)$，这是不可能的. 下面考虑$y\geqslant2$. 由方程(3)知$(-1)^x\equiv1(\bmod 3)$. 故$2|x$，设$x=2x_1$. 再由方程(3)知，$1\equiv33^z(\bmod 64)$. 故$2|z$，设$z=2z_1$. 方程(3)为

$$2^{3y}3^{2y}=(97^{z_1}+65^{x_1})(97^{z_1}-65^{x_1}).$$

因为$(97^{z_1}+65^{x_1},97^{z_1}-65^{x_1})=2$，$97^{z_1}-65^{x_1}\equiv0(\bmod 4)$及$97^{z_1}+65^{x_1}>97^{z_1}-65^{x_1}$，所以

$$97^{z_1}+65^{x_1}=2\cdot3^{2y},\quad 97^{z_1}-65^{x_1}=2^{3y-1}.$$

从而

$$97^{z_1}=3^{2y}+2^{3y-2}, \tag{4}$$

$$65^{x_1}=3^{2y}-2^{3y-2}. \tag{5}$$

当$y\geqslant3$时，由方程(5)知$3^{2y}\equiv1(\bmod 64)$. 由方程(4)得$33^{z_1}\equiv3^{2y}\equiv1(\bmod 64)$. 故$2|z_1$，设$z_1=2z_2$. 由方程(4)知$2^{3y-2}=(97^{z_2}-3^y)(97^{z_2}+3^y)$. 注意到$(97^{z_2}-3^y,97^{z_2}+3^y)=2$，我们有

$$97^{z_2}+3^y=2^{3y-3},\quad 97^{z_2}-3^y=2.$$

从而$3^y=2^{3y-4}-1$，由引理4知此方程无解. 当$y=2$时，由方程(4)及(5)知$z_1=1$，$x_1=1$，即$(x,y,z)=(2,2,2)$. 因此，方程(3)只有正整数解$(x,y,z)=(2,2,2)$.

2 定理的证明

由前面的引理可知，我们只需要研究方程(2)在$n\geqslant2$并且$\min\{x,y\}<z<\max\{x,y\}$时的情况.

情形1 $y<z<x$. 则方程(2)可化为

$$72^y=n^{z-y}(97^z-65^x\cdot n^{x-z}). \tag{6}$$

由$z-y\geqslant1$，可设$n=2^r\cdot3^s$，其中$r+s\geqslant1$.

情形1.1 $n=2^r$，$r\geqslant1$. 方程(6)化为

$$2^{3y}\cdot3^{2y}=2^{r(z-y)}(97^z-65^x\cdot2^{r(x-z)}).$$

注意到$97^z-65^x\cdot2^{r(x-z)}\equiv1(\bmod 2)$，我们有$3y=r(z-y)$及

$$65^x\cdot2^{r(x-z)}=97^z-3^{2y}. \tag{7}$$

由方程(7)有$2^z\equiv(-1)^y\equiv\pm1(\bmod 5)$. 故$2|z$，设$z=2z_1$. 从而有

$$5^x\cdot13^x\cdot2^{r(x-z)}=(97^{z_1}-3^y)(97^{z_1}+3^y).$$

因为$(97^{z_1}-3^y,97^{z_1}+3^y)=2$，所以$13^x|97^{z_1}+3^y$或$13^x|97^{z_1}-3^y$. 从而$13^x\leqslant97^{z_1}+3^y$. 另一方面，

$$13^x>13^z=13^{2z_1}>(97+9)^{z_1}\geqslant97^{z_1}+3^{2z_1}>97^{z_1}+3^y,$$

矛盾.

情形1.2 $n=3^s$，$s\geqslant1$. 方程(6)可化为

$$2^{3y}\cdot3^{2y}=3^{s(z-y)}(97^z-65^x\cdot3^{s(x-z)}).$$

注意到$97^z-65^x\cdot3^{s(x-z)}\equiv1(\bmod 3)$，我们有$2y=s(z-y)$及

$$65^x\cdot3^{s(x-z)}=97^z-2^{3y}. \tag{8}$$

由方程(8)有$(-1)^y\equiv1(\bmod 3)$. 故$2|y$，设$y=2y_1$. 又由方程(8)有$2^z\equiv(-2)^y\equiv2^{2y_1}\equiv(-1)^{y_1}\equiv\pm1(\bmod 5)$. 故$2|z$，设$z=2z_1$. 从而有

$$5^x\cdot13^x\cdot3^{s(x-z)}=(97^{z_1}-8^{y_1})(97^{z_1}+8^{y_1}).$$

因为$(97^{z_1}-8^{y_1},97^{z_1}+8^{y_1})=1$，所以$13^x|97^{z_1}+8^{y_1}$或$13^x|97^{z_1}-8^{y_1}$. 从而$13^x\leqslant97^{z_1}+8^{y_1}$. 另一方面，

$$13^x>13^z=13^{2z_1}>(97+8)^{z_1}\geqslant97^{z_1}+8^{z_1}>97^{z_1}+8^{y_1},$$

矛盾.

情形1.3 $n=2^r\cdot3^s$，$r\geqslant1$，$s\geqslant1$. 则方程(6)化为

$$2^{3y}\cdot 3^{2y}=2^{r(z-y)}3^{s(z-y)}(97^z-65^x\cdot 2^{r(x-z)}\cdot 3^{s(x-z)}).$$

我们有 $3y=r(z-y)$,$2y=s(z-y)$ 且

$$65^x\cdot 2^{r(x-z)}\cdot 3^{s(x-z)}=97^z-1. \tag{9}$$

由方程(9)可知 $2^z\equiv 1\pmod 5$. 故 $z\equiv 0\pmod 4$. 注意到 $97^z-1\equiv(-1)^z-1\equiv 0\pmod 7$,我们有 $7\mid 97^z-1$. 但是 $7\nmid 65^x\cdot 2^{r(x-z)}\cdot 3^{s(x-z)}$,矛盾.

情形2　$x<z<y$. 则方程(2)可化为

$$65^x=n^{z-x}(97^z-72^y\cdot n^{y-z}). \tag{10}$$

由 $z-x\geqslant 1$,可设 $n=5^r\cdot 13^s$,其中 $r+s\geqslant 1$.

情形2.1　$n=5^r$,$r\geqslant 1$. 方程(10)化为

$$5^x\cdot 13^x=5^{r(z-x)}(97^z-72^y\cdot 5^{r(y-z)}).$$

注意到 $97^z-72^y\cdot 5^{r(y-z)}\equiv 2^z\not\equiv 0\pmod 5$,我们有 $x=r(z-x)$ 及

$$72^y\cdot 5^{r(y-z)}=97^z-13^x. \tag{11}$$

由式(11)得 $5^x\equiv 1\pmod 8$. 故 $2\mid x$,设 $x=2x_1$. 再由式(11)得 $2^z\equiv(-2)^x\equiv 2^{2x_1}\equiv(-1)^{x_1}\equiv\pm 1\pmod 5$. 故 $2\mid z$,设 $z=2z_1$. 从而有

$$2^{3y}\cdot 3^{2y}\cdot 5^{r(y-z)}=(97^{z_1}+13^{x_1})(97^{z_1}-13^{x_1}).$$

注意到 $(97^{z_1}+13^{x_1},97^{z_1}-13^{x_1})=2$,$97^{z_1}-13^{x_1}\equiv 0\pmod 4$ 及 $97^{z_1}-13^{x_1}\equiv 0\pmod 3$,我们有 $2^{3y-1}\cdot 3^{2y}\mid 97^{z_1}-13^{x_1}$. 但是

$$2^{3y-1}\cdot 3^{2y}>2^{3z}\cdot 3^{2z}=72^{2z_1}>97^{z_1}-13^{x_1},$$

矛盾.

情形2.2　$n=13^s$,$s\geqslant 1$. 方程(10)化为

$$5^x\cdot 13^x=13^{s(z-x)}(97^z-72^y\cdot 13^{s(y-z)}).$$

注意到 $97^z-72^y\cdot 13^{s(y-z)}\equiv 6^z\not\equiv 0\pmod{13}$,我们有 $x=s(z-x)$ 及

$$72^y\cdot 13^{s(y-z)}=97^z-5^x. \tag{12}$$

由方程(12)得 $(-1)^x\equiv 1\pmod 3$. 故 $2\mid x$,设 $x=2x_1$. 再由方程(12)可知 $6^z\equiv 5^{2x_1}\equiv(-1)^{x_1}\equiv\pm 1\pmod{13}$. 故 $z\equiv 0\pmod 6$,设 $z=2z_1$. 从而有

$$2^{3y}\cdot 3^{2y}\cdot 13^{s(y-z)}=(97^{z_1}-5^{x_1})(97^{z_1}+5^{x_1}).$$

注意到 $(97^{z_1}-5^{x_1},97^{z_1}+5^{x_1})=2$ 及 $97^{z_1}-5^{x_1}\equiv 0\pmod 4$.

情形2.2.1　$2\mid x_1$. 此时 $97^{z_1}-5^{x_1}\equiv 0\pmod 3$. 因此 $2^{3y-1}\cdot 3^{2y}\mid 97^{z_1}-5^{x_1}$. 但是

$$2^{3y-1}\cdot 3^{2y}>2^{3z}\cdot 3^{2z}=72^{2z_1}>97^{z_1}-5^{x_1},$$

矛盾.

情形2.2.2　$2\nmid x_1$. 由 $x=s(z-x)$ 知 $(s+1)x_1=sz_1$. 分析 s 的奇偶性,我们有 $2\mid z_1$. 注意到 $2z_1\equiv 0\pmod 6$,我们有 $3\mid z_1$. 这样 $12\mid z$, $x\equiv 2\pmod 4$. 因此

$$97^z-5^x\equiv 1-5^2\not\equiv 0\pmod{13},$$

与(12)矛盾.

情形2.3　$n=5^r\cdot 13^s$,$r\geqslant 1$,$s\geqslant 1$. 则方程(10)可化为

$$5^x\cdot 13^x=5^{r(z-x)}\cdot 13^{s(z-x)}(97^z-72^y\cdot 5^{r(y-z)}\cdot 13^{s(y-z)}).$$

我们有 $x=r(z-x)=s(z-x)$,从而 $r=s$ 且

$$72^y\cdot 65^{r(y-z)}=97^z-1. \tag{13}$$

由式(13)得 $2^z\equiv 1\pmod 5$. 故 $z\equiv 0\pmod 4$. 注意到 $97^z-1\equiv(-1)^z-1\equiv 0\pmod 7$,我们有 $7\mid 97^z-1$. 但是 $7\nmid 72^y\cdot 65^{r(y-z)}$,矛盾.

因此,定理得证.

致谢　作者衷心感谢导师陈永高教授的指导与帮助.

(下转第40页)

Springer. 2003.
[6] Fukushima M,Pang J S. Quasi-variational inequalities,generalized Nash equilibria,and multieader-follower games[J]. Comput Manag Sci,2005,2(1):21-56.
[7] Kubota K,Fukushim M. Gap function approach to the generalized Nash equilibrium problem[J]. J Opt Theory Appl,2010,144(3):511-531.
[8] Heusinger A Von,Kanzow C. Optimization reformulations of the generalized Nash equilibriumproblem using Nikaido-Isoda-type functions[J]. Comput Optim Appl,2009,43(3):353-377.
[9] Fukushima M. Restricted generalized Nash equilibria and controlled penalty algorithm[J]. Comput Manag Sci,2011,8(3):201-218.
[10] Nabetani K,Tseng P,Fukushima M. Parametrized variational inequality approaches to generalized Nash equilibrium problems with shared constraints[J]. Comput Optim Appl,2011,48(3):423-452.
[11] Dreves A,Kanzow C. Nonsmooth optimization reformulations characterizing all solutions of jointly convexgeneralized Nash equilibrium problems[J]. Comput Optim Appl,2011,50(1):23-48.
[12] Heusinger A Von,Kanzow C,Fukushima M. Newton's method for computing a normalized equilibrium in the generalized Nash game through fixed point formulation[J]. Math Program,2012,132(1/2):99-123.
[13] Goldstein A. Convex programming in Hilbert space[J]. Bull Amer Math Soc,1964,70:709-710.
[14] Khobotov E. Modification of the extragradient method for solving variational inequalities and certain optimization problems [J]. USSR Comput Math Math Phys,1987,27(5):120-127.
[15] Barzilai J,Borwein J M. Two point step size gradient method[J]. IMAJ Numer Anal,1988,8(1):141-148.
[16] Dai Y H,Liao L Z. R-linear convergence of the Barzilai and Borwein gradient method[J]. IMAJ Numer Anal,2002,22(1):1-10.
[17] Marcos R. On the Barzilai and Borwein choice of steplength for the gradient method[J]. IMAJ Numer Anal,1993,13(3):321-326.
[18] Han D R,Zhang H C,Gang Q,et al. An improved two-step method for solving generalized Nash equilibrium problems[J]. Eur J Oper Res,2012,216:613-623.

[责任编辑:丁　蓉]

(上接第 30 页)

[参考文献]

[1] Sierpiński W. On the Diophantine equation $3^x+4^y=5^z$[J]. Wiadom Mat,1955,1:194-195.
[2] Jeśmanowicz L. Several remarks on Pythagorean numbers[J]. Wiadom Mat,1955,1:196-202.
[3] Miyazaki T. Generallizatioins of classical results on Jeśmanowicz' conjecture concerning Pythagorean triples[J]. J Number Theory,2013,133:583-595.
[4] Deng M J,Cohen G L. On the conjecture of Jeśmanowicz concerning Pythagorean triples[J]. Bull Austral Math Soc,1998,57:515-524.
[5] Yang Z J,Tang M. On the diophantine equation $(8n)^x+(15n)^y=(17n)^z$[J]. Bull Austral Math Soc,2012,86:348-352.
[6] Sun C F,Cheng Z. A conjecture of Jeśmanowicz' concerning Pythangorean triples[J]. Adv Math,2014,43:267-275.
[7] Le M H. A note on Jeśmanowicz' conjecture concerning Pythangorean triples[J]. Bull Austral Math Soc,1999,59:477-480.
[8] Deng M J. A note on the Diophantine equation $(na)^x+(nb)^y=(nc)^z$[J]. Bull Austral Math Soc,2014,89:316-321.

[责任编辑:丁　蓉]