带 BB 步长的自适应投影法解广义纳什均衡问题

毕培培,徐玲玲,韩德仁

(南京师范大学数学科学学院,江苏省大规模复杂系统数值模拟重点实验室,南京 210023)

[摘要] 广义纳什均衡问题是一种非合作博弈,其每个竞争者的策略集和目标函数都要依靠其他竞争者的策略. 它在经济学、管理科学及交通运输等领域都有广泛的应用,但如何有效地求解广义纳什均衡问题仍然是备受关注的课题. 本文提出了带有 BB 步长的自适应投影法求解广义纳什均衡问题:首先,把广义纳什均衡问题转化成拟变分不等式问题,然后把 BB 步长推广到求解拟变分不等式问题上,并在函数余强制条件下证明了算法的全局收敛性. 数值结果进一步说明该方法的有效性.

[关键词] 广义纳什均衡问题,拟变分不等式,投影法,BB 步长,收敛性

[中图分类号]O242 [文献标志码]A [文章编号]1001-4616(2014)04-0031-10

A Self-Adaptive Projection Method with the BB-Step Sizes for Solving Generalized Nash Equilibrium Problems

Bi Peipei,Xu Lingling,Han Deren

(Jiangsu Key Laboratory for NSLSCS,School of Mathematical Sciences,Nanjing Normal University,Nanjing 210023,China)

Abstract: The generalized Nash equilibrium problem(GNEP) is a noncooperative game in which the strategy set of each player, as well as his payoff function, depend on the rival players' strategies. It can be widely used in economics, management sciences and traffic assignment, but how to effective solve the generalized Nash equilibrium problem is still a subject of concern. In this paper, we present a self-adaptive projection method with the BB-step sizes for solving generalized Nash equilibrium problems: First, we give the reformulation of a generalized Nash equilibrium. Then, we extend the BB-step sizes to the QVI formulation of the GNEP, we adopt them in projection methods, and prove that under the condition that the underlying function is co-coercive, the sequence generated by the method converges to a solution of the quasi-variational inequality problem globally. Some preliminary computational results are reported, which illustrate that the new method is efficient.

Key words: generalized nash equilibrium problem, quasi-variational inequality (QVI), projection method, BB-step sizes, convergence

广义纳什均衡问题(GNEP)作为非合作博弈问题中最核心的概念[1],因其在经济学、管理科学及交通运输等领域的广泛的应用[2,3-5],引起了众多的关注. 然而,Pang 和 Fukushima 在文献[6]中指出,目前针对广义纳什均衡问题的算法研究处于初级阶段,如何有效地求解广义纳什均衡问题成为备受关注的课题. 目前已有的求解广义纳什均衡问题的方法中大致分为两类:一类是利用 gap 函数[7],Nikaido-Isoda 函数[8],惩罚函数[9]及参数变分不等式[10]将广义纳什均衡问题转化为最优化问题或者变分不等式(VI)[11]求解,另一类是将 GNEP 转化成拟变分不等式(QVI),进而利用投影算法和牛顿法[12]来进行求解.

投影法是求解凸规划和变分不等式最经典的方法之一. 它具有易实施,储存少,保稀疏的优点. 常见的投影法有:基本投影法[13],外梯度法[14],超平面投影法,自适应投影法及预测校正投影法[2]等,这些方法大大提高了计算效率.

本文首先将 GNEP 问题转化成 QVI 问题,采用了一个新的步长即 BB 步长,设计了一种改进的自适应

收稿日期:2013-09-16.

基金项目:国家自然科学基金(11071122)、江苏省自然科学基金(BK2009397)、江苏省高校自然科学研究项目(13KJD110007).

通讯联系人:徐玲玲,博士,讲师,研究方向:最优化理论与算法. E-mail:xulingling@ njnu. edu. cn

投影算法. 在余强制的条件下,证明了该算法的全局收敛性,最后的数值结果验证了新方法的可靠性与有效性.

1　问题描述

广义纳什均衡是非合作博弈论中一类重要的问题:假设有 N 个参与者,第 $i(i\in\{1,\cdots,N\})$ 个参与者的决策变量记为 $\boldsymbol{x}^i\in R^{n_i}$,将所有参与者的决策变量所组成的向量记为 $\boldsymbol{x}:=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}^1\\ \vdots\\ \boldsymbol{x}^N\end{pmatrix}$,其中维数 $n=\sum\limits_{i=1}^{N} n_i$. 向量 $\boldsymbol{x}^{-i}$ 表示除参与者 i 之外的所有参与者的决策变量所构成的向量. 为方便讨论,我们有时也用 $(\boldsymbol{x}^i;\boldsymbol{x}^{-i})$ 代替 $\boldsymbol{x}$. 记第 $i(i\in\{1,\cdots,N\})$ 个参与者的可行决策集为 $X_i\subseteq R^{n_i}$,所有参与者所构成的可行策略集为 $X=\prod\limits_{j\in\mathbf{N}} X^j\subseteq R^n$. $X^{-i}=\prod\limits_{j\in\mathbf{N},j\neq i} X^j$ 表示除参与者 i 之外的所有参与者所构成的可行决策集. 在 GNEP 中,每个参与者 i 的目标是选取自己的策略 $\boldsymbol{x}^i$ 以极小化其价值函数 u^i,即

$$\min_{\boldsymbol{x}^i\in R^{n_i}}\quad u^i(\boldsymbol{x}^i,\boldsymbol{x}^{-i}),\quad \forall\,\boldsymbol{x}^i\in K^i(\boldsymbol{x}^{-i}),\tag{1}$$

其中 $K^i:X^{-i}\to X^i$ 是一个点到集合的映射,表示参与者 i 受其他参与者所做的决策影响,则

$$K^i(\boldsymbol{x}^{-i})\subseteq X^i,\quad \forall\,\boldsymbol{x}^{-i}\in X^{-i}.$$

记

$$K(\boldsymbol{x})=\prod_{i\in\mathbf{N}} K^i(\boldsymbol{x}^{-i}).\tag{2}$$

我们用 $S_i(\boldsymbol{x}^{-i})$ 表示问题(1)的解集,若向量 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 满足

$$\bar{\boldsymbol{x}}^i\in S_i(\boldsymbol{x}^{-i}),\quad \forall\, i\in\{1,\cdots N\},$$

则称 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 为广义 Nash 均衡点. $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是广义纳什均衡问题的解当且仅当

$$\bar{\boldsymbol{x}}=(\bar{\boldsymbol{x}}^1,\bar{\boldsymbol{x}}^2,\cdots\bar{\boldsymbol{x}}^N)\in X,$$

且满足

$$\bar{\boldsymbol{x}}^i\in K^i(\bar{\boldsymbol{x}}^{-i}),\quad \forall\, i\in\{1,\cdots N\},$$

$$u^i(\bar{\boldsymbol{x}})\leqslant u^i(\boldsymbol{y}^i,\bar{\boldsymbol{x}}^{-i}),\quad \forall\,\boldsymbol{y}^i\in K^i(\bar{\boldsymbol{x}}^{-i}),\quad i=1,\cdots N.$$

假设每个可行策略集 X_i 都是凸集,价值函数 $u^i(\cdot,\boldsymbol{x}^{-i})$ 是连续可微的凸函数,$K^i(\boldsymbol{x}^{-i})\subseteq X^i$ 是闭凸集,则求解(1)等价于求解一个拟变分不等式问题[5],即找一点 $\bar{\boldsymbol{x}}^i\in K^i(\bar{\boldsymbol{x}}^{-i})$,使得

$$(\boldsymbol{y}^i-\bar{\boldsymbol{x}}^i)^{\mathrm{T}}\nabla_{\boldsymbol{x}^i}u^i(\bar{\boldsymbol{x}}^i,\bar{\boldsymbol{x}}^{-i})\geqslant 0,\quad \forall\,\boldsymbol{y}^i\in K^i(\bar{\boldsymbol{x}}^{-i}).$$

根据(2)的定义,$\bar{\boldsymbol{x}}$ 是广义纳什均衡点的充要条件是 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是如下拟变分不等式的解:即 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 满足

$$(\mathrm{QVI})\quad (\boldsymbol{y}-\bar{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}F(\bar{\boldsymbol{x}})\geqslant 0,\quad \forall\,\boldsymbol{y}\in K(\bar{\boldsymbol{x}}),\tag{3}$$

其中

$$F(\bar{\boldsymbol{x}})=(\nabla_{\boldsymbol{x}^i}u^i(\boldsymbol{x}^i,\bar{\boldsymbol{x}}^i))_{i=1}^N\in\mathbf{R}^n.$$

2　预备知识

在本文中,记 $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}$, $P_\Omega(\cdot)$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 到 Ω 上的投影映射,即

$$P_\Omega(\boldsymbol{x})=\operatorname{argmin}\{\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|\mid\forall\,\boldsymbol{y}\in\Omega\}.\tag{4}$$

当 Ω 是闭凸集时,$\mathbf{R}^n$ 中的任意点在 Ω 上的投影是唯一的. 若 Ω 是一些特殊集合,例如正卦限、盒子等,很容易计算 $P_\Omega(\cdot)$.

投影算子 $P_\Omega(\cdot)$ 有如下基本性质:

性质 1　若 $\Omega\subseteq\mathbf{R}^n$ 为一非空闭凸集,$P_\Omega(\cdot)$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 到 Ω 上的投影映射,则对任意 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$ 及任意 $z\in\Omega$,有

$$(\boldsymbol{x}-P_\Omega(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}(z-P_\Omega(\boldsymbol{x}))\leqslant 0.$$

定义 1　设 $\boldsymbol{F}:\Omega\to\mathbf{R}^n$,对 $\forall\,\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^n$ 和 $\alpha>0$,我们定义

$$\boldsymbol{u}(\alpha):=P_{\Omega}(\boldsymbol{u}-\alpha\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})),\quad \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u},\alpha)=\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}(\alpha).$$

$\boldsymbol{u}(\alpha)$,$\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u},\alpha)$与 QVI 的解有下列关系:

引理 1 对$\forall\alpha>0$,$\boldsymbol{u}^*$是 QVI 的解$\Leftrightarrow\boldsymbol{u}^*:=P_{K(\boldsymbol{u}^*)}(\boldsymbol{u}^*-\alpha\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}^*))$.

引理 2 $\forall\alpha>0$,$\boldsymbol{u}^*$是 QVI 的解$\Leftrightarrow\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}^*,\alpha)=0$.

$\|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u},\alpha)\|$可以看作是点$\boldsymbol{u}$与解$\boldsymbol{u}^*$的度量函数,因此在迭代算法中,误差界$\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u},\alpha)$常作为算法的终止条件. $\|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u},\alpha)\|$有以下性质:

性质 2[2] 对$\forall\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^n$,$\alpha_2\geqslant\alpha_1>0$,下列关系式成立:

$$\|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u},\alpha_2)\|\geqslant\|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u},\alpha_1)\|,\quad \frac{\|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u},\alpha_2)\|}{\alpha_2}\leqslant\frac{\|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u},\alpha_1)\|}{\alpha_1}.$$

性质 3[2] 对$\forall\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^n$,$\alpha>0$,下列不等式成立:

$$\min\{1,\alpha\}\|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u},1)\|\leqslant\|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u},\alpha)\|\leqslant\max\{1,\alpha\}\|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u},1)\|.$$

性质 4 对$\forall\alpha_l>0$,$\alpha>0$,$\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^n$有

$$\min\{1,\frac{\alpha_l}{\alpha}\}\|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u},\alpha)\|\leqslant\|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u},\alpha_l)\|\leqslant\max\{1,\frac{\alpha_l}{\alpha}\}\|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u},\alpha)\|.$$

定义 2 设f是集合$\Omega\subseteq\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$的映射,则称

(a)f在Ω上是单调的,如果f满足

$$(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})^{\mathrm{T}}(f(\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{v}))\geqslant0,\quad\forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\Omega;$$

如果上式不等号严格成立,则称f在Ω上是严格单调的;

(b)f在Ω上是强单调的,如果存在常数$\mu>0$,使得f满足

$$(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})^{\mathrm{T}}(f(\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{v}))\geqslant\mu\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|^2,\quad\forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\Omega;$$

(c)f在Ω上是伪单调的,如果f满足

$$(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})^{\mathrm{T}}f(\boldsymbol{v})\geqslant0\Rightarrow(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})^{\mathrm{T}}f(\boldsymbol{u})\geqslant0,\quad\forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\Omega;$$

(d)f在Ω上是余强制的,如果存在常数$\mu>0$,使得f满足

$$(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})^{\mathrm{T}}(f(\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{v}))\geqslant\mu\|f(\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{v})\|^2,\quad\forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\Omega.$$

根据上述定义可知一个强单调算子必定是严格单调的,一个严格单调的算子必定是单调的,单调的算子又必定是伪单调的;而一个余强制的算子肯定是单调的,但不一定是严格单调的.

本文中,我们采用 BB 步长改进自适应的投影算法,有关 BB 步长可以追溯到 1988 年 Barzilai 和 Borwein 在文献中[15]提出的 BB 法. 带有 BB 步长的投影算法中有下列迭代格式:

$$\bar{\boldsymbol{x}}_{k+1}=P_{K(\boldsymbol{x}_k)}(\boldsymbol{x}_k-\alpha_{k+1}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k)),$$

其中α_{k+1}可以有以下两种选择:

$$\alpha_{k+1}^1=\frac{\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}_{k-1}\|^2}{(\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}_{k-1})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k)-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_{k-1}))},\tag{BB-1}$$

$$\alpha_{k+1}^2=\frac{(\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}_{k-1})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k)-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_{k-1}))}{\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k)-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_{k-1})\|^2}.\tag{BB-2}$$

BB 法的全局收敛性仍然是一个公开的问题,对于一般的问题至今还没有收敛结果,部分特殊问题的收敛结果可参见文献[15-17]. 为了保证算法的全局收敛性,我们将 BB 方法与非单调线搜索结合使用.

非单调线搜索的方法为:选择α_k满足

$$f(\boldsymbol{x}_k+a_k\boldsymbol{d}_k)\leqslant\max_{0\leqslant j\leqslant m(k)}f(\boldsymbol{x}_{k-j})+\rho a_k\boldsymbol{g}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_k.\tag{5}$$

$\rho\in(0,1)$,$m(0)=0$,$0\leqslant m(k)\leqslant\min[m(k-1)+1,M]$,$M>0$,一般情况下,非单调线搜索效果不错,但存在一些缺点,比如:数值结果的好坏与M的取值有关,而如何选取合适的M非常困难;迭代过程中需要储存至少$m(k)$个函数值.

在整篇文章中,我们作如下假设:

(A1)令$S^*=\{\boldsymbol{u}\in S|(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})\geqslant0,\forall\boldsymbol{v}\in\bar{S}\}$,其中$S=\bigcap_{\boldsymbol{u}\in X}K(\boldsymbol{u})$和$\bar{S}=\bigcup_{\boldsymbol{u}\in X}K(\boldsymbol{u})$;

(A2)映射$F(\cdot)$是余强制的;

(A3)$K(\cdot)$在 X 上是连续的.

注 1　假设(A1)并不容易验证,但它是保证 QVI 的解集非空的一个充分条件.

3　算法及收敛性分析

算法 1　带有 BB 步长的自适应投影法.

S0.　给定 $l,c\in(0,1)$,$m=0$,$\rho\in(0,2)$,μ 为余强制常数,$\boldsymbol{x}_0\in X$. 令

$$\boldsymbol{x}_1=P_{K(\boldsymbol{x}_0)}(\boldsymbol{x}_0-\alpha_0F(\boldsymbol{x}_0)),\quad \gamma_0=\frac{\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}_1\|^2}{(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}_1)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_1))},\quad k:=0.$$

S1.　如果 $\|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x}_k,\alpha_k)\|\leqslant\varepsilon$ 则停止. 否则转 S2.

S2.　寻找最小的非负整数 i_k,使得 $\alpha_k=\gamma_k l^{i_k}$满足

$$\alpha_k\max_{0\leqslant j\leqslant\min(k,M)}\|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x}_{k-j},\alpha_{k-j})\|\leqslant\mu c\|\boldsymbol{x}_k-\bar{\boldsymbol{x}}_k\| \tag{6}$$

和

$$\|\boldsymbol{x}_k-\bar{\boldsymbol{x}}_k\|\leqslant\max_{0\leqslant j\leqslant\min(k,M)}\|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x}_{k-j},\alpha_{k-j})\|-\alpha_k\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k)-\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{x}}_k)\|, \tag{7}$$

其中

$$\bar{\boldsymbol{x}}_k=P_{K(\boldsymbol{x}_k)}(\boldsymbol{x}_k-\alpha_k\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k)).$$

S3.　计算

$$\boldsymbol{x}_{k+1}=P_{K(\boldsymbol{x}_k)}(\boldsymbol{x}_k-\beta_k(\boldsymbol{x}_k-\bar{\boldsymbol{x}}_k+\alpha_k\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{x}}_k))),$$

其中

$$\beta_k=\rho\left(1-\frac{\alpha_k^2}{\mu^2}-c\right)\frac{\|\boldsymbol{x}_k-\bar{\boldsymbol{x}}_k\|^2}{\|\boldsymbol{x}_k-\bar{\boldsymbol{x}}_k+\alpha_k\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{x}}_k)\|^2}.$$

S4.　令 $k:=k+1$,$m=\min(m+1;M)$,$\gamma_k=\dfrac{\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}_{k+1}\|^2}{(\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}_{k+1})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u}_k-\boldsymbol{u}_{k+1})}$,转 S2.

注 2　由(7)易得

$$\|\boldsymbol{x}_k-\bar{\boldsymbol{x}}_k\|\leqslant\max_{0\leqslant j\leqslant\min(k,M)}\|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x}_{k-j},\alpha_{k-j})\|,$$

进而

$$\|\boldsymbol{x}_k-\bar{\boldsymbol{x}}_k\|\leqslant\max_{0\leqslant j\leqslant\min(k,M)}\|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x}_{k-j},\alpha_{k-j})\|+\alpha_k\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k)-\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{x}}_k)\|. \tag{8}$$

引理 3　在假设(A1–A3)下,如果算法产生的迭代点 $\boldsymbol{x}_k$ 不是 QVI(3)的解,那么存在 $\tilde{\alpha}$,当 $0<\alpha_k<\tilde{\alpha}$,式(6)成立.

证明　假设式(6)不成立,即

$$\alpha_k\max_{0\leqslant j\leqslant\min(k,M)}\|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x}_{k-j},\alpha_{k-j})\|>\mu c\|\boldsymbol{x}_k-\bar{\boldsymbol{x}}_k\|. \tag{9}$$

由式(9)得到

$$\alpha_k>\frac{\mu c\|\boldsymbol{x}_k-\bar{\boldsymbol{x}}_k\|}{\max\limits_{0\leqslant j\leqslant\min(k,M)}\|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x}_{k-j},\alpha_{k-j})\|},$$

由于

$$\max_{0\leqslant j\leqslant\min(k,M)}\|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x}_{k-j},\alpha_{k-j})\|>0$$

及 $i_k\to\infty$,$\alpha_k\to0$,对上式取极限:

$$0=\lim_{i_k\to\infty}\alpha_k\geqslant\lim_{i_k\to\infty}\mu c\frac{\|\boldsymbol{x}_k-\bar{\boldsymbol{x}}_k\|}{\max\limits_{0\leqslant j\leqslant\min(k,M)}\|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x}_{k-j},\alpha_{k-j})\|}>0,$$

与式(9)矛盾.

综上所述,式(6)成立.

注 3

$$(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{v}))\leqslant\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|\,\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{v})\|. \tag{10}$$

由定义 2(d)和式(10),得

$$\mu\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{v})\|\leqslant\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|. \tag{11}$$

注 4 引理 3 表明，可以在有限步内找到 $\alpha_k>0$，使得式(6)和式(7)被满足. 另外，易证 $\inf\{\alpha_k\}=\alpha_{\min}>0$. 事实上，由式(6)和式(7)得：

$$\|\boldsymbol{x}_k-\bar{\boldsymbol{x}}_k\|\leqslant\frac{\mu c}{\alpha_k}\|\boldsymbol{x}_k-\bar{\boldsymbol{x}}_k\|-\alpha_k\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k)-\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{x}}_k)\|,$$

$$\alpha_k\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k)-\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{x}}_k)\|\leqslant\left(\frac{\mu c}{\alpha_k}-1\right)\|\boldsymbol{x}_k-\bar{\boldsymbol{x}}_k\|.$$

由 $\boldsymbol{F}$ 是余强制的和注 3 中的式(11)，可得

$$\frac{\mu c}{\alpha_k}-1\leqslant\frac{\alpha_k}{\mu}.$$

所以

$$\alpha_k\geqslant\alpha_{\min}:=\min\left\{\alpha_0,\frac{\mu\sqrt{1+4c}-\mu}{2}\right\}.$$

引理 4 若 $\|\boldsymbol{x}_k-\bar{\boldsymbol{x}}_k\|\neq0$，$\frac{\alpha_k^2}{\mu^2}+c<1$，则 $\|\boldsymbol{x}_k-\bar{\boldsymbol{x}}_k+\alpha_k\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{x}}_k)\|\neq0$.

证明 令 $\boldsymbol{x}^*\in S^*$，根据 S^* 的定义，$\boldsymbol{x}_k\in K(\boldsymbol{x}_{k-1})$ 及 $\bar{\boldsymbol{x}}_k\in K(\boldsymbol{x}_k)$，得

$$\langle\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*),\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}^*\rangle\geqslant0, \tag{12}$$

$$\langle\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*),\bar{\boldsymbol{x}}_k-\boldsymbol{x}^*\rangle\geqslant0, \tag{13}$$

由式(12)，式(13)和定义 2(c)得，

$$\langle\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k),\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}^*\rangle\geqslant0, \tag{14}$$

$$\langle\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{x}}_k),\bar{\boldsymbol{x}}_k-\boldsymbol{x}^*\rangle\geqslant0, \tag{15}$$

$\bar{\boldsymbol{x}}_k=P_{K(\boldsymbol{x}_k)}(\boldsymbol{x}_k-\alpha_k\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{x}}_k))$，$\boldsymbol{x}^*\in K(\boldsymbol{x}_k)$，且由性质 1，可得

$$\langle\boldsymbol{x}_k-\alpha_k\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k)-\bar{\boldsymbol{x}}_k,\bar{\boldsymbol{x}}_k-\boldsymbol{x}^*\rangle\geqslant0. \tag{16}$$

由式(6)，(7)，(14)，(15)，(16)得

$$\begin{aligned}&\langle\boldsymbol{x}_k-\bar{\boldsymbol{x}}_k+\alpha_k\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{x}}_k),\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}^*\rangle=\langle\boldsymbol{x}_k-\bar{\boldsymbol{x}}_k,\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}^*\rangle+\alpha_k\langle\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{x}}_k),\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}^*\rangle=\langle\boldsymbol{x}_k-\bar{\boldsymbol{x}}_k-\alpha_k\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k),\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}^*\rangle+\\&\alpha_k\langle\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k),\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}^*\rangle+\alpha_k\langle\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{x}}_k),\boldsymbol{x}_k-\bar{\boldsymbol{x}}_k\rangle+\alpha_k\langle\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{x}}_k),\bar{\boldsymbol{x}}_k-\boldsymbol{x}^*\rangle\geqslant\langle\boldsymbol{x}_k-\bar{\boldsymbol{x}}_k-\alpha_k\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k),\boldsymbol{x}_k-\bar{\boldsymbol{x}}_k\rangle+\alpha_k\langle\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{x}}_k),\boldsymbol{x}_k-\bar{\boldsymbol{x}}_k\rangle=\\&\|\boldsymbol{x}_k-\bar{\boldsymbol{x}}_k\|^2-\alpha_k\langle\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k)-\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{x}}_k),\boldsymbol{x}_k-\bar{\boldsymbol{x}}_k\rangle\geqslant\|\boldsymbol{x}_k-\bar{\boldsymbol{x}}_k\|^2-\alpha_k\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k)-\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{x}}_k)\|\,\|\boldsymbol{x}_k-\bar{\boldsymbol{x}}_k\|\geqslant\\&\|\boldsymbol{x}_k-\bar{\boldsymbol{x}}_k\|^2-\alpha_k\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k)-\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{x}}_k)\|\left(\max_{0\leqslant j\leqslant\min(k,M)}\|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x}_{k-j},\alpha_{k-j})\|-\alpha_k\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k)-\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{x}}_k)\|\right)=\\&\|\boldsymbol{x}_k-\bar{\boldsymbol{x}}_k\|^2-\alpha_k\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k)-\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{x}}_k)\|\max_{0\leqslant j\leqslant\min(k,M)}\|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x}_{k-j},\alpha_{k-j})\|+\alpha_k^2\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k)-\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{x}}_k)\|^2\geqslant\\&\|\boldsymbol{x}_k-\bar{\boldsymbol{x}}_k\|^2-\alpha_k\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k)-\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{x}}_k)\|\max_{0\leqslant j\leqslant\min(k,M)}\|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x}_{k-j},\alpha_{k-j})\|-\alpha_k^2\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k)-\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{x}}_k)\|^2\geqslant\\&\|\boldsymbol{x}_k-\bar{\boldsymbol{x}}_k\|^2-c\|\boldsymbol{x}_k-\bar{\boldsymbol{x}}_k\|^2-\frac{\alpha_k^2}{\mu^2}\|\boldsymbol{x}_k-\bar{\boldsymbol{x}}_k\|^2=\left(1-c-\frac{\alpha_k^2}{\mu^2}\right)\|\boldsymbol{x}_k-\bar{\boldsymbol{x}}_k\|^2,\end{aligned}$$

由 $\boldsymbol{x}_k\neq\bar{\boldsymbol{x}}_k$ 得，$\|\boldsymbol{x}_k-\bar{\boldsymbol{x}}_k+\alpha_k\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{x}}_k)\|\neq0$.

引理 5 由算法产生的序列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是有界的.

证明 令 $\boldsymbol{x}^*\in\boldsymbol{S}^*$，则由式(6)得

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{x}^*\|^2=\|P_{K(\boldsymbol{x}_k)}(\boldsymbol{x}_k-\beta_k(\boldsymbol{x}_k-\bar{\boldsymbol{x}}_k+\alpha_k\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{x}}_k)))-\boldsymbol{x}^*\|^2\leqslant\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}^*-\beta_k(\boldsymbol{x}_k-\bar{\boldsymbol{x}}_k+\alpha_k\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{x}}_k))\|^2=\\&\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}^*\|^2-2\beta_k\langle\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{x}_k-\bar{\boldsymbol{x}}_k+\alpha_k\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{x}}_k)\rangle+\beta_k^2\|\boldsymbol{x}_k-\bar{\boldsymbol{x}}_k+\alpha_k\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{x}}_k)\|^2\leqslant\\&\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}^*\|^2-2\left(1-c-\frac{\alpha_k^2}{\mu^2}\right)\beta_k\|\boldsymbol{x}_k-\bar{\boldsymbol{x}}_k\|^2+\beta_k^2\|\boldsymbol{x}_k-\bar{\boldsymbol{x}}_k+\alpha_k\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{x}}_k)\|^2=\\&\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}^*\|^2-\rho(2-\rho)\left(1-c-\frac{\alpha_k^2}{\mu^2}\right)^2\frac{\|\boldsymbol{x}_k-\bar{\boldsymbol{x}}_k\|^4}{\|\boldsymbol{x}_k-\bar{\boldsymbol{x}}_k+\alpha_k\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{x}}_k)\|^2}.\end{aligned}$$

所以，

$$\|\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{x}^*\|^2\leqslant\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}^*\|^2\leqslant\cdots\leqslant\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}^*\|^2, \tag{17}$$

则 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是有界的.

定理 1　算法产生的迭代序列$\{\boldsymbol{x}_k\}$的任意聚点是 QVI(3)的解.

证明　记$\{\boldsymbol{x}_k\}$是由算法产生的迭代序列,$\boldsymbol{x}^*\in S^*$,由式(17)知$\{\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}^*\|\}$是单调下降的有界序列,因此存在聚点.

首先证明$\{\bar{\boldsymbol{x}}_k\}$是有界的. 事实上,

$$\|\bar{\boldsymbol{x}}_k\|=\|P_{K(\boldsymbol{x}_k)}(\boldsymbol{x}_k-\alpha_k\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k))\|=\|P_{K(\boldsymbol{x}_k)}(\boldsymbol{x}_k-\alpha_k\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k))+\boldsymbol{x}^*-P_{K(\boldsymbol{x}_k)}\boldsymbol{x}^*\|\leqslant$$
$$\|\boldsymbol{x}^*\|+\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}^*-\alpha_k\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k)\|\leqslant\|\boldsymbol{x}^*\|+\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}^*\|+\|\alpha_k\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k)\|.$$

因为$\{\boldsymbol{x}_k\}$是有界的,$\boldsymbol{x}^*\in S^*$,由式(17)知$\{\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}^*\|\}$是单调下降的有界序列,所以$\{\bar{\boldsymbol{x}}_k\}$是有界的,也易得到$\{\|\boldsymbol{x}_k-\bar{\boldsymbol{x}}_k-\alpha_k\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{x}}_k)\|\}$是有界的. 因此,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\left(1-c-\dfrac{\alpha_k^2}{\mu^2}\right)^2\|\boldsymbol{x}_k-\bar{\boldsymbol{x}}_k\|^4}{\|\boldsymbol{x}_k-\bar{\boldsymbol{x}}_k+\alpha_k\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{x}}_k)\|^2}=0. \tag{18}$$

由式(18)得

$$\lim_{k\to\infty}\|\boldsymbol{x}_k-\bar{\boldsymbol{x}}_k\|=0. \tag{19}$$

令$\bar{\boldsymbol{x}}$是序列$\{\boldsymbol{x}_k\}$的一个聚点,则存在子列$\{\boldsymbol{x}_{k_t}\}_{k_t\in\chi}$收敛于$\bar{\boldsymbol{x}}$,其中$\chi\subseteq\{0,1\cdots\}$,即

$$\lim_{k_t\in\chi,t\to\infty}\boldsymbol{x}_{k_t}=\bar{\boldsymbol{x}}.$$

其次证明$\bar{\boldsymbol{x}}$是 QVI 问题的解. 首先证明$\bar{\boldsymbol{x}}\in K(\boldsymbol{x}_k)$. 由式(19)得

$$\lim_{k_t\in\chi,t\to\infty}\bar{\boldsymbol{x}}_{k_t}=\bar{\boldsymbol{x}}.$$

由于$K(\cdot)$是上半连续的,$\bar{\boldsymbol{x}}_k\in K(\boldsymbol{x}_k)$,可得$\bar{\boldsymbol{x}}\in K(\bar{\boldsymbol{x}})$. 记$\{\|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x}_k,\alpha_k)\|\}$相应的子序列为$\{\|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x}_{k_t},\alpha_{k_t})\|\}_{k_t\in\chi}$. 由注 4 知,$\inf\{\alpha_k\}=\alpha_{\min}>0$. 从性质 2,4 和式(19)得

$$\|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x}_{k_t},\alpha_{k_t})\|\leqslant\frac{\|\boldsymbol{x}_k-\bar{\boldsymbol{x}}_k\|}{\min\{1,\alpha_k/\alpha_{k_t}\}},$$

$$\lim_{k_t\in\chi,t\to\infty}\|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x}_{k_t},\alpha_{k_t})\|\leqslant\lim_{k_t\in\chi,t\to\infty}\frac{\|\boldsymbol{x}_k-\bar{\boldsymbol{x}}_k\|}{\min\{1,\alpha_k/\alpha_{k_t}\}}=0.$$

即

$$\lim_{k_t\in\chi,t\to\infty}\|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x}_{k_t},\alpha_{k_t})\|=0. \tag{20}$$

又因为$K(\cdot)$是下半连续的,所以对任意的$\boldsymbol{y}\in K(\bar{\boldsymbol{x}})$,存在$\{\boldsymbol{y}_k\}$使得$\boldsymbol{y}_k\in K(\boldsymbol{x}_k)$且$\lim\limits_{k_t\in\chi,t\to\infty}\boldsymbol{y}_{k_t}=\boldsymbol{y}$. 记

$$\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x}_{k_t},\alpha_{k_t})=\boldsymbol{x}_{k_t}-P_{K(\boldsymbol{x}_{k_t})}(\boldsymbol{x}_{k_t}-\alpha_{k_t}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_{k_t})),$$

于是

$$\langle\alpha_{k_t}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_{k_t})\|-\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x}_{k_t},\alpha_{k_t}),\boldsymbol{y}_{k_t}-\boldsymbol{x}_{k_t}+\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x}_{k_t},\alpha_{k_t})\rangle\geqslant0,$$

由性质 1 得,

$$\alpha_{k_t}\langle\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_{k_t}),\boldsymbol{y}_{k_t}-\boldsymbol{x}_{k_t}\rangle+\alpha_{k_t}\langle\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_{k_t}),\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x}_{k_t},\alpha_{k_t})\rangle-\langle\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x}_{k_t},\alpha_{k_t}),\boldsymbol{y}_{k_t}-\boldsymbol{x}_{k_t}\rangle-\|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x}_{k_t},\alpha_{k_t})\|^2\geqslant0,$$

令$t\to\infty$,$t\to\infty$,由$\{\boldsymbol{x}_{k_t}\}$,$\{\boldsymbol{y}_{k_t}\}$的有界性和式(20)及α_{k_t}的性质,得

$$(\boldsymbol{y}-\bar{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}F(\bar{\boldsymbol{x}})\geqslant0.$$

根据$\boldsymbol{y}$的任意性知$\bar{\boldsymbol{x}}$是 QVI 问题的解.

注 5　如果假设(A1-A2)成立. 令$\{\boldsymbol{x}_k\}$是由算法产生的. 如果$\boldsymbol{F}$在序列$\{\boldsymbol{x}_k\}$的聚点处是严格单调的,聚点为$\bar{\boldsymbol{x}}$,则

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\bar{\boldsymbol{x}}.$$

4　数值实验

为了说明新算法的有效性,本节将新算法和 ZQX 算法,HAN[18]的算法的数值试验结果进行比较. 在这一节,我们给出了一些计算结果和 3 个例子. 同时,我们将文献[2]中的算法(记作:ZQX)和文献[18]中的算法(记作:HAN),本文的算法(记作:BPP)进行比较. 所有的程序都用 MATLAB 语言编写,在整个实验

中,通过计算测试,在 ZQX 算法中参数设置 $\gamma=1$, $\iota=0.5$, $\mu=0.3$, $\rho=1.99$;在 HAN[18] 算法中取 $c=1$, $l=0.5$, $\mu=0.9$, $\rho=1.99$;本文的算法中 $\alpha_0=0.95$, $l=0.95$, $\rho=1.99$. 另外计算中我们设定最大迭代次数为 1 000 次,停机准则 $\varepsilon=10^{-6}$. "Iter"代表的是迭代次数,符号"-"表示超出了最大的迭代次数.

例 1 Stackelberg-Cournot-Nash 均衡问题[2]:考虑两个人的游戏,其中每个游戏者都选择一个介于 0 和 10 之间的数 x^i,并且它们的数字和少于或者等于 15. 目标函数 K^i 被定义为

$$u^1(x^1,x^2)=(x^1)^2+\frac{8}{3}x^1x^2-34x^1,$$

$$u^2(x^1,x^2)=(x^2)^2+\frac{5}{4}x^1x^2-24.25x^2,$$

$$K^1(x^2)=\{0\leqslant x^1\leqslant 10,x^1\leqslant 15-x^2\},$$

$$K^2(x^1)=\{0\leqslant x^2\leqslant 10,x^2\leqslant 15-x^1\}.$$

表 1 例 1 数值结果

Table 1 Numerical result of Example 1

初始迭代点	Iter			CPUS			近似解		
	ZQXA1	HAN	PBB-I	ZQXA1	HAN	PBB-I	ZQXA1	HAN	PBB-I
$(0,0)^T$	201	73	50	0.010	0.007	0.004	$(5;9)^T$	$(5;9)^T$	$(5;9)^T$
$(10;0)^T$	-	-	-	-	-	-	$(10;5)^T$	$(10;5)^T$	$(10;5)^T$
$(10;10)^T$	206	63	48	0.011	0.006	0.004	$(5;9)^T$	$(5;9)^T$	$(5;9)^T$
$(0;10)^T$	177	60	50	0.009	0.006	0.005	$(5;9)^T$	$(5;9)^T$	$(5;9)^T$
$(5;5)^T$	235	62	51	0.011	0.006	0.004	$(5;9)^T$	$(5;9)^T$	$(5;9)^T$
rand(2;1)	210	71	56	0.009	0.007	0.004	$(5;9)^T$	$(5;9)^T$	$(5;9)^T$

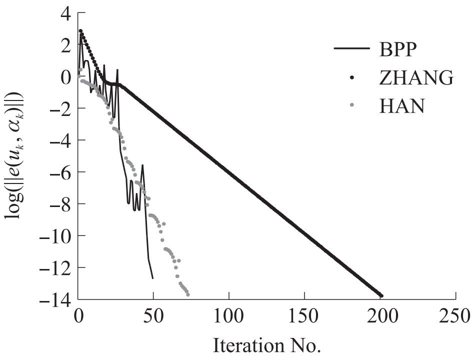

图 1 例 1,初始点为(0,10)^T

Fig. 1 Initial point of Example 1:(0,10)^T

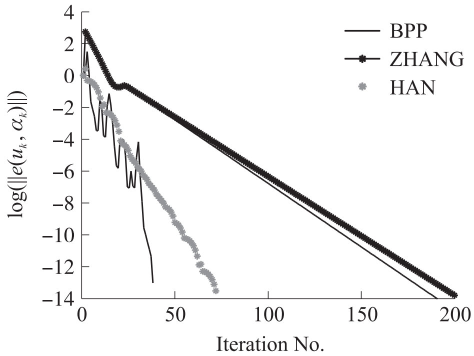

图 2 例 1,初始点为(5,5)^T

Fig. 2 Initial point of Example 1:(5,5)^T

例 2 在这个例子中,用

$$K^2(x^1)=\{2\leqslant x^2\leqslant 10\}$$

来替换例 1 中的

$$K^2(x^1)=\{0\leqslant x^2\leqslant 10,x^2\leqslant 15-x^1\}.$$

表 2 例 2 数值结果

Table 2 Numerical result of Example 2

初始迭代点	Iter.			CPUS			近似解		
	ZQXA1	HAN	PBB-I	ZQXA1	HAN	PBB-I	ZQXA1	HAN	PBB-I
$(0,0)^T$	244	72	39	0.0190	0.007	0.004	$(5;9)^T$	$(5;9)^T$	$(5;9)^T$
$(10;0)^T$	247	68	49	0.018	0.007	0.004	$(10;5)^T$	$(10;5)^T$	$(10;5)^T$
$(10;10)^T$	184	56	50	0.014	0.006	0.005	$(5;9)^T$	$(5;9)^T$	$(5;9)^T$
$(0;10)^T$	177	60	54	0.014	0.006	0.005	$(5;9)^T$	$(5;9)^T$	$(5;9)^T$
$(5;5)^T$	235	62	39	0.017	0.006	0.004	$(5;9)^T$	$(5;9)^T$	$(5;9)^T$
rand(2;1)	251	67	48	0.018	0.007	0.005	$(5;9)^T$	$(5;9)^T$	$(5;9)^T$

例 3 考虑 Stackelberg-Cournot-Nash 变形的均衡问题,来自[2]中的例 2,其数学模型可描述如下:考虑一个垄断的市场,有 m 个公司在非合作的形势下提供同一个性质的产品,令 p:$\mathrm{int}R_+\to\mathrm{int}R_+$ 为分配给市

场的产品总量为 Q 时,顾客购买产品的单位价格. 函数 p 被称为逆需求曲线. 价值函数 f_i , $i=1,2,\cdots m$ 用来表示产品的价值. 函数 $f_i(i=1,2,\cdots,m)$ 和 p 的表达式如下:

$$f_i(x^i)=c_ix^i+\frac{\beta_i}{\beta_{i+1}}\tau_i^{-\frac{1}{\beta_i}}(x^i)^{\frac{1+\beta_i}{\beta_i}}, \tag{21}$$

其中 $c_i,\beta_i,\tau_i,i=1,2,\cdots,m$ 是给定的参数;

$$p(Q)=5\ 000^{\frac{1}{\eta}}Q^{-\frac{1}{\eta}}, \tag{22}$$

其中 η 是一个需求弹性函数. 我们考虑垄断市场的纳什均衡问题,产品 x^i 是相互独立的且 $x^i\in X_i$, $i=1,2,\cdots,m$,它们有一个有界的公共约束:

$$\sum_{i=1}^{m}x^i\leqslant N.$$

广义纳什均衡点 $(x^{*1},x^{*2},\cdots,x^{*m})^{\mathrm{T}}$ 满足 $x^{*i}\in X_i$, $i=1,2,\cdots,m$,且 x^{*i} 是最优化问题

$$\min_{x^i\in\bar{X}_i}\quad f_i(x^i)-x^ip\left(x^i+\sum_{j=1,j\neq i}^{m}x^{*j}\right), \tag{23}$$

的解,其中

$$\bar{X}_i=\left\{x^i\mid x^i\in X_i,\quad x^i+\sum_{j=1,j\neq i}^{m}x^{*j}\right\}\leqslant N.$$

在式(23)中,每个公司在受制于它自己的产品约束和公共产品约束的前提下极小化自己的成本. 我们将问题转化成等价的 QVI. 在这个实验中,我们取 $m=5$. 定义函数 F 为

$$F^i(x)=c_i+\left(\frac{x^i}{\tau_i}\right)^{\frac{1}{\beta_i}}+\left(\frac{5\ 000}{Q}\right)^{\frac{1}{\eta}}\left(\frac{x^i}{\eta Q}-1\right),\quad i=1,\cdots,5,$$

其中 $Q=\sum_{i=1}^{5}x^i$. 所有公司产品数量的下界为 1、上界为 150,即,

$$X_i=\{x^i\mid 1\leqslant x^i\leqslant 150\},\quad i=1,\cdots,5.$$

产品价值函数参数见表 3. 表 4 和表 5 中的算法结果是取 $\eta=1.1$ 和 $\eta=1.3$, $N=700$ 时的解. 与其他算法相比,我们的算法用较少的迭代、较短的时间获得了同精度的解,同时我们也给出了余差函数的图像,从图像上很清晰地看到我们方法的有效性.

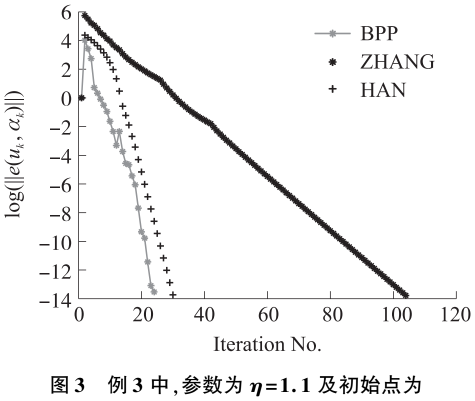

图 3　例 3 中,参数为 η=1.1 及初始点为 1 * ones(5,1)的数值结果

Fig. 3　Numerical result of Example 3 when η=1.1 and initial point is 1 * ones(5,1)

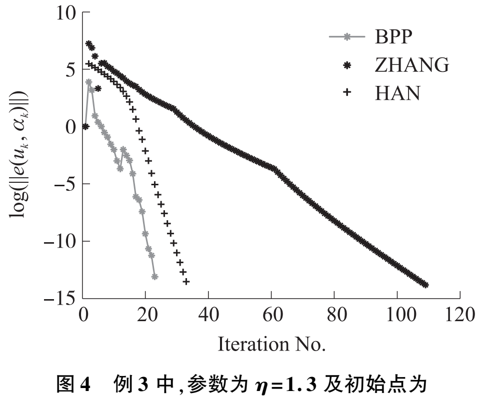

图 4　例 3 中,参数为 η=1.3 及初始点为 1 * ones(5,1)的数值结果

Fig. 4　Numerical result of Example 3 when η=1.3 and initial point is 1 * ones(5,1)

表 3　价值函数的参数

Table 3　Parameters of cost function

	Firm 1	Firm 2	Firm 3	Firm 4	Firm 5
c_i	10	8	6	4	2
τ_i	5	5	5	5	5
β_i	1.2	1.1	1.0	0.9	0.8

表 4　例 3 中参数 $\eta=1.1$ 的结果

Table 4　Result when $\eta=1.1$ of Example 3

初始迭代点	Iter.			CPUS		
	ZQXA1	HAN	PBB-I	ZQXA1	HAN	PBB-I
50 * ones(5;1)	86	19	16	0.043	0.012	0.016
10 * ones(5;1)	99	21	18	0.046	0.016	0.015-
5 * ones(5;1)	102	25	20	0.048	0.016	0.015
1 * ones(5;1)	109	33	23	0.053	0.023	0.016
1 * rand(5;1)	110	36	23	0.053	0.023	0.016
10 * rand(5;1)	101	25	20	0.047	0.017	0.015

表 5　例 3 中参数 $\eta=1.3$ 的结果

Table 5　Result when $\eta=1.3$ of Example 3

初始迭代点	Iter.			CPUS		
	ZQXA1	HAN	PBB-I	ZQXA1	HAN	PBB-I
50 * ones(5;1)	89	20	18	0.043	0.012	0.016
10 * ones(5;1)	95	20	17	0.046	0.016	0.015
5 * ones(5;1)	98	24	19	0.048	0.016	0.016
1 * ones(5;1)	104	30	19	0.053	0.017	0.015
1 * rand(5;1)	105	33	24	0.053	0.017	0.015
10 * rand(5;1)	98	23	17	0.047	0.016	0.015

表 6　例 3 中参数 $\eta=1.1$ 和 $\eta=1.3$ 的结果

Table 6　Result when $\eta=1.1$ and $\eta=1.3$ of Example 3

	Firm 1	Firm 2	Firm 3	Firm 4	Firm 5
$\eta=1.1$	36.932 5	41.818 1	43.706 6	42.659 2	39.179 010
$\eta=1.3$	21.217 9	28.081 4	32.344 8	33.790 2	32.663 9

5　结论

文中我们提出了一种带有 BB 步长的自适应投影法来求解广义纳什均衡问题.我们首先将此优化问题转化为求解拟变分不等式问题,结合了投影法、BB 法及非单调的线搜索思想,并且考虑一些参数的选取,在函数余强制的条件下,我们分析了新算法的全局收敛性,进一步的数值结果也充分表明了算法的可行性和优越性.

对于求解拟变分不等式,ZHANG 已提出了自适应投影法,随后 HAN 提出了改进步长的思想,并得到了很好的结果,而我们的思想就是应用 BB 步长,采取同样的搜索方向.HAN[18] 在原有的基础上,又改进了方向,取得了更好的结果.由此启发我们是不是在新方法的基础上,改进步长的同时也改进方向,是否也能取得很好的结果呢?这个有待进一步的研究,我们将上述问题和算法之间的关系整理为如图 5.

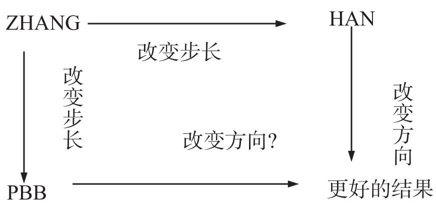

图 5　三种方法的关系

Fig. 5　Relation between the three algorithms

[参考文献]

[1]　Harker P. Generalized Nash games and quasi-variationalinequalities[J]. Eur J Oper Res,1991,54(1):81-94.

[2]　Zhang J Z,Qu B,Xiu N H. Some projection-like methods for the generalized Nash equilibria[J]. Comput Optim Appl,2010,45(1):89-109.

[3]　Contreras J,Krawczyk J,Klusch M. Numerical solutions to Nash-Cournotequilibria in coupledconstraint electricity markets[J]. IEEE Trans Power Syst,2004,19(1):195-206.

[4]　刘肇军,刘宗谦,冯素芬.有限策略型博弈中的相关策略与具有合约的博弈及其均衡[J].南京师大学报:自然科学版,2008,31(3):33-38.

[5]　Facchinei F, Pang J S. Finite-Dimensional Variational Inequality and Complementarity Problems[M]. New York:

Springer. 2003.

[6] Fukushima M,Pang J S. Quasi-variational inequalities,generalized Nash equilibria,and multieader-follower games[J]. Comput Manag Sci,2005,2(1):21-56.

[7] Kubota K,Fukushim M. Gap function approach to the generalized Nash equilibrium problem[J]. J Opt Theory Appl,2010,144(3):511-531.

[8] Heusinger A Von,Kanzow C. Optimization reformulations of the generalized Nash equilibriumproblem using Nikaido-Isoda-type functions[J]. Comput Optim Appl,2009,43(3):353-377.

[9] Fukushima M. Restricted generalized Nash equilibria and controlled penalty algorithm[J]. Comput Manag Sci,2011,8(3):201-218.

[10] Nabetani K,Tseng P,Fukushima M. Parametrized variational inequality approaches to generalized Nash equilibrium problems with shared constraints[J]. Comput Optim Appl,2011,48(3):423-452.

[11] Dreves A,Kanzow C. Nonsmooth optimization reformulations characterizing all solutions of jointly convexgeneralized Nash equilibrium problems[J]. Comput Optim Appl,2011,50(1):23-48.

[12] Heusinger A Von,Kanzow C,Fukushima M. Newton's method for computing a normalized equilibrium in the generalized Nash game through fixed point formulation[J]. Math Program,2012,132(1/2):99-123.

[13] Goldstein A. Convex programming in Hilbert space[J]. Bull Amer Math Soc,1964,70:709-710.

[14] Khobotov E. Modification of the extragradient method for solving variational inequalities and certain optimization problems [J]. USSR Comput Math Math Phys,1987,27(5):120-127.

[15] Barzilai J,Borwein J M. Two point step size gradient method[J]. IMAJ Numer Anal,1988,8(1):141-148.

[16] Dai Y H,Liao L Z. R-linear convergence of the Barzilai and Borwein gradient method[J]. IMAJ Numer Anal,2002,22(1):1-10.

[17] Marcos R. On the Barzilai and Borwein choice of steplength for the gradient method[J]. IMAJ Numer Anal,1993,13(3):321-326.

[18] Han D R,Zhang H C,Gang Q,et al. An improved two-step method for solving generalized Nash equilibrium problems[J]. Eur J Oper Res,2012,216:613-623.

[责任编辑:丁　蓉]

(上接第 30 页)

[参考文献]

[1] Sierpiński W. On the Diophantine equation $3^x+4^y=5^z$[J]. Wiadom Mat,1955,1:194-195.

[2] Jeśmanowicz L. Several remarks on Pythagorean numbers[J]. Wiadom Mat,1955,1:196-202.

[3] Miyazaki T. Generallizatioins of classical results on Jeśmanowicz' conjecture concerning Pythagorean triples[J]. J Number Theory,2013,133:583-595.

[4] Deng M J,Cohen G L. On the conjecture of Jeśmanowicz concerning Pythagorean triples[J]. Bull Austral Math Soc,1998,57:515-524.

[5] Yang Z J,Tang M. On the diophantine equation $(8n)^x+(15n)^y=(17n)^z$[J]. Bull Austral Math Soc,2012,86:348-352.

[6] Sun C F,Cheng Z. A conjecture of Jeśmanowicz' concerning Pythangorean triples[J]. Adv Math,2014,43:267-275.

[7] Le M H. A note on Jeśmanowicz'conjecture concerning Pythangorean triples[J]. Bull Austral Math Soc,1999,59:477-480.

[8] Deng M J. A note on the Diophantine equation $(na)^x+(nb)^y=(nc)^z$[J]. Bull Austral Math Soc,2014,89:316-321.

[责任编辑:丁　蓉]