

具有标准发生率和脉冲干扰的 SIRS 传染病模型分岔分析

蒋贵荣, 林 娇, 刘苏雨

(桂林电子科技大学数学与计算科学学院, 广西 桂林 541004)

[摘要] 本文同时考虑生育脉冲、垂直传染和脉冲治疗, 建立一个带有标准发生率的 SIRS 传染病模型, 从理论分析和数值模拟方面研究了 SIRS 传染病模型的动力学性质. 首先利用 Floquet 乘子理论, 证明了系统的平凡解、无病周期解和地方病周期解的存在性和稳定性; 接着利用庞加莱映射、中心流形定理和分岔理论详细讨论了跨临界分岔和 flip 分岔, 而且给出了能很好验证理论分析的数值结果; 最后给出了生物学的解释和主要的结论.

[关键词] SIRS 模型, 标准发生率, 跨临界分岔, flip 分岔

[中图分类号] O175.1 [文献标志码] A [文章编号] 1001-4616(2015)01-0001-07

The Bifurcation Analysis of an SIRS Epidemic Model with Standard Incidence and Impulsive Perturbations

Jiang Guirong, Lin Jiao, Liu Suyu

(School of Mathematics and Computing Science, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, China)

Abstract: Birth pulse, vertical transmission, and pulse treatment are considered in an SIRS model. The dynamical behavior of an SIRS epidemic model with standard incidence is discussed by means of both theoretical and numerical ways. Firstly, by using Floquet theory, the existence and stability of the trivial solution, infection-free periodic solution, and epidemic periodic solution are proved. Secondly, the Poincaré map, center manifold theorem, and bifurcation theorem are used to discuss transcritical bifurcation and flip bifurcation. The numerical results, which are illustrated with an example, are in good agreement with the theoretical analysis. Finally, biological explanations and main conclusions are given.

Key words: SIRS model, standard incidence, transcritical bifurcation, flip bifurcation

传染病给人类和动物的生存带来了巨大的灾难, 控制传染病一直是当今世界的一个重大问题. 脉冲现象在传染病的传播过程中普遍存在, 目前已有大量的有关脉冲现象的数学模型被用来研究各种各样的传染病问题^[1,2].

传染病动力学是在理论上对传染病进行分析研究的一种重要方法^[3]. 在经典的传染病模型中, 以疾病的发生率为双线性^[4]来研究各种传染病的传播机制和动力学行为. 但当种群人口很大时, 与人口成正比的接触率将不符合实际. Anderson R 和 May R^[5]通过研究证实, 标准发生率比双线性发生率更符合实际; Hua^[6]等研究了一类带有标准发生率的 SIRS 传染病模型; 郭中凯^[7]等人研究了具有脉冲免疫的 SEIR 传染病模型的稳定性; Fang 和 Qi^[8]对带有非线性发生率的 SEIR 传染病模型进行了分析. 但这些文献都没有讨论带有标准发生率 $\beta SI/N$ 的传染病模型且脉冲生育和脉冲接种不同时发生的动力学行为.

因此, 本文研究一类带有标准发生率 $\beta SI/N$ 、生育脉冲、垂直传染和脉冲接种的 SIRS 传染病模型, 得到了系统的无病周期 $2T$ -解和平凡解的存在性及稳定性的条件, 并讨论了解的跨临界分岔和 flip 分岔.

收稿日期: 2014-03-16.

基金项目: 国家自然科学基金(11162004)、广西自然科学基金(2012GXNSFAA053006)、广西研究生教育创新计划项目(YCSZ2014143).

通讯联系人: 蒋贵荣, 博士, 教授, 研究方向: 非光滑动力系统动力学分析. E-mail: grjiang9@163.com

1 模型描述

设 $S(t)$ 、 $I(t)$ 和 $R(t)$ 分别为 t 时刻的易感者、感染者和移出者的数量,发病率 $\beta C(N)SI/N$ 是指单位时间内新病例的数量,在传染病学研究中有着重很重要的作用. 本文讨论标准发生率 $\beta SI/N$, 其中 $N=S+I+R$ 是总的人口数量;取脉冲生育为 $\Delta N=(b-cN)N$, 其中 b 是最大出生率;以及假设每一次接种疫苗,接种人群占易感人群的比例为常数 p , 其中 $0 < p < 1$. 现把脉冲出生、脉冲治疗和垂直传染引入到传染病模型中,假设脉冲出生和垂直传染发生在 $t=(2n-1)T$ 时刻,脉冲接种以接种率 p 发生在 $t=2nT(n \in \mathbf{N}_+)$ 时刻,从而得到下面的 SIRS 传染病模型:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{S} = -\frac{\beta SI}{N} - \sigma S + \delta R \\ \dot{I} = \frac{\beta SI}{N} - (\gamma + \sigma) I \\ \dot{R} = \gamma I - (\delta + \sigma) R \end{array} \right\}, \quad t \neq nT, \\ \left\{ \begin{array}{l} \Delta S = (b-cN)(S+R) \\ \Delta I = (b-cN)I \\ \Delta R = 0 \end{array} \right\}, \quad t = (2n-1)T, \\ \left\{ \begin{array}{l} \Delta S = -pS \\ \Delta I = 0 \\ \Delta R = pS \end{array} \right\}, \quad t = 2nT,$$
(1)

其中 $0 \leq \sigma \leq 1$ 是自然死亡率, γ 是感染个体的康复率, δ 是失去免疫力的康复者再次转化为易感者的比率.

2 无病周期 $2T$ -解和平凡解的存在性和稳定性

考虑无病情形,种群不存在染病者,即 $I(t) = 0 (t \geq 0)$, 系统(1)变为:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{N} = -\sigma N \\ \dot{R} = -(\delta + \sigma) R \end{array} \right\}, \quad t \neq nT, \\ \left\{ \begin{array}{l} \Delta N = (b-cN)N \\ \Delta R = 0 \end{array} \right\}, \quad t = (2n-1)T, \\ \left\{ \begin{array}{l} \Delta N = 0 \\ \Delta R = p(N-R) \end{array} \right\}, \quad t = 2nT.$$
(2)

系统(2)的初始点为 (N_k, R_k) , 轨线从这个初始点开始,经过 $2T$ 时刻,在脉冲效应下到达点 (N_{k+1}, R_{k+1}) , 因此得到下面的离散映射:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{k+1} = (1+b-cN_k e^{-\sigma T}) N_k e^{-2\sigma T}, \\ R_{k+1} = p(1+b-cN_k e^{-\sigma T}) N_k e^{-2\sigma T} + (1-p) e^{-2(\sigma+\delta)T} R_k, \end{array} \right.$$
(3)

对于映射(3)的每一个不动点,系统(2)有一个对应的周期解,反之亦然. 现在假设映射(3)的不动点是 $P(N_0, R_0)$, 则:

$$P_1(N_0, R_0) = (0, 0), \\ P_2(N_0, R_0) = \left(\frac{1+b-e^{2\sigma T}}{ce^{-\sigma T}}, \frac{pe^{\sigma T}(1+b-e^{2\sigma T})}{c(1-(1-p)e^{-2(\sigma+\delta)T})} \right),$$

其中不动点 P_1 和 P_2 分别对应于系统(1)的平凡解 $(0, 0, 0)$ 和无病周期 $2T$ -解 $(\bar{S}(t), 0, \bar{R}(t))$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{S}(t) = \frac{1+b-e^{2\sigma T}}{ce^{-\sigma T}} e^{-\sigma(t-2nT)} - \bar{R}(t) \\ \bar{I}(t) = 0 \\ \bar{R}(t) = \frac{pe^{\sigma T}(1+b-e^{2\sigma T})}{c(1-(1-p)e^{-2(\sigma+\delta)T})} e^{-(\sigma+\delta)(t-2nT)} \end{array} \right\}, \quad 2nT < t \leq (2n+1)T, \\ \left\{ \begin{array}{l} \bar{S}(t) = \frac{1+b-e^{2\sigma T}}{ce^{-\sigma T}} e^{-\sigma(t-(2n+1)T)} - \bar{R}(t) \\ \bar{I}(t) = 0 \\ \bar{R}(t) = \frac{pe^{\sigma T}(1+b-e^{2\sigma T})}{c(1-(1-p)e^{-2(\sigma+\delta)T})} e^{-(\sigma+\delta)(t-(2n+1)T)} \end{array} \right\}, \quad (2n+1)T < t \leq (2n+2)T. \quad (4)$$

记 $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$, 系统(1)变为

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{N} = -\sigma N \\ \dot{I} = \frac{\beta(N-R-I)I}{N} - (\gamma + \sigma)I \\ \dot{R} = \gamma I - (\delta + \sigma)R \end{array} \right\}, \quad t \neq nT, \\ \left\{ \begin{array}{l} \Delta N = (b - cN)N \\ \Delta I = (b - cN)I \\ \Delta R = 0 \end{array} \right\}, \quad t = (2n-1)T, \\ \left\{ \begin{array}{l} \Delta N = 0 \\ \Delta I = 0 \\ \Delta R = p(N - R - I) \end{array} \right\}, \quad t = 2nT. \quad (5)$$

系统(5)在无病周期解 $(\bar{S}(t), 0, R(t))$ 处的变分系统对应的矩阵为:

$$A(t) = \begin{pmatrix} -\sigma & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta \bar{S}(t)}{\bar{N}(t)} - (\gamma + \sigma) & 0 \\ 0 & \gamma & -(\delta + \sigma) \end{pmatrix}, \\ B_1 = \begin{pmatrix} b - 2c\bar{N}(T) & 0 & 0 \\ 0 & b - c\bar{N}(T) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ p & -p & -p \end{pmatrix},$$

则变分系统的单值矩阵 M 可表示为: $M = (E + B_2) e^{\int_0^{2T} A(t) dt} (E + B_1) e^{\int_0^T A(t) dt}$, 计算得

$$M = \begin{pmatrix} (1 + b - 2c\bar{N}(T)) e^{-2\sigma T} & 0 & 0 \\ * & (1 + b - c\bar{N}(T)) e^{\beta \int_0^{2T} \frac{\beta \bar{S}(t)}{\bar{N}(t)} dt - 2(\gamma + \sigma)T} & 0 \\ * & * & (1 - p) e^{-2(\delta + \sigma)T} \end{pmatrix}.$$

由 $|\lambda E - M| = 0$ 解得系统(5)的乘子为:

$$\lambda_1 = (1 + b - 2c\bar{N}(T)) e^{-2\sigma T}, \lambda_2 = (1 + b - c\bar{N}(T)) e^{\beta \int_0^{2T} \frac{\beta \bar{S}(t)}{\bar{N}(t)} dt - 2(\gamma + \sigma)T}, \lambda_3 = (1 - p) e^{-2(\delta + \sigma)T}.$$

由于 $0 < p < 1$, 得到 $|\lambda_3| < 1$. 根据 Floquet 理论, 故当 $|\lambda_1| < 1$ 和 $|\lambda_2| < 1$, 系统(1)的无病周期 $2T$ -解渐近稳定.

由 $|\lambda_1| < 1$ 得 $\frac{1}{2T} \ln \left(\frac{1+b}{3} \right) := \sigma_3 < \sigma < \frac{1}{2T} \ln(1+b) := \sigma_1$. 显然 $\lambda_2 > 0$, 由 $|\lambda_2| < 1$ 得

$$\mathcal{R}_1 = \frac{\beta \int_0^{2T} \frac{\beta \bar{S}(t)}{\bar{N}(t)} dt + \ln(1 + b - c\bar{N}(T))}{2(\gamma + \sigma)T} < 1. \quad (6)$$

特别是当 $\beta > \gamma$ 和 $\frac{2T\delta(\beta - \gamma)}{p\beta(1 - e^{-\delta T})} > 1$ 时, 易推出

$$\sigma < \frac{1}{2T} \ln \left(\frac{pe^{-\delta T} \beta (1-e^{-\delta T}) + 2(1-p) T \delta (\beta - \gamma) e^{-2\delta T}}{2T \delta (\beta - \gamma) - p \beta (1-e^{-\delta T})} \right) := \sigma_2.$$

假设 $\beta > \gamma$, 有 $R_1 < 1$ 当且仅当 $\sigma < \sigma_2$.

综合以上讨论, 现给出以下条件:

$$\beta > \gamma; 0 < \sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1 < 1; \frac{2T \delta (\beta - \gamma)}{p \beta (1-e^{-\delta T})} > 1. \quad (7)$$

在满足条件(7)的情形下, 当 $\sigma \in (\sigma_3, \sigma_2)$ 时, 有 $|\lambda_1| < 1$ 和 $|\lambda_2| < 1$, 则系统(1)有一渐近稳定的无病周期 $2T$ -解. 当 $\sigma \in (\sigma_2, \sigma_1)$ 时, 有 $|\lambda_1| < 1$ 和 $|\lambda_2| > 1$, 则系统(1)存在一个不稳定的无病周期 $2T$ -解. 对于系统(5)的平凡解, 可计算系统(5)在平凡解处的变分系统的 3 个乘子为 $\lambda_{01} = (1-p)e^{-2(\delta+\sigma)T}$, $\lambda_{02} = (1+b)e^{-2\sigma T}$ 和 $\lambda_{03} = (1+b)e^{-2(\gamma+\sigma)T}$. 同样可得到当 $\sigma \in (\sigma_1, 1]$ 时, 系统(1)的平凡解是渐近稳定的. 综上所述, 我们得到下面的结论:

定理 1 假设条件(7)成立, 下面的结论成立:

- (1) 如果 $\sigma \in (\sigma_1, 1]$, 则 $\lambda_{01} < 1$, $\lambda_{02} < 1$ 和 $\lambda_{03} < 1$, 从而系统(1)的平凡解是渐近稳定的;
- (2) 如果 $\sigma \in (\sigma_3, \sigma_2)$, 则 $|\lambda_1| < 1$ 和 $|\lambda_2| < 1$, 从而系统(1)的无病周期 $2T$ -解是渐近稳定的;
- (3) 如果 $\sigma \in (\sigma_2, \sigma_1)$, 则 $|\lambda_1| < 1$ 和 $|\lambda_2| > 1$, 从而系统(1)存在一个不稳定的无病周期 $2T$ -解.

3 分岔分析

这一部分主要是研究系统(1)的周期解的分岔. 为简便起见, 我们把种群的自然死亡率的相反数 $\mu = -\sigma$ 做为一个参数来研究所建立的模型(1).

3.1 跨临界分岔

引理 1^[9] 设 $F_\mu: R \times R \rightarrow R$ 是 C^2 的一个单参数族映射且满足:

$$(1) F(0, \mu) = 0, (2) \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = 1, (3) \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \mu}(0, 0) > 0, (4) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0, 0) < 0.$$

则映射 F 在 $\mu = 0$ 处发生跨临界分岔.

先讨论系统(1)的平凡解的分岔. 由于 $I(t) = 0$, 所以我们只须研究系统(5)中 $N(t)$ 和 $R(t)$. 令 $\bar{\mu} = \mu - \mu_1 = \mu + \sigma_1 = \mu + \frac{1}{2T} \ln(1+b)$, 则有 $\mu = \bar{\mu} - \frac{1}{2T} \ln(1+b)$, 那么映射(3)就变为

$$\begin{cases} N_{k+1} = N_k e^{\bar{\mu}T} - \frac{c}{(1+b)^{\frac{3}{2}}} N_k^2 e^{2\bar{\mu}T}, \\ R_{k+1} = N_k p e^{\bar{\mu}T} + \frac{pc}{(1+b)^{\frac{3}{2}}} N_k^2 e^{2\bar{\mu}T} + \frac{1-p}{1+b} R_k e^{(\bar{\mu}-2\delta)T}, \end{cases}$$

或者

$$F_\mu: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x e^{\bar{\mu}T} - \frac{c}{(1+b)^{\frac{3}{2}}} x^2 e^{2\bar{\mu}T} \\ x p e^{\bar{\mu}T} + \frac{pc}{(1+b)^{\frac{3}{2}}} x^2 e^{2\bar{\mu}T} + \frac{1-p}{1+b} y e^{(\bar{\mu}-2\delta)T} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

映射(8)的一个中心流形可表示为:

$$W^c(0) = \{ (x, y, \bar{\mu}) \in R^3 \mid y = h(x, \bar{\mu}), h(0, 0) = 0, Dh(0, 0) = 0 \}.$$

则限制在此中心流形上的映射为 $F: x \mapsto x e^{\bar{\mu}T} - \frac{c}{(1+b)^{\frac{3}{2}}} x^2 e^{2\bar{\mu}T}$, 从而得到

$$F(0, \bar{\mu}) = 0, \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = e^{\bar{\mu}T} - \frac{2c}{(1+b)^{\frac{3}{2}}} x e^{2\bar{\mu}T} \Big|_{(0,0)} = 1,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \bar{\mu}}(0, 0) = T e^{\bar{\mu}T} - \frac{4cT}{(1+b)^{\frac{3}{2}}} x e^{2\bar{\mu}T} \Big|_{(0,0)} = T > 0, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0, 0) = -\frac{2c}{(1+b)^{\frac{3}{2}}} e^{2\bar{\mu}T} \Big|_{(0,0)} < 0.$$

根据引理 1,我们得到系统(5)在 $\mu=\mu_1=-\sigma_1=\frac{1}{2T}\ln(1+b)$ 时发生跨临界分岔,由平凡解分岔出周期 $2T$ -解.

然而由定理 1,在 $\sigma \in (\sigma_2, \sigma_1)$ 时,系统(5)存在不稳定的无病周期 $2T$ -解. 故可得到由平凡解分岔出的周期解是地方病周期 $2T$ -解.

由此得到如下的结论:

定理 2 映射(3)在 $\mu=\mu_1=-\sigma_1=\frac{1}{2T}\ln(1+b)$ 时发生跨临界分岔. 因此,在 $\mu=\mu_1=-\sigma_1=\frac{1}{2T}\ln(1+b)$ 时,系统(5)的地方病周期 $2T$ -解经跨临界分岔由平凡解分岔出来.

注 综合定理 1 和定理 2 可知道,在 $\mu=\mu_2=-\sigma_2$ 的两侧,左侧存在一个稳定的地方病周期 $2T$ -解,右侧存在一稳定的无病周期 $2T$ -解,且两侧解的形式互不相同,由此可得到 $\mu=\mu_2=-\sigma_2$ 是系统(5)的一个分岔点.

3.2 Flip 分岔

根据定理 1,当 $\sigma \in (\sigma_3, \sigma_2)$ 时,系统(5)有一个稳定的无病周期 $2T$ -解 $(N(t), 0, R(t))$. 在本节,我们将讨论系统(5)的无病周期 $2T$ -解的 flip 分岔.

假设初始点 $A_0(N_0, R_0)$ 的无病周期 $2T$ -解 $(N(t), R(t))$,从点 A_0 出发,交庞加莱截面 $S_0 = \{(N, R) | R=R_0\}$ 于点 $B_1(N(2T), R(2T))$,然后在脉冲作用下跳到 A_0 ,因此有

$$\begin{cases} N_0 = N(2T) = (1+b-cN_0e^{-\sigma T})N_0e^{-2\sigma T}, \\ R_0 = R(2T) = (1-p)R_0e^{-2(\sigma+\delta)T} + p(1+b-cN_0e^{-\sigma T})N_0e^{-2\sigma T}, \end{cases}$$

由上式得出 $N_0 = \frac{1+b-e^{2\sigma T}}{c}e^{\sigma T}$ 和 $R_0 = \frac{p(1+b-e^{2\sigma T})e^{\sigma T}}{c(1-(1-p)e^{-2(\sigma+\delta)T})}$.

考虑另一个初始点 $A_k(N_0+x_k, R_0)$ 的解 $(N_1(t), R_1(t))$,从点 A_k 出发,交庞加莱截面于点 $B_k(N_1(2T), R_1(2T))$,然后在两类脉冲作用下跳到点 $A_{k+1}(N_0+x_{k+1}, R_0)$. 则 $N_0+x_{k+1} = (1+b-cN_1(T)) \times N_1(T)e^{-\sigma T}$,其中 $N_1(T) = (N_0+x_k)e^{-\sigma T}$.

令 $x(t) = N_1(t) - N(t)$,则有 $x(0) = N_1(0) - N(0) = x_k$. 当 $0 < t \leq 2T$ 时,考虑到 $\dot{x}(t) = \dot{N}_1 - \dot{N} = -\sigma x(t)$,从而得到 $x(t) = e^{-\sigma t}x_k$ 和 $x(T) = e^{-\sigma T}x_k$. 于是有如下的庞加莱映射:

$$x_{k+1} = m_1(T)x_k + m_2(T)x_k^2, \quad (9)$$

其中 $m_1(T) = 2 - (1+b)e^{2\mu T}$, $m_2(T) = -ce^{-3\sigma T} = -ce^{-3\mu T}$. 易得映射(9)的不动点 0 对应于系统(5)的无病周期 $4T$ -解,相应于不动点的特征多项式为 $\lambda - (2 - (1+b)e^{2\mu T})$,则特征值为 $\lambda_4 = 2 - (1+b)e^{2\mu T}$,如果 $-1 < \lambda_4 < 1$,则映射(9)的不动点是渐近稳定的,且有

$$-\frac{1}{2T}\ln(1+b) := \mu_1 = -\sigma_1 < \mu < -\frac{1}{2T}\ln \frac{1+b}{3} := \mu_3 = -\sigma_3.$$

若 $\mu = \mu_3$,则映射(9)的不动点 0 的特征值是 $\lambda_3 = -1$,且特征值 -1 与 flip 分岔有关. 因此 $(0, \mu_3)$ 可能是映射(9)中的一个 flip 分岔点. 利用映射(9)和文献[10]中引理 4.3.1,讨论系统(5)的无病周期 $2T$ -解的 flip 分岔.

定理 3 当 $\mu = \mu_3 = -\sigma_3$ 时,系统(5)的周期解发生 flip 分岔,存在某个 ε ,使得当 $\mu \in (\mu_3, \mu_3 + \varepsilon)$ 时,系统(5)的无病周期 $4T$ -解是稳定的.

证明 由于 $\mu = \mu_3$,映射(9)的不动点 0 的特征值是 $\lambda_3 = -1$,令 $\tilde{\mu} = \mu - \mu_3$,则映射(9)可以写成:

$$F_{\tilde{\mu}}: x \mapsto (2 - 3e^{2\tilde{\mu}T})x - \frac{\sqrt{27}c}{(1+b)^{\frac{3}{2}}}x^2e^{3\tilde{\mu}T}.$$

则在点 $(x_0, \tilde{\mu}) = (0, 0)$,有

$$\frac{\partial F_{\tilde{\mu}}}{\partial \tilde{\mu}} \frac{\partial^2 F_{\tilde{\mu}}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 F_{\tilde{\mu}}}{\partial x \partial \tilde{\mu}} = -12T \neq 0, \quad \bar{a} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F_{\tilde{\mu}}}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial^3 F_{\tilde{\mu}}}{\partial x^3} \right) = \frac{54c^2}{(1+b)^3} > 0.$$

根据文献[10]中引理 4.3.1,系统(5)发生了 flip 分岔,即在 $\tilde{\mu} = 0$ 也就是 $\mu = \mu_3 = -\sigma_3 = \frac{1}{2T}\ln(1+b)$ 时,由无

病周期 $2T$ -解分岔出无病周期 $4T$ -解. 因为 $\bar{a} > 0$, 所以无病周期 $4T$ -解是稳定的. 也就意味着对于某个 $\varepsilon > 0$, 当 $\mu \in (\mu_3, \mu_3 + \varepsilon)$ 时, 系统(5)有一个稳定的无病周期 $4T$ -解. 即定理得证.

4 数值模拟

现考虑下面的例子:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{S} = -\frac{0.6SI}{N} - \sigma S + 0.4R \\ \dot{I} = \frac{0.6SI}{N} - (0.4 + \sigma)I \\ \dot{R} = 0.4I - (0.4 + \sigma)R \end{array} \right\}, \quad t \neq n, \\ \left\{ \begin{array}{l} \Delta S = (2.5 - 0.2N)(S + R) \\ \Delta I = (2.5 - 0.2N)I \\ \Delta R = 0 \end{array} \right\}, \quad t = 2n - 1, \\ \left\{ \begin{array}{l} \Delta S = -0.6S \\ \Delta I = 0 \\ \Delta R = 0.6S \end{array} \right\}, \quad t = 2n. \quad (10)$$

可计算得 $\mu_1 = -\sigma_1 \approx -0.6264$, $\mu_2 = -\sigma_2 \approx -0.3622$ 和 $\mu_3 = -\sigma_3 \approx -0.0771$. 并且满足 $\beta > \gamma$, $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$ 和 $\sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1$. 图 1 清楚地表明系统(10)关于 $\mu(-\sigma)$ 的周期解的稳定性和这些周期解的分岔点. 当 $\mu = -\sigma = -0.7$ 时, 图 2(a) 是系统(10)的平凡解的时间序列图, 它意味着种群最终会灭亡; 当 μ 由小到大经过临界值 μ_1 时, 平凡解不再稳定, 将会发生跨临界分岔, 即从平凡解处分岔出地方病周期 $2T$ -解, 见图 2(b); 当 $\mu = \mu_2 = -\sigma_2$ 时, 系统(10)的地方病周期 $2T$ -解发生分岔; 当 μ 从 μ_2 的左边变化时, 从系统(10)的地方病周期 $2T$ -解处分岔出稳定的无病周期 $2T$ -解, 见图 2(b) 和图 2(c); 系统(10)的无病周期 $2T$ -解的 flip 分岔发生在 $\mu = \mu_3 = -\sigma_3$, 分岔出稳定的无病周期 $4T$ -解, 如图 2(c) 和图 2(d).

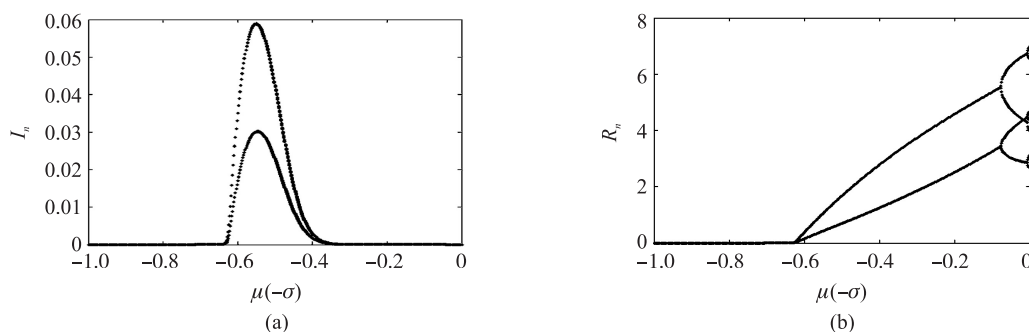


图 1 当 $p=0.6$ 和 $\mu \in [-1, 0]$ 时, 系统(10)的变量(a) I 和(b) R 的分岔图

Fig. 1 The bifurcation diagrams of the variables (a) I and (b) R of system(10) versus $\mu \in [-1, 0]$, for $p=0.6$

5 生物学解释和结语

5.1 生物学解释

从定理 2 中看出, 在条件(7)成立的情况下, 当 $\sigma \in (\sigma_1, 1]$ 时, 系统(1)的平凡解是渐近稳定的, 而种群最终会灭亡. 如果 $\sigma \in (\sigma_3, \sigma_2)$, 系统(1)就有一稳定的无病周期 $2T$ -解, 而种群会趋于稳定, 疾病就会消失; 而对某个充分小 $\varepsilon > 0$, 当 $\sigma \in (\sigma_2, \sigma_2 + \varepsilon)$ 时, 疾病将会在种群中流行. 此外, 当 $\mu = -\sigma$ 从大到小变化且经过临界值 $\mu_2 = -\sigma_2$ 时, 系统(1)的无病周期 $2T$ -解不再稳定, 将会发生分岔, 种群的易感者、感染者和移出者都会在系统(1)中反映出来, 他们可能会共存且在地方病周期 $2T$ -解附近振动.

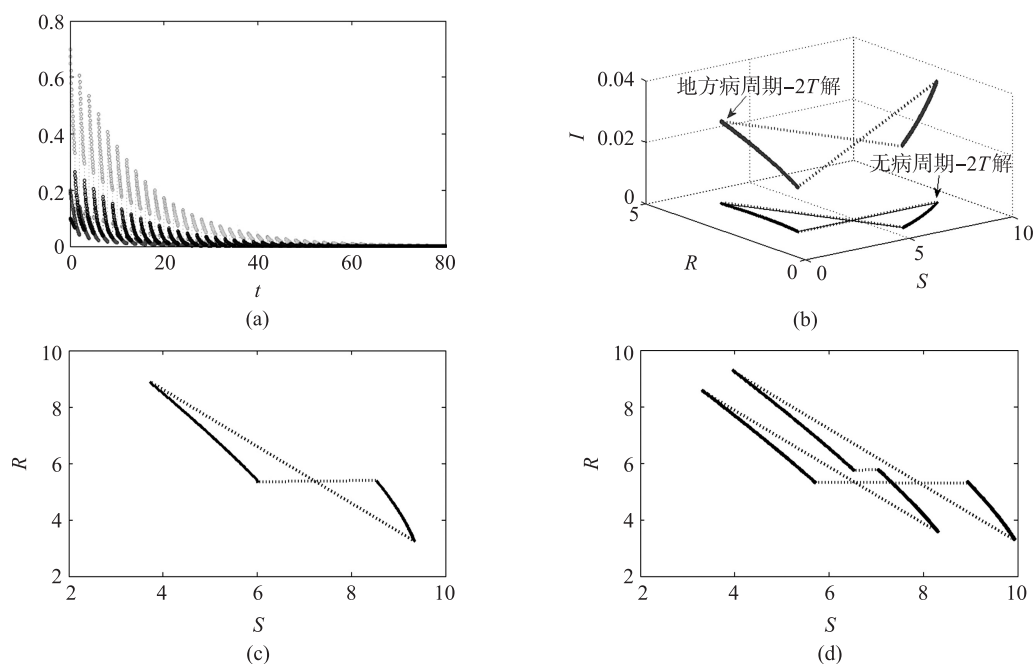


图2 (a)当 $\mu=-0.7$ 和初始点为 $(0.4, 0.2, 0.2)$ 时,系统(10)中 S, I 和 R 的时间序列图, (b)当 $\mu=-0.5$ 时,系统(10)的稳定的地方病周期 $2T$ -解和不稳定的无病周期 $2T$ -解, (c)当 $\mu=-0.1$ 时,系统(10)的稳定的无病周期 $2T$ -解, (d)当 $\mu=-0.075$ 时,系统(10)的稳定的无病周期 $4T$ -解

Fig. 2 (a) Time series of S, I and R of system (10) with $\mu=-0.7$ and the initial point $(0.4, 0.2, 0.2)$, (b) the stable epidemic period- $2T$ solution and unstable infection-free period- $2T$ solution of system (10) with $\mu=-0.5$, (c) the stable infection-free period- $2T$ solution of system (10) with $\mu=-0.1$, (d) the stable infection-free period- $4T$ solution of system (10) with $\mu=-0.075$

5.2 结语

本文研究了系统(1)的平凡解和无病周期 $2T$ -解的局部稳定性. 运用分岔理论, 验证了周期解的分岔, 包含跨临界分岔和 flip 分岔. 第3节的结论中说明了: 当 $\mu=-\sigma$ 由小到大变化时, 经 $\mu=-\sigma_1$, 地方病周期 $2T$ -解通过跨临界分岔由平凡解分岔出来; 经 $\mu=-\sigma_2$, 无病周期 $2T$ -解从地方病周期 $2T$ -解中分岔出来; 经 $\mu=-\sigma_3$, 无病周期 $4T$ -解通过 flip 分岔由无病周期 $2T$ -解分岔出来. 数值模拟也验证了结论的正确性. 在 $\mu=-\sigma_2$ 时, 由地方病周期 $2T$ -解到无病周期 $2T$ -解可能会发生超临界分岔, 至于是否发生超临界分岔还有待解决.

[参考文献]

- [1] 朱砚, 李维德, 朱凌峰. 具有脉冲出生和脉冲接种的 SIR 传染病模型[J]. 生物数学学报, 2011(6): 490-496.
- [2] Zeng G Z, Chen L S. SIV-SVS epidemic models with continuous and impulsive Vaccination strategy[J]. Journal of Theoretical Biology, 2011, 280: 108-116.
- [3] 马之恩, 周义仓, 王稳地. 传染病动力学的数学建模与研究[M]. 北京: 科学出版社, 2004: 3-24.
- [4] 周艳丽, 王贺桥, 王美娟, 等. 具有脉冲预防接种的 SIQR 流行病数学模型[J]. 上海理工大学学报, 2007, 29(1): 11-16.
- [5] Anderson R, May R. Infectious Diseases of Human: Dynamics and Control[M]. Oxford: Oxford University Press, 1991: 28-38.
- [6] Hua Z, Liu S, Wang H. Backward bifurcation of an epidemic model with standard incidence rate and treatment rate[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2008(9): 2 302-2 312.
- [7] 郭中凯, 王文婷, 李自珍. 具有脉冲免疫接种的 SEIRS 传染病模型分析[J]. 南京师大学报: 自然科学版, 2013, 36(2): 20-26.
- [8] Fang L L, Qi L X. The stability analysis of an SEIRS model[J]. 南京师大学报: 自然科学版, 2013, 36(3): 21-30.
- [9] Rasband S N. Chaotic Dynamics of Nonlinear Systems[M]. New York: John Wiley and Sons, 1990: 108-110.
- [10] Guckenheimer J, Holmes P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, Applied Mathematical Sciences[M]. New York: Springer-Verlag, 1983, 42: 178-180.

[责任编辑: 丁 蓉]