关于 Ding 投射范畴的稳定性

颜晓光[1],徐爱民[2]

(1.南京晓庄学院数学与信息技术学院,江苏 南京 211171)
(2.曲阜师范大学数学科学学院,山东 曲阜 273165)

[**摘要**]　首先,证明了以 Ding 投射模为对象,利用定义 Ding 投射模的方法构造出的模仍然是 Ding 投射模. 其次,引进了 Ding 投射复形并利用 Ding 投射模刻画了此类复形. 同时,利用复形的 Ding 投射维数刻画了 n-FC 环. 最后,证明了 Ding 投射复形范畴也具有类似 Ding 投射模范畴的稳定性.

[**关键词**]　Ding 投射模,Ding 投射复形,稳定性
[**中图分类号**]O154.2　[**文献标志码**]A　[**文章编号**]1001-4616(2015)01-0025-07

On Stability of Ding Projective Categories

Yan Xiaoguang[1],Xu Aimin[2]

(1.School of Mathematics and Information Technology,Nanjing Xiaozhuang University,Nanjing 211171,China)
(2.School of Mathematical Sciences,Qufu Normal University,Qufu 273165,China)

Abstract:We show that an iteration of the procedure used to define Ding projective modules yields exactly Ding projective modules. Then we introduce Ding projective complexes, and characterize those complexes by Ding projective modules. Moreover,we characterize n-FC rings with Ding projective dimension of complexes. Finally,we prove that the category of Ding projective complexes also has some kind of stability.

Key words:Ding projective module,Ding projective complex,stability

设 R 是一个环,在 Auslander 和 Bridger 关于 G-维数有限模[1]的工作基础上,Enochs,Jenda[2]以及 Holm[3]引入并研究了 Gorenstein 投射 R-模. 称一个左 R-模 M 为 Gorenstein 投射的,如果存在一个投射左 R-模构成的正合列:

$$P=\cdots P_1\to P_0\to P^0\to P^1\to\cdots$$

使得 $M\cong \mathrm{Im}(P_0\to P^0)$,且对于任何的投射模 Q,$\mathrm{Hom}_R(P,Q)$ 都是一个正合复形. 类似地,可以定义 Gorenstein 内射模. 利用这两类模我们可以建立起与经典同调代数理论类似地 Gorenstein 同调代数理论. 丁南庆教授与其合作者研究了一类特殊的 Gorenstein 投射模,他们称其为强 Gorenstein 平坦模,见[4],这类模具有很多良好的性质,比如,这类模是投射 resolving 的,并且关于直和项与直和都是封闭的,进而此类模引起了国内外学者的关注. 特别地,在后来的一些文献中,研究者均将此类模称为 Ding 投射模,如[5,6]. 最近,Sather-Wagstaff 等[7]研究了具有如下性质的 R-模 M:存在一个由 Gorenstein 投射左 R-模组成的正合列,$G=\cdots\to G_1\to G_0\to G^0\to G^1\to\cdots$,使得 $M\cong \mathrm{Im}(G_0\to G^0)$,且对于任意 Gorenstein 投射左 R-module H,$\mathrm{Hom}_R(G,H)$ 和 $\mathrm{Hom}_R(H,G)$ 都是正合复形. 他们证明了这样的模仍然为 Gorenstein 投射模[7]. 受这个结果启发,在本文中我们考虑了下面的问题:

问题:设 $G=\cdots\to G_1\to G_0\to G^0\to G^1\to\cdots$是由 Ding 投射左 R-模构成的正合列,若对任意的平坦左 R-模 H,$\mathrm{Hom}_R(G,H)$ 都是正合复形,那么 $M\cong \mathrm{Im}(G_0\to G^0)$是否为 Ding 投射模?

在文章的第 2 节中,我们回答了这个问题. 记 $D(\mathscr{P}(R))$为所有的 Ding 投射模组成的范畴,$D^2(\mathscr{P}(R))$为所有满足上述问题中条件的左 R-模 M 构成的范畴,那么容易看出 $D(\mathscr{P}(R))\subseteq D^2(\mathscr{P}(R))$,而我们证明了:

收稿日期:2014-06-17.
基金项目:国家自然科学基金天元专项(11226060)、江苏省高校自然科学基金(12KJD110006)、南京晓庄学院青年专项(2011NXY62).
通讯联系人:颜晓光,博士,副教授,研究方向:同调代数. E-mail:yanxg1109@163.com

定理 A　对于环 R,我们总有 $D(\mathscr{P}(R))=D^2(\mathscr{P}(R))$.

这个定理就给出了上述问题的回答.

在第3节中,我们引入 Ding 投射复形,并且利用 Ding 投射模刻画了 Ding 投射复形,这个刻画可以看作是[8,定理4.5]的推广:

定理 B　设 $X\in Ch(R)$,X 是 Ding 投射复形当且仅当每个 X^i 都是 Ding 投射模.

作为定理 B 的应用,在推论2中我们利用复形的 Ding 投射维数刻画了 n-FC 环. 最后,我们证明了 Ding 投射复形范畴具有类似 Ding 投射模范畴的稳定性(见定理3).

1　预备知识

我们将在这一节中给出一些定义、符号和一些已知结果. 整篇文章中,$\mathbf{Z}$ 表示整数集合,R 表示一个有单位元的结合环,Mod R(Mod R^{op})表示左(右)R-模范畴. 设 $\mathscr{C}$ 是一个左 R-模类,我们给出如下定义:

$$^{\perp}\mathscr{C}=\bigcap_{i=1}^{\infty}{}^{\perp_i}\mathscr{C},\quad \text{其中}\quad {}^{\perp_i}\mathscr{C}=\{X\mid Ext_R^i(X,C)=0\ \forall\ C\in\mathscr{C}\},i\geqslant 1.$$

$$\mathscr{C}^{\perp}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\mathscr{C}^{\perp_i},\quad \text{其中}\quad \mathscr{C}^{\perp_i}=\{X\mid Ext_R^i(C,X)=0\ \forall\ C\in\mathscr{C}\},i\geqslant 1.$$

一个左 R-模 M 的 $\mathscr{C}$ 预解式是一个正合列:$\boldsymbol{C}=\cdots C_1\to C_0\to M\to 0$,其中 $C_i\in\mathscr{C}$,$i=0,1,\cdots,n,\cdots$. 如果这个对于任意 $C\in\mathscr{C}$,Hom$(C,\boldsymbol{C})$ 都是正合的,那么称 $\boldsymbol{C}$ 是 proper 的. 对偶地,我们可以定义(coproper)$\mathscr{C}$ 余预解式. 左 R-模复形 $\cdots\to X^{-1}\xrightarrow{\delta^{-1}}X^0\xrightarrow{\delta^0}X^1\to\cdots$ 记为 (X,δ_X) 或简记为 X,X 的第 n 个边缘(圈,同调)模为 $\mathrm{Im}\delta^{n-1}(Ker\delta^n,Ker\delta^n/\mathrm{Im}\delta^{n-1})$,记为 $B^n(\boldsymbol{X})(Z^n(\boldsymbol{X}),H^n(\boldsymbol{X}))$.

对于一个复形 X 和整数 $m\in\mathbf{Z}$,$X[m]$ 表示一个复形,其第 n 个位置上的模为 $X[m]^n=X^{m+n}$,边缘算子为 $(-1)^m\delta^{m+n}$. 对于一个 R-模 M,$\overline{M}$ 表示复形 $\cdots\to 0\to M\xrightarrow{1_M}M\to 0\to\cdots$ 其中两个非零位置为-1和0.

$Ch(R)(Ch(R^{op}))$ 表示所有左(右)R-模复形范畴. 由[9,命题3.2]知,这个范畴具有足够的投射对象和内射对象. 如果 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in Ch(R)$,映射 $f:\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{Y}$ 是一簇 R-模同态 $f^n:X^n\to Y^n$,满足:对于任意的 $n\in Z$ 有 $f^{n+1}\delta_X^n=\delta_Y^nf^n$,将 f 记为 $\{f^n\}_{n\in\mathbf{Z}}$. 对于两个复形 X 和 Y,$\mathrm{Hom}_R(X,Y)$ 表示 X 到 Y 的所有复形态射(见[10]),而 $Ext_R^i(X,Y)(i\geqslant 1)$ 表示 Hom 的右导出函子. (注:这里的导出函子与[11]中的定义不同)

设 X 为右 R-模复形,Y 为左模复形,张量积 $X\otimes^{\cdot}Y$ 表示一个复形,其中 $(X\otimes^{\cdot}Y)^n=\bigoplus_{i+j=n}X^i\otimes_RY^j$,其边缘映射 δ^n 在生成子上的作用为:$\delta_X(x)\otimes y+(-1)^{|x|}x\otimes\delta_Y(y)$,其中 $|x|$ 为元素 x 在复形中的位置数. 记 $X\otimes Y=\dfrac{X\otimes^{\cdot}Y}{B(X\otimes^{\cdot}Y)}$,这样我们就有 Abel 群构成的复形 $\cdots\to\dfrac{(X\otimes^{\cdot}Y)^n}{B^n(X\otimes^{\cdot}Y)}\to\dfrac{(X\otimes^{\cdot}Y)^{n+1}}{B^{n+1}(X\otimes^{\cdot}Y)}\to\cdots$,$x\otimes y\mapsto\delta_X(x)\otimes y$,其中 $x\otimes y$ 表示 $\dfrac{(X\otimes^{\cdot}Y)^n}{B^n(X\otimes^{\cdot}Y)}$ 中元素. 特别地,我们有右正合函子 $\_\otimes Y:Ch(R^{op})\to Ch(Z)$ 以及它的左导出函子 $\mathrm{Tor}_i(\_,Y)$.

我们称 $Ch(R)$ 中复形 K 是内射的(投射,平坦)如果它是正合复形,并且满足 $\forall n\in\mathbf{Z}$,$Z^n(K)$ 是内射(投射,平坦)R-模(见[8,12]). 由[10,命题3.4]知 $C\in Ch(R)$,C 是 DG-内射(DG-投射)当且仅当对每一个正合复形 E 都有 $Ext^1(E,C)=0(Ext^1(C,E)=0)$. 而由[13,引理4.2]知 C 是 DG-平坦的,当且仅当对任何一个 $Ch(R^{op})$ 中的正合复形 E,以及任意 $i\in\mathbf{Z}^+$,都有 $\mathrm{Tor}_i(E,C)=0$. 设 $\mathscr{X}$ 是一个左 R-模类,对于复形 C 如果它每个位置上的模都属于 $\mathscr{X}$,那么我们称 C 为#-$\mathscr{X}$ 复形,特别地,如果复形上每个位置上的模都是内射(投射,平坦)的,那么我们称此复形为#-内射(#-投射,#-平坦)(见[11]). 显而易见,每个内射(投射,平坦)复形都是 DG-内射(DG-投射,DG-平坦)的,而每个 DG-内射(DG-投射,DG-平坦)复形都是#-内射(#-投射,#-平坦)的.

2　Ding 投射模的稳定性

定义 1　[4,6]左 R-模 M 称为 Ding 投射模,如果存在一个由投射左 R-模构成的正合列 $P=\cdots\to P_1\to P_0\to P^0\to P^1\to\cdots$,使得 $M\cong\ker(P^0\to P^1)$,且对于任何平坦左 R-模 Q,$\mathrm{Hom}_R(P,Q)$ 都是一个正合复形.

下文中,我们用 $\mathscr{F}(R)$,$\mathscr{P}(R)$ 和 $D(\mathscr{P}(R))$ 分别表示所有平坦,投射和 Ding 投射左 R-模构成的模类. 下面这个引理是我们证明定理 A 的关键一步.

引理 1 设 M 为左 R-模,则 M 具有一个 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathscr{F}(R))$ 正合的投射预解式当且仅当 M 具有一个 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathscr{F}(R))$ 正合的 $D(\mathscr{P}(R))$ 预解式.

证明 只需要证明"充分性". 设 $0\to N\to G_0\to M\to 0$ 是一个 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathscr{F}(R))$ 正合的正合列,$G_0\in D(\mathscr{P}(R))$,且 N 具有一个 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathscr{F}(R))$ 正合的 $D(\mathscr{P}(R))$ 预解式,则我们可得到下列 pullback 交换图:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & G' & = & G' & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \to & H & \to & W_0 & \to & M & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \to & N & \to & G_0 & \to & M & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

其中 $W_0\in\mathscr{P}(R)$,$G'\in D(\mathscr{P}(R))$,所有的行与列均是 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathscr{F}(R))$ 正合的. 另外,由假设知,存在一个 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathscr{F}(R))$ 正合的正合列 $0\to K\to G_1\to N\to 0$,其中 $G_1\in D(\mathscr{P}(R))$,且 K 也具有一个 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathscr{F}(R))$ 正合的 $D(\mathscr{P}(R))$ 预解式. 现在考虑下面的 pullback 交换图:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & K & = & K & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & G' & \to & L & \to & G_1 & \to & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & G' & \to & H & \to & N & \to & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

由[14,定理 2.1]和中间行的正合性可得到 $\mathrm{L}\in \mathrm{D}(\mathscr{P}(R))$,因此 H 就具有一个 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathscr{F}(R))$ 正合的 $D(\mathscr{P}(R))$ 预解式. 注意到 $0\to H\to W_0\to M\to 0$ 是 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathscr{F}(R))$ 正合的,重复上述过程,我们就可得到 M 的一个 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathscr{F}(R))$ 正合的投射预解式.

对偶地,我们可以证明下面的引理:

引理 2 设 M 为左 R-模,则 M 具有一个 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathscr{F}(R))$ 正合的投射余预解式当且仅当 M 具有一个 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathscr{F}(R))$ 正合的 $D(\mathscr{P}(R))$ 余预解式.

现在我们就可以给出本节的主要结果:

定理 1 对于任意环 R 都有 $D(\mathscr{P}(R))=D^2(\mathscr{P}(R))$.

证明 由引理 1 和 2 可得.

这个定理表明了重复构造 Ding 投射模的方法所得到的仍然是 Ding 投射模,从而也回答了引言中提出的问题.

3 Ding 投射复形的稳定性

本节将引入 Ding 投射复形和复形的 Ding 投射维数,并利用 Ding 投射模来刻画 Ding 投射复形. 作为应用,还将利用复形的 Ding 投射维数来刻画 n-FC 环. 特别地,我们将证明,Ding 投射复形范畴也具有类似 Ding 投射模范畴的稳定性.

定义 2 复形 X 称为是 Ding 投射的,如果存在一个 $Ch(R)$ 中的正合列:$\boldsymbol{P}=\cdots\to P^{-1}\xrightarrow{\delta^{-1}}P^0\xrightarrow{\delta^0}P^1\to\cdots$

满足:

(1)对于每个 $i \in \mathbf{Z}$,P^i 都是一个投射复形;

(2)$\mathrm{Im}\delta^0 = X$;

(3)对于每个平坦模 F 与任何的 $m \in \mathbf{Z}$,$\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{P}, \bar{F}[m])$ 是正合的.

下文中,$\overline{D(\mathscr{P}(R))}$ 表示 $Ch(R)$ 中所有 Ding 投射复形组成的范畴.

注 1　(1)如果 R 是一个右凝聚环,那么由[4,命题 2.3],[15,定理 3.1]和本文的定理 2 可得:Ding 投射复形也是 Gorenstein 平坦复形.

(2)每个 Ding 投射复形都是 Gorenstein 投射的. 特别地,如果 R 是 n-Gorenstein 环,那么 Ding 投射复形范畴就是 Gorenstein 投射复形范畴.

下面我们将利用 Ding 投射模来给出 Ding 投射复形的一个刻画. 首先,我们说明 Ding 投射复形每个位置上的模都是 Ding 投射模.

命题 1　若 X 是一个 Ding 投射复形,那么 X 的每个位置上的模 X^n 都是 Ding 投射模.

证明　设 $X = \cdots \to X^{-1} \to X^0 \to X^1 \to \cdots$ 是一个 Ding 投射复形,则存在一个 $Ch(R)$ 中的正合列:$\boldsymbol{P} = \cdots \to P^{-1} \xrightarrow{\delta^{-1}} P^0 \xrightarrow{\delta^0} P^1 \to \cdots$,使得 $X^n = \mathrm{Im}\delta_n^0$,其中 P^i 均是投射复形,且满足:对任何平坦 R-模 F 和任意 $m \in \mathbf{Z}$,$\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{P}, \bar{F}[m])$ 都是正合的. 因此,对于任意 $n \in \mathbf{Z}$,我们都有一个 R-模正合列:$P' = \cdots \to P_n^{-1} \xrightarrow{\delta_n^{-1}} P_n^0 \xrightarrow{\delta_n^0} P_n^1 \xrightarrow{\delta_n^1} P_n^2 \xrightarrow{\delta_n^2} P_n^3 \to \cdots$,其中 P_n^i 均是投射左 R-模. 对于平坦模 F 和任意的 $m \in \mathbf{Z}$,$\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{P}, \bar{F}[-m-1])$ 都是正合的,而对任意的复形 A,都有 $\mathrm{Hom}_R(A, \bar{F}[-m-1]) \cong \mathrm{Hom}_R(A^{m+1}, F)$,因此 $\mathrm{Hom}_R(P', F)$ 也是正合的,所以 X^n 是 Ding 投射模.

为了证明命题 1 的逆命题也是成立的,我们需要先证明以下两个引理.

引理 3　若复形 G 的每个位置上的模 G^i 都是 Ding 投射的,那么对于任何平坦左 R-模 F 以及任意 $m \in \mathbf{Z}$,都有 $Ext_R^{i \geqslant 1}(G, \bar{F}[m]) = 0$.

证明　设 F 为平坦 R-模,则 $\bar{F}[m] = \cdots \to 0 \to F \xrightarrow{id} F \to 0 \to \cdots$. 取 $Ch(R)$ 中的正合列:$0 \to \bar{F}[-m-1] \to X \to G \to 0$,考虑下面的交换图:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & \to & X^{m-1} & \to & G^{m-1} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \delta_X^{m-1} & & \downarrow \delta_G^{m-1} & & \\
0 & \to & F & \xrightarrow{f^m} & X^m & \xrightarrow{g^m} & G^m & \to & 0 \\
 & & \downarrow id & & \downarrow \delta_X^m & & \downarrow \delta_G^m & & \\
0 & \to & F & \xrightarrow{f^{m+1}} & X^{m+1} & \xrightarrow{g^{m+1}} & G^{m+1} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \delta_X^{m+1} & & \downarrow \delta_G^{m+1} & & \\
 & & 0 & \to & X^{m+2} & \to & G^{m+2} & \to & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}
$$

由于 $f^{m+1}: F \to X^{m+1}$ 是可裂的,所以存在 $h^{m+1}: X^{m+1} \to F$ 使得 $h^{m+1} f^{m+1} = 1$. 定义 $h^m: X^m \to F$,$h^m = h^{m+1}\delta_X^m$,而当 $i \neq m, m+1$ 时,$h^i = 0$. 这样我们就得到一个复形映射:$h: X \to \bar{F}[-m-1]$,满足 $hf = 1$,所以 $0 \to \bar{F}[-m-1] \to X \to G \to 0$ 是可裂的,且有:$Ext^1(\boldsymbol{G}, \bar{F}[-m-1]) = 0$. 设 $0 \to \boldsymbol{K} \to \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{G} \to 0$ 是 $Ch(R)$ 中的正合列,且 P 为投射复形,则 $\forall m \in \mathbf{Z}$,K^m 为 Ding 投射模,且 $Ext^2(G, \bar{F}[-m-1]) \cong Ext^1(K, \bar{F}[-m-1]) = 0$. 继续上述过程即可得到 $\forall i \geqslant 1$,$Ext^i(G, \bar{F}[-m-1]) = 0$.

引理 4　设 $0 \to M \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} N \to 0$ 为左 R-模正合列,其中 N 是 Ding 投射模,P 是投射模. P' 是任意一个投射模,$f': M \to P'$ 为任一模同态,取 $\alpha = (f, f'): M \to P \oplus P'$,那么 $\mathrm{Coker}\alpha$ 是 Ding 投射模.

证明 对于任意给定的模同态 $f':M\to P'$,有正合列 $0\to M\xrightarrow{\alpha}P\oplus P'\to \mathrm{Coker}\alpha\to 0$. 由"Factor 引理"知存在 $\mu:\mathrm{Coker}\alpha\to N$,使得下图交换:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & M & \xrightarrow{\alpha} & P\oplus P' & \to & Coker\alpha & \to & 0 \\ & & \downarrow id & & \downarrow \pi & & \downarrow \mu & & \\ 0 & \to & M & \xrightarrow[f]{} & P & \xrightarrow[g]{} & N & \to & 0 \end{array}$$

其中 $\pi:P\oplus P'\to P$ 是正则投射. 由 5-引理可得 μ 是满同态,而由蛇引理知 $\ker\pi\cong\ker\mu$ 是投射的. 最后由[14,定理 2.1]和正合列 $0\to\ker\mu\to\mathrm{Coker}\alpha\to N\to 0$ 可得 $\mathrm{Coker}\alpha$ 是 Ding 投射模.

现在我们可以证明命题 1 的逆命题也是成立的.

命题 2 若复形 X 每个位置上的模 X^i 都是 Ding 投射的,则 X 是 Ding 投射复形.

证明 因为 X^i 都是 Ding 投射模,由[14,推论 2.2]知对于 $\forall i\in\mathbf{Z}$,都存在正合列 $0\to X^i\xrightarrow{f_i}H^i\to Y^i\to 0$,其中 H^i 是投射模,Y^i 是 Ding 投射模. 如果定义 $\alpha_i=(f_i,f_{i+1}\delta_X^i):X^i\to H^i\oplus H^{i+1}$,那么 $\alpha=(\alpha_i):\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{P}^0$ 是下列两个复形间的态射:

$$\begin{array}{ccccccccccc} X: & \cdots & \to & X^{i-1} & \xrightarrow{\delta_X^{i-1}} & X^i & \xrightarrow{\delta_X^i} & X^{i+1} & \xrightarrow{\delta_X^{i+1}} & X^{i+2} & \to & \cdots \\ & & & \downarrow \alpha_{i-1} & & \downarrow \alpha_i & & \downarrow \alpha_{i+1} & & \downarrow \alpha_{i+2} & & \\ P^0: & \cdots & \to & H^{i-1}\oplus H^i & \to & H^i\oplus H^{i+1} & \to & H^{i+1}\oplus H^{i+2} & \to & H^{i+2}\oplus H^{i+3} & \to & \cdots \end{array}$$

因此我们可以得到一个复形正合列 $0\to X\xrightarrow{\alpha}P^0\to K_1\to 0$,其中 P^0 为投射复形,$K_1=\mathrm{Coker}\alpha$. 由引理 4 知,每个$(K_1)^i=\mathrm{Coker}(\alpha_i)$都是 Ding 投射模,所以由引理 3 知上述正合列是 $\mathrm{Hom}_R(-,\bar{F}[m])$ 正合的,其中 F 为平坦模而 $m\in\mathbf{Z}$. 注意到 K_1 与 X 具有相同的性质,因此我们可以用同样的方法构造复形正合列:$0\to X\to P^0\to P^1\to\cdots$,使得每个 P^i 是投射的,且对于任何平坦模 F 和任意 $m\in\mathbf{Z}$ 这个正合列是 $\mathrm{Hom}_R(-,\bar{F}[m])$ 正合的,再由引理 3 知 X 是 Ding 投射的.

由命题 1 和 2 我们可以利用 Ding 投射模刻画 Ding 投射复形,这个结果也是[8,定理 4.5]的一个推广:

定理 2 X 为复形,X 是 Ding 投射的当且仅当每个位置上的模 X^i 也是 Ding 投射的.

下面我们将引进复形的 Ding 投射维数的概念,并利用它来刻画 n-FC 环. 若 $C\in Ch(R)$,则 C 的 Ding 投射维数,记为 $Dpd(C)$,定义为:$Dpd(C)=\inf\{n\mid$存在一个复形正合列 $0\to X_n\to X_{n-1}\to\cdots\to X_0\to C\to 0$,其中每个 X_i 都是 Ding 投射的$\}$,如果不存在这样的 n,那我们就定义 $Dpd(C)=\infty$. 类似地,我们可以在模范畴中定义一个模 M 的 Ding 投射维数 $Dpd(M)$.

由定理 2 和[14,引理 2.1],我们有下面的推论:

推论 1 设 $X\in Ch(R)$,$n\geqslant 0$. 那么 $Dpd(X)\leqslant n$ 当且仅当对每个 $i\in\mathbf{Z}$ 都有 $Dpd(X^i)\leqslant n$. 特别地,我们有 $Dpd(X)=sup\{Dpd(X^i)\mid i\in\mathbf{Z}\}$.

如果每个内射右(左)R-模都是平坦的,则环 R 称为右(左)IF-环[16],如果它既是右 IF-环又是左 IF-环,则称 R 为 IF-环. 设 n 是一个非负整数,如果对于每个内射右(左)模 E 都有 $fd_R(E)\leqslant n$,则称 R 是右(左)n-IF,若它既是右 n-IF 又是左 n-IF,则称 R 为 n-IF 环. 显然 0-IF 环就是 IF 环,而 n-IF 诺特环是 n-Gorenstein 环,见[17,定理 9.1.11]. 环 R 被称为 n-FC 的,如果它是左右凝聚的且左右自 FP-内射维数都不超过 n. 由[18,定理 3.8]知,如果 R 是左右凝聚的,那么它是 n-FC 环当且仅当它是 n-IF 环. 设 X 是一个有界复形,如果它的每个位置上的模 X^i 都是有限表现的,则称复形 X 是有限表现的. 现在我们可以利用复形的 Ding 投射维数来刻画 n-FC 环,这个结果也可看作是[18,定理 3.6]的一个推广.

推论 2 对于一个双边凝聚环 R 和一个固定的正整数 n,下列条件等价:

(1)R 是 n-FC 环.

(2)对于 $Ch(R)$中的每个有限表现复形 X,都有 $Dpd(X)\leqslant n$.

(3)对于 $Ch(R^{op})$中的每个有限表现复形 Y,都有 $Dpd(Y)\leqslant n$.

证明 我们只需证明(1)$\Leftrightarrow$(2).

(1)⇒(2):由[4,定理 3.6]和推论 1 即得.

(2)⇒(1):由条件以及[14,命题 2.4]和[17,命题 1.3]知,任意有限表现左 R-模的 Gorenstein 平坦维数都小于等于 n,而由[19,引理 2.5 和定理 3.1]知 Gorenstein 平坦维数都小于等于 n 的模类是关于正向极限封闭的,因此,环 R 的左弱 Gorenstein 整体维数小于等于 n. 最后,由[20,定理 2.8]和 Gorenstein 平坦模的定义(见[21])可得 R 是 n-IF 环,也就是 n-FC 环.

下面这个结果表明,Ding 投射复形范畴具有与 Ding 投射模范畴类似的稳定性:

定理 3 设 $\boldsymbol{P}=\cdots\to P^{-1}\xrightarrow{\delta^{-1}}P^{0}\xrightarrow{\delta^{0}}P^{1}\to\cdots$ 是由 Ding 投射复形构成的正合列,且对任意的平坦模 F 以及任意的 $n\in\mathbf{Z}$ 都有 $\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{P},\overline{F}[n])$ 仍然是正合的,那么 $X=\mathrm{Im}\delta^0$ 是一个 Ding 投射复形.

证明 若 $\boldsymbol{P}$ 为定理中的正合列,那么对于任意 $m\in\mathbf{Z}$,我们都有一个 R-模正合列:$P'=\cdots\to P_m^{-1}\xrightarrow{\delta_m^{-1}}P_m^{0}\xrightarrow{\delta_m^{0}}P_m^{1}\xrightarrow{\delta_m^{1}}P_m^{2}\xrightarrow{\delta_m^{2}}\cdots$ 使得 $X^m=\mathrm{Im}\delta_m^0$,由定理 2 可得正合列中的所有 P_m^i 都是 Ding 投射模. 设 F 为平坦左 R-模,则对于任意的 $m\in\mathbf{Z}$,$\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{P},\overline{F}[-m-1])$ 都是正合的,注意到对任意的复形 A 都有 $\mathrm{Hom}_R(A,\overline{F}[-m-1])\cong\mathrm{Hom}_R(A^{m+1},F)$,因此 $\mathrm{Hom}_R(P',F)$ 也是正合的. 再由定理 1 知对于每个 $m\in\mathbf{Z}$,X^m 都是 Ding 投射的,因此,由定理 2 可得 $X=\mathrm{Im}\delta^0$ 也是 Ding 投射的.

在本文的最后,作为定理 2 和 3 的一个应用,我们给出 Ding 投射复形的另一个刻画. 为此,我们需要引入一些符号. 设 $\mathscr{X}$ 是 $Ch(R)$ 的一个子类,$\boldsymbol{L}$ 为 $Ch(R)$ 中的一个序列,如果对于 $\forall X\in\mathscr{X}$ 都有 $\mathrm{Hom}_R(X,\boldsymbol{L})$($\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{L},X)$)为正合 Abel 群序列,那么称 $\boldsymbol{L}$ 为 $\mathrm{Hom}_R(\mathscr{X},-)$($\mathrm{Hom}_R(-,\mathscr{X})$)正合的. 我们用 $\overline{\mathscr{P}(R)}$($DG$-$\mathscr{P}$,$\#\mathscr{P}$,$\overline{\mathscr{F}(R)}$,$DG$-$\mathscr{F}$,$\#\mathscr{F}$)表示 $Ch(R)$ 中所有投射(DG-投射,#-投射,平坦,DG-平坦)复形构成的范畴,而 $\overline{\mathscr{F}}=\{\overline{F}[m]\mid F$ 为平坦左 R-模,$m\in\mathbf{Z}\}$.

由定理 2 和 3,我们有如下推论:

推论 3 设 $X\in Ch(R)$,下列条件等价:

(1)X 是 Ding 投射复形.

(2)存在 $Ch(R)$ 中的正合列 $\cdots\to P^{-1}\to P^0\to P^1\to\cdots$,满足所有 P^i 是 Ding 投射的,$X\cong\mathrm{Im}(P^0\to P^1)$,且该正合列是 $\mathrm{Hom}_R(-,\#\mathscr{F})$ 正合的.

(3)存在 $Ch(R)$ 中的正合列 $\cdots\to P^{-1}\to P^0\to P^1\to\cdots$,满足所有 P^i 是 Ding 投射的,$X\cong\mathrm{Im}(P^0\to P^1)$,且该正合列是 $\mathrm{Hom}_R(-,\overline{\mathscr{F}(R)})$ 正合的.

(4)存在 DG-$\mathscr{P}$ 中的正合列 $\cdots\to P^{-1}\to P^0\to P^1\to\cdots$,满足 $X\cong\mathrm{Im}(P^0\to P^1)$,且该正合列是 $\mathrm{Hom}_R(-,\overline{\mathscr{F}})$ 正合的.

(5)存在 $\#\mathscr{P}$ 中的正合列 $\cdots\to P^{-1}\to P^0\to P^1\to\cdots$,满足 $X\cong\mathrm{Im}(P^0\to P^1)$,且该正合列是 $\mathrm{Hom}_R(-,\overline{\mathscr{F}})$ 正合的.

(6)存在 $Ch(R)$ 中的正合列 $\cdots\to P^{-1}\to P^0\to P^1\to\cdots$,满足所有 P^i 是 Ding 投射的,$X\cong\mathrm{Im}(P^0\to P^1)$,且该正合列是 $\mathrm{Hom}_R(-,DG\text{-}\mathscr{F})$ 正合的.

注 2 由定理 2,我们知道复形 X 是 Ding 投射的当且仅当 X 是一个#-$D(\mathscr{P}(R))$ 复形,因此,推论 3 也就给出了#-$D(\mathscr{P}(R))$ 复形一些刻画. 此外,范畴 $D(\mathscr{P}(R))$ 与范畴 $\overline{D(\mathscr{P}(R))}$ 还有一些其他相似的性质,比如,由[14,定理 2.1]可知两个范畴都是投射 resolving 的,都是关于直和与直和项封闭的.

[参考文献]

[1] Auslander M,Bridger M. Stable module theory[J]. Mem Amer Math Soc,1969,94:1-146.

[2] Enochs E E,Jenda O M G. Gorenstein injective and projective modules[J]. Math Z,1995,220(4):611-633.

[3] Holm H. Gorenstein homological dimensions[J]. J Pure Appl Algebra,2004,189:167-193.

[4] Ding N Q,Li Y L,Mao L X. Strongly Gorenstein flat modules[J]. J Aust Math Soc,2009,86(3):323-338.

[5] Gillespie J. Model structure on modules over Ding-Chen rings[J]. Homology,Homotopy Appl,2010,12(1):61-73.

[6] Yang G,Liu Z K,Liang L. Ding projective and Ding injective modules[J]. Algebra Colloquim,2013,20(4):239-252.

[7] Sather-Wagstaff S,Sharif T,White D. Stability of Gorenstein categories[J]. J London Math Soc,2008,77:481-502.

[8] Enochs E E,Garcia Rozas J R. Gorenstein injective and projective complexes[J]. Comm Algebra,1998,26:1 657-1 674.
[9] Gillespie J. The flat model structure on $Ch(R)$[J]. Tran Amer Math Soc,2004,356(8):3 369-3 390.
[10] Enochs E E,Jenda O M G,Xu J Z. Orthogonality in the category of complexes[J]. Math J Okayama Univ,1996,38:25-46.
[11] Avramov L L,Foxby H B. Homological dimensions of unbounded complexes[J]. J Pure Appl Algebra,1991,71:129-155.
[12] Enochs E E,Garcia Rozas J R. Flat covers of complexes[J]. J Algebra,1998,210:86-102.
[13] Enochs E E,Garcia Rozas J R. Tensor products of complexes[J]. Math J Okayama Univ,1997,39:17-39.
[14] Mahdou N,Tamekkante M. Strongly Gorenstein flat modules and dimensions[J]. Chin Ann Math,2011,32B(4):533-548.
[15] Yang X Y,Liu Z K. Gorenstein projective,injective,and flat complexes[J]. Comm Algebra,2011,39:1 705-1 721.
[16] Colby R R. Rings wich have flat injective modules[J]. J Algebra,1975,35:239-252.
[17] Enochs E E,Jenda O M G. Relative Homological Algebra[M]. Berlin-New York:Walter de Gruyter,2000:214-254.
[18] Ding N Q,Chen J L. The flat dimensions of injective modules[J]. Manuscripta Math,1993,78:165-177.
[19] Holm H,Jogensen P. Cotorsion pairs induced by duality pairs[J]. J Commut Algebra,2009,1:621-633.
[20] Bennis D. Weak Gorenstein global dimension[J]. Int Electron J Algebra,2010,8:140-152.
[21] Enochs E E, Jenda O M G, Torrecillas B. Gorenstein flat modules[J]. Journal of Nanjing University Mathematical Biquarterly,1993,10:1-9.

[责任编辑:丁　蓉]