两类保险业务时保险公司的调节系数和再保险策略

李启才

(南京师范大学数学科学学院,江苏 南京 210023)

[摘要] 考虑保险公司面临两类保险业务下的最优再保险问题.一类保险业务的索赔量分布波动较大,采用方差保费原理.而另一类索赔业务的索赔量分布比较集中,采用期望值保费原理.在破产概率最小化准则下,得到保险公司相应的最优比例和超额损失再保险策略.

[关键词] 保费原理,再保险,调节系数,破产概率

[中图分类号]F830.91 [文献标志码]A [文章编号]1001-4616(2015)04-0042-05

Adjustment Coefficient and Reinsurance Policy Under Two Types Businesses for Insurer

Li Qicai

(School of Mathematical Sciences,Nanjing Normal University,Nanjing 210023,China)

Abstract: This paper discussed a reinsurance problem under two types businesses. The first insurance claims exhibit large fluctuations,the variance premium principle is more suitable than expected premium principle. Whereas,the second claims exhibit central tendency,the expected premium principle should work well. Under the criterion of minimizing the ruin probability,optimal proportional and excess-of-loss reinsurance policies are obtained.

Key words: premium principle,reinsurance,adjustment coefficient,ruin probability

企业风险管理(Enterprise Risk Management,ERM)在当今全球化、技术化、信息化、竞争日趋激烈的复杂商业环境时代,已经成为业界和学术界关注的热点问题.人们意识到企业面临着来自内部和外部的各种风险,只有通过有效的风险管理,才可以减少潜在的不利影响,增加企业的收益.保险公司通过购买再保险,把自身承担的风险部分或全部转移给其他保险公司,可以达到避免巨额损失、分散风险、稳定经营的目的.因此,再保险成为保险公司有效管理和控制风险的重要手段之一.常用的再保险策略有比例再保险和超额损失再保险.利用随机控制理论,Schmidli[1],Taksar 和 Markussen[2]等在期望值保费原理下,研究了破产概率最小化下的最优比例再保险策略.华婷和梁志彬[3],梁志彬和郭军义[4]分别以期望效用最大化和破产概率最小化为目标研究了保险公司最优比例再保险和比例-超额损失组合再保险问题.

多数文献都只研究了单一的保险业务和再保险策略,与其不同,本文考虑保险公司面临两类保险业务时的最优再保险问题.一类业务的索赔风险比较集中,宜采用期望值保费.而另一类业务的索赔风险波动很大,宜采用方差保费.大量文献结果表明,在期望值保费原理下,超额损失再保险总是优于比例再保险(如Bai 和Guo[5]).而Hip和Taksar[6]又表明在扩散风险模型下,当采用方差保费原理时,比例再保险最优.基于上述背景,本文利用扩散过程逼近保险公司的盈余过程,在调节系数最大化下,研究两种业务采用不同保费原理时不同形式的最优再保险策略.文献[7-8]也考虑了类似的双险种业务下的再保险策略问题,但均以期末财富效用最大化为目标,其中[8]仅考虑了相依风险下比例再保险策略.

收稿日期:2014-05-13.

基金项目:江苏省高校自然科学研究项目(13KJD110006)、国家自然科学基金(61304065).

通讯联系人:李启才,博士,讲师,研究方向:随机控制及其应用.E-mail:liqicai@njnu.edu.cn

1 再保险模型

考虑直保公司面临两类索赔的经典风险模型

$$U(t)=u+(c_1+c_2)t-\sum_{i=1}^{N_1(t)}Y_i-\sum_{i=1}^{N_2(t)}Z_i\ , \tag{1}$$

其中,$u=u_1+u_2$ 是保险公司的初始资本,而 c_i 是第 i 类保险业务的保费率,$i=1,2$. 第1类业务的索赔过程 $\sum_{i=1}^{N_1(t)}Y_i$ 与第2类业务的索赔过程 $\sum_{i=1}^{N_2(t)}Z_i$ 为相互独立的两个复合泊松过程,索赔次数过程 $N_i(t)$ 是参数为 λ_i 的泊松过程,$i=1,2$. 为简洁起见,记 Y 为与索赔量 $Y_i,i=1,2,\cdots$,同分布的随机变量,且 Y 的分布函数为 $F(y)$,假定其存在非负的有限的一、二阶矩,其中,$\mu_1=EY$,$\sigma_1^2=EY^2$;记 Z 为与索赔量 $Z_i,i=1,2,\cdots$,同分布的随机变量,且 Z 的分布函数为 $G(z)$,它的一、二阶矩存在均非负有限,其中,$\mu_2=EZ$,$\sigma_2^2=EZ^2$.

直保公司对同一类业务按相同保费原理收取保费和支出再保费. 假定,直保公司第1类业务的索赔波动较大(例如人身伤害险),而第2类业务索赔相对较为集中(例如车险),因此按下列方式收取保费:

业务1:方差保费原理:

$$c_1=\lambda_1\mu_1+\eta_1\lambda_1\sigma_1^2\ , \tag{2}$$

业务2:期望值保费原理:

$$c_2=(1+\eta_2)\lambda_2\mu_2\ , \tag{3}$$

其中,$\eta_i\ (>0)$ 为第 i 线业务的安全载荷系数,$i=1,2$.

基于前述引言所述,直保公司第1类业务通过购买比例再保险转移风险,比例自留水平为 q_t(简洁起见,记为 q),即每笔索赔 Y ,直保公司承担 qY ,剩余的 $(1-q)Y$ 由再保公司承担,其中 $q\in[0,1]$. 第2类业务通过购买超额损失再保险转移风险,自留水平为 a_t(简记为 a),即每笔索赔 Z ,直保公司承担 $\min(Z,a)$,再保公司承担 $Z-\min(Z,a)$,其中 $a\in[0,\infty)$. 记,

$$\mu_2(a)=E\left[\min(Y,a)\right]=\int_0^a[1-G(z)]\mathrm{d}z\ , \tag{4}$$

$$\sigma_2^2(a)=E\left[\min(Y,a)\right]^2=\int_0^a 2z[1-G(z)]\mathrm{d}z\ . \tag{5}$$

直保公司支出的再保费率为:

业务1:方差保费原理:

$$c_1^q=\lambda_1(1-q)\mu_1+\theta_1(1-q)^2\lambda_1\sigma_1^2\ , \tag{6}$$

业务2:期望值保费原理:

$$c_2^a=(1+\theta_2)\lambda_2\mu_2-(1+\theta_2)\lambda_2\mu_2(a)\ , \tag{7}$$

其中,θ_i 为再保公司第 $i\,(i=1,2)$ 类业务的安全载荷系数,不失一般性,我们假定 $\theta_i>\eta_i$,即我们考虑的是非便宜再保险,否则,直保公司可以通过再保所有的索赔风险获得套利.

于是在再保险策略控制下的盈余过程满足下列微分形式:

$$\mathrm{d}U^{q,a}(t)=c(q,a)\mathrm{d}t-\mathrm{d}\left(q\sum_{i=1}^{N_1(t)}Y_i\right)-\mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{N_2(t)}\min(Z_i,a)\right),\quad U^{q,a}(0)=u\ , \tag{8}$$

式中,

$$c(q,a)=c_1-c_1^q+c_2-c_2^a=q\lambda_1\mu_1+(\eta_1-\theta_1(1-q)^2)\lambda_1\sigma_1^2+(\eta_2-\theta_2)\lambda_2\mu_2+(1+\theta_2)\lambda_2\mu_2(a)\ . \tag{9}$$

根据[9],上述盈余过程可以近似为扩散过程

$$\mathrm{d}X^{q,a}(t)=\mu(q,a)\mathrm{d}t+\sigma(q,a)\mathrm{d}W(t)\ , \tag{10}$$

其中,

$$\mu(q,a)=(\eta_1-\theta_1(1-q)^2)\lambda_1\sigma_1^2+(\eta_2-\theta_2)\lambda_2\mu_2+\theta_2\lambda_2\mu_2(a)\ , \tag{11}$$

$$\sigma_2^2(q,a)=q^2\lambda_1\sigma_1^2+\lambda_2\sigma_2^2(a)\ . \tag{12}$$

类似[4],要求保费率 η_1、η_2、θ_1、θ_2 满足使得期望收益 $\mu(q,a)>0$,即保险业务的净利润非负.

定义盈余过程(10)的破产时间为

$$\tau^{q,a}=\inf\left\{t:X^{q,a}(t)\leqslant 0\right\}, \tag{13}$$

最终破产概率为

$$\psi^{q,a}(u)=P(\tau^{q,a}<\infty \mid X^{q,a}(0)=u). \tag{14}$$

2　优化问题

2.1　破产概率和调节系数

首先得出调节系数的表达式以及调节系数与破产概率的关系.

定理1　随机过程 $\left\{\exp\left\{-R(q,a)X^{q,a}(t)\right\},\ t\geqslant 0\right\}$ 是指数鞅过程,且有

$$\psi^{q,a}(u)=\mathrm{e}^{-R(q,a)u}, \tag{15}$$

其中

$$R(q,a)=\frac{2\left[\eta_1-\theta_1(1-q)^2\lambda_1\sigma_1^2+(\eta_2-\theta_2)\lambda_2\mu_2+\theta_2\lambda_2\mu_2(a)\right]}{q^2\lambda_1\sigma_1^2+\lambda_2\sigma_2^2(a)}. \tag{16}$$

证明　由保险盈余过程(10)式,可以得到

$$E\left[\exp\left\{-r(q,a)X^{q,a}(t)-u\right\}\right]=\exp\left\{-r\left[\eta_1-\theta_1(1-q)^2\lambda_1\sigma_1^2+(\eta_2-\theta_2)\lambda_2\mu_2+\theta_2\lambda_2\mu_2(a)\right]+\frac{1}{2}r^2\left[q^2\lambda_1\sigma_1^2+\lambda_2\sigma_2^2(a)\right]\right\}.$$

记

$$g(r)=r\left[\eta_1-\theta_1(1-q)^2\lambda_1\sigma_1^2+(\eta_2-\theta_2)\lambda_2\mu_2+\theta_2\lambda_2\mu_2(a)\right]-\frac{1}{2}r^2\left[q^2\lambda_1\sigma_1^2+\lambda_2\sigma_2^2(a)\right].$$

根据本节的条件,方程 $g(r)=0$ 有唯一正根

$$R(q,a)=\frac{2\left[\eta_1-\theta_1(1-q)^2\lambda_1\sigma_1^2+(\eta_2-\theta_2)\lambda_2\mu_2+\theta_2\lambda_2\mu_2(a)\right]}{q^2\lambda_1\sigma_1^2+\lambda_2\sigma_2^2(a)},$$

从而 $E\left[\exp\left\{-R(q,a)\left(X^{q,a}(t)-u\right)\right\}\right]=1$.

于是 $\left\{\exp\left\{-R(q,a)X^{q,a}(t)\right\},\ t\geqslant 0\right\}$ 是指数鞅.这里的 $R(q,a)$ 就是模型(10)所对应的调节系数(Lundberg指数).因为扩散近似的盈余过程达0以下必先达0,所以利用标准的鞅方法(见[9]),可以直接得出保险盈余模型(10)下的破产概率为 $\psi^{q,a}(u)=\mathrm{e}^{-R(q,a)u}$.

2.2　优化目标

从调节系数和破产概率的关系表达式(15),可以看出最小化破产概率等价于最大化调节系数.我们的目标是求出最优控制(比例再保险和最优超额损失再保险)策略 (q^*,a^*),使得调节系数最大化,从而使得破产概率最小化.

$$R:=R(q^*,a^*)=\sup_{q\in[0,1],a\in[0,+\infty)}R(q,a). \tag{17}$$

结合定理1的证明,知 R 是方程

$$\sup_{q\in[0,1],a\in[0,+\infty)}g(R)=0 \tag{18}$$

的最小正根.于是我们的问题转化为求解模型(18).

3　优化问题的求解

定理2　本文模型下的最优比例再保险自留水平为

$$q^*=\frac{2\theta_1}{2\theta_1+R}, \tag{19}$$

$$a^*=\theta_2/R, \tag{20}$$

式中 R 为保险公司的最优调节系数,即(17)式.

证明　注意到模型(18)中

$$g(R)=R\left[\eta_1-\theta_1(1-q)^2+(\eta_2-\theta_2)\lambda_2\mu_2(a)\right]-\frac{1}{2}R^2\left[q^2\lambda_1\sigma_1^2+\lambda_2\sigma_2^2(a)\right], \tag{21}$$

根据一阶条件

$$\frac{\partial g}{\partial q}=2\theta_1(1-q)\lambda_1\sigma_1^2R-q\lambda_1\sigma_1^2R^2=0, \tag{22}$$

解得第1类业务的最优比例再保险为：$q^*=\dfrac{2\theta_1}{2\theta_1+R}\in(0,1)$.

同理,由一阶条件：

$$\frac{\partial g}{\partial a}=\theta_2\lambda_2[1-G(a)]R-\lambda_2a[1-G(a)]R^2=0, \tag{23}$$

解得第2类业务的最优超额损失再保险为：$a^*=\dfrac{\theta_2}{R}\in(0,\infty)$.

注1 虽然两类业务的索赔相互独立,但两类业务共同影响保险公司的调节系数,而调节系数由两类业务的参数共同决定,所以从最优策略表达式看出,两类保险业务策略相关.可以看出,两类保险业务的最优再保险自留额都随着各自的再保险率增加而增加,这符合直观,因为再保费越高(再保险成本越高),直保公司越倾向自留更多的风险.

注2 为了得出最优策略,必须解出最优的调节系数R,为此需要将最优比例再保险和最优超额损失再保险策略代回方程(18).但这样并不容易得出R,故换下列方法进行.

注意到 $R=\dfrac{\theta_2}{a^*}$,代入最优比例再保险策略,得到

$$q^*=\frac{2\theta_1}{2\theta_1+\theta_2/a^*}, \tag{24}$$

将 $R=\dfrac{\theta_2}{a^*}$, $q^*=\dfrac{2\theta_1}{2\theta_1+\theta_2/a^*}$ 代入方程(18),经整理即得到方程

$$f(a^*)=\left[\eta_1-\frac{\theta_1\theta_2^2}{(2\theta_1a^*+\theta_2)^2}\lambda_1\sigma_1^2+(\eta_2-\theta_2)\lambda_2\mu_2+\theta_2\lambda_2\mu_2(a^*)\right]a^*-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{2\theta_1a^*}{2\theta_1a^*+\theta_2}\right)^2\lambda_1\sigma_1^2+\lambda_2\sigma_2^2(a^*)\right]\theta_2=0. \tag{25}$$

定理3 上述方程(25)中的最优超额损失再保险 a^* 唯一存在,且为正值.

证明 记

$$f(a)=\left[\eta_1-\frac{\theta_1\theta_2^2}{(2\theta_1a+\theta_2)^2}\lambda_1\sigma_1^2+(\eta_2-\theta_2)\lambda_2\mu_2+\theta_2\lambda_2\mu_2(a)\right]a-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{2\theta_1a}{2\theta_1a+\theta_2}\right)^2\lambda_1\sigma_1^2+\lambda_2\sigma_2^2(a)\right]\theta_2,$$

经简单计算有,

$$f(0)=0,\quad f'(0)=(\eta_1-\theta_1)\lambda_1\sigma_1^2+(\eta_2-\theta_2)\lambda_2\mu_2<0,$$

$$f''(a)=\frac{4\theta_1a}{(2\theta_1a+\theta_2)^3}\lambda_1\sigma_1^2+\theta_2\lambda_2[1-G(a)]>0,\quad \lim_{a\to+\infty}f(a)=+\infty,$$

因此方程 $f'(a)=0$ 存在唯一的正根 a^*.

证明了第2类业务的最优超额损失再保险策略 a^* 存在后, a^* 可以由方程(25)利用数值解得到,然后带到(24)中,得到第2类业务最优比例再保险策略,利用最优策略和调节系数的关系,从而可以得到保险公司的最优调节系数

$$R=\frac{\theta_2}{a^*}, \tag{26}$$

以及最小破产概率为

$$\psi(u)=\inf_{q,a}\psi^{q,a}(u)=\mathrm{e}^{-Ru}. \tag{27}$$

至此,完成了最优再保险策略和调节系数及破产概率的求解.

4 数值演示

为了演示最优策略的变化,以下列简单数值分析为例,由于关键是方程(25)中最优超额损失再保险的求解,故仅演示超额损失再保险和破产概率的数值图形,而比例再保险((24)式可得)和调节系数((26)式可得)的图形略去.

例1　设索赔强度 $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\sigma_1=1$, $\mu_1=1$,两类业务的保费率相等 $\eta_1=\eta_2$,记为 η ,再保费率也相等 $\theta_1=\theta_2$,记为 θ . 第2类索赔 Z 服从标准的指数分布,即 $Z\sim Exp(1)$.

图1演示了第2类业务的超额损失再保险随着再保费率 θ 演变的情形. 与注1一致,可以看出随着再保险率 θ 递增,超额损失再保险自留额也递增. 即再保险的成本提高时,保险公司将自留更多的风险. 相反,当保费率 η 增加时,保险公司则转出更多的风险.

图2演示了破产概率(固定外生参数下利用(25)、(26)式可得)随初始盈余演变的情形. 可以看出破产概率在超额损失再保险达到最优值 $a^*=0.550\,5$ 时最小. 图中最小破产概率曲线的参数分别为 $\theta_1=\theta_2=1$, $\eta_1=\eta_2=0.7$,其它参数即例1中设定值. 经计算,此时第1类业务的最优比例再保险自留水平 $q^*=0.524\,0$,最优调节系数 $R=1.816\,5$.

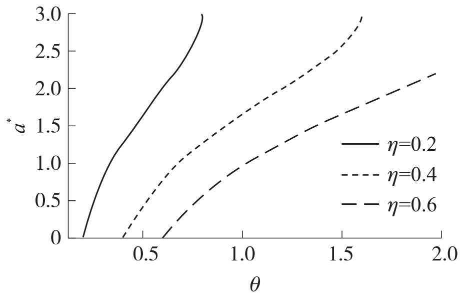

图1　再保费率对超额损失再保险策略的影响

Fig.1　The effect of reinsurance premium rate on XL policy

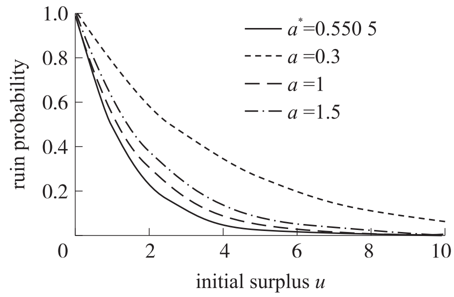

图2　初始盈余对破产概率的影响

Fig.2　The effect of initial surplus on the probability

5　结语

本文用两个独立的复合泊松过程描述保险公司面临的两类索赔风险,考虑一类索赔分布波动较大,而另一类索赔比较集中,因而分别采用方差和期望值保费原理收取(支出)保费(再保费). 使用方差保费原理的第1类业务通过购买比例再保险转移风险,使用期望值保费原理的第2类业务通过购买超额损失再保险转移风险. 利用扩散近似模型,以破产概率最小化为目标,得到了最优比例再保险策略和最优超额损失再保险策略. 两类索赔过程相关形成相依风险时的最优策略问题值得进一步研究.

[参考文献]

[1] SCHMIDLI H. Optimal proportional reinsurance policies in a dynamic setting[J]. Scandinavian actuarial journal, 2001, 1: 55-68.

[2] TAKSAR M, MARKUSSEN C. Optimal dynamic reinsurance policies for large insurance portfolios[J]. Finance and stochastic, 2003, 7: 97-121.

[3] 华 婷,梁志彬. 最大化调节系数的最优比例再保险和破产概率[J]. 南京师大学报(自然科学版),2014,37(2):23-27.

[4] 梁志彬,郭军义. 最优比例与超额损失组合再保险下的破产概率[J]. 数学学报(中文版),2010,53(5):857-870.

[5] BAI L, GUO J. Optimal dynamic excess-of-loss reinsurance and multidimensional portfolio selection[J]. Science China: mathematics, 2010, 53(7): 1 787-1 804.

[6] HIPP B, TAKSAR M. Optimal non-proportional reinsurance control[J]. Insurance: mathematics and economics, 2010, 47(2): 246-254.

[7] 李启才,顾孟迪. 净利润条件约束下拥有两类保险业务时保险公司最优再保险策略[J]. 数学的认识与实践,2015,45(15):196-202.

[8] LIANG Z, YUAN K C. Optimal dynamic reinsurance with dependent risks: variance premium principle[J]. Scandinavian actuarial journal, 2014, 1: 18-36.

[9] GRANDELL J. Aspects of risk theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1991: 1-20.

[责任编辑:丁　蓉]