最大化调节系数的最优比例再保险和破产概率
——扩散逼近模型

华 婷[1],梁志彬[2]

(1.常州工学院数理与化工学院,江苏 常州 213002)
(2.南京师范大学数学科学学院,江苏 南京 210023)

[摘要] 在一类新的保费原理——期望-标准差保费原理下,讨论了扩散逼近(简称为D-A)模型中使得调节系数最大化的最优再保险问题,并且得到了最优再保险策略和最小破产概率的清晰表达式.最后通过一些数例和图表反映了模型中的参数对最优值的影响.

[关键词] 调节系数,扩散逼近,比例保险,破产概率
[中图分类号]O211.63 [文献标志码]A [文章编号]1001-4616(2015)04-0047-05

Optimal Proportional Reinsurance and Ruin Probability to Maximize the Adjustment Coefficient
——Diffusion-Approximation Risk Model

Hua Ting[1],Liang Zhibin[2]

(1.School of Mathematical Sciences and Chemical Engineering,Changzhou Institute of Technology,Changzhou 213002,China)
(2.School of Mathematical Sciences,Nanjing Normal University,Nanjing 210023,China)

Abstract:Using a different premium principle—mean-standard deviation premium principle,we solve the optimal reinsurance problem in the diffusion-approximation (D-A for short) case to maximize the adjustment coefficient. We derive the explicit expressions for the optimal proportional reinsurance strategy and the minimum ruin probability. In the end, some numerical examples are presented to show the impact of model parameters on the optimal strategies.

Key words:adjustment coefficient,diffusion approximation,proportional reinsurance,ruin probability

保险公司在收取保费的同时也将承担支付保额的风险.有时可能会因为支付保额过高而导致破产.因此,怎样采取合理策略(比如:合理的再保险或投资策略)使公司风险达到最小或者收益达到最大是保险公司急需解决的问题.最近,在一些文献中,站在保险人的角度,最优风险控制问题被广泛研究,随机控制理论和相关工具得到了广泛的应用.他们通常在所研究的风险模型中,假设累积索赔过程是复合Poission过程或者是带漂移的布朗运动.在一定的假设条件下,通过最大化或者最小化某个目标函数,最终获得最优策略和值函数的近似值,例如,Browne[1]以最小折现惩罚为最优准则,Schmidli[2-3]以达到最小破产概率(或者达到最大生存概率)为最优准则,考虑了下面的一个或者两个控制变量来使得破产概率达到最小:(1)投资风险资产,(2)购买比例再保险,在扩散逼近模型(D-A模型)中,获得了最优结果的清晰表达式,Gerber and Shiu[4]以最大期望折现分红为最优准则等等.

文献[5-8]都在力求找到使得调节系数最大化的最优再保险策略,而且,大多数都是基于期望保费原理或者是方差保费原理来求得最优的再保险策略.而文献[9]讨论了期望-标准差保费原理下跳扩散模型(J-D模型)中最优再保险问题.本文也是以最大化调节系数为最优准则,同样在期望-标准差保费原理

收稿日期:2014-09-30.
基金项目:国家自然科学基金(11471165).
通讯联系人:梁志彬,教授,博士生导师,研究方向:随机过程在保险金融中的应用、风险管理与精算、随机最优控制.E-mail:05187@njnu.edu.cn

下讨论了D-A模型中的最优再保险问题.

1 模型

在经典风险模型中,盈余过程 $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ 可以写成

$$X_t = u + ct - S_t\,, \tag{1}$$

其中 $u\geqslant 0$ 是初始盈余, c 是保费率, S_t 表示到时间 t 为止的累积索赔额.我们假设 $S_t=\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i$ 是复合Poisson过程,也就是说, $N(t)$ 是具有密度参数为 λ 的齐次Poisson过程. $Y_i,i\geqslant 1$ 是独立同分布,且分布函数为 $F(y)$ 的正值随机变量序列.期望值 $E(Y_i)$ 记为 μ ,矩母函数 $M_Y(r)=Ee^{rY_1}$.索赔次数过程 $N(t)$ 也独立于 $Y_i,i\geqslant 1$.有关经典破产理论的介绍可以参考文献[10].

定义1　期望–标准差保费原理: $c=(1+\alpha)E(X)+\gamma\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$,其中 X 是保险人承担的单位风险, α 和 γ 为非负常数.

很显然,当 $\gamma=0$ 时即为期望保费原理, $\alpha=0$ 时即为标准差保费原理.

文中讨论带干扰布朗运动的风险过程,同时,假设保险人在 t 时刻可以以水平 $q\in(0,1]$ 来购买比例再保险,即,保险人自留 qS_t ,把 $(1-q)S_t$ 转给再保险人.在期望–标准差保费原理下,有 $c=(1+\theta_1)\lambda\mu+\theta_2\sigma$,再保险保费率 $\delta_q=(1-q)\left[(1+\eta_1)\lambda\mu+\eta_2\sigma\right]$,其中 θ_1 、θ_2 是保险人的安全负荷,而 η_1 与 η_2 是再保险人的安全负荷, $\sigma^2=\lambda\mu_2=\lambda EY_i^2$.不失一般性,我们假设 $\eta_1>\theta_1$, $\eta_2>\theta_2$.此时盈余过程可以表示为

$$X_t^q = u + (\theta_2-\eta_2+q\eta_2)\sigma t + (\theta_1-\eta_1+q+q\eta_1)\lambda\mu t + \beta B_t - qS_t\,, \tag{2}$$

其中 $\beta\geqslant 0$ 是常数, $\{B_t,t\geqslant 0\}$ 是一独立于 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 和 $\{Y_i,i\geqslant 1\}$ 的标准布朗运动,扩散项 βB_t 代表累积索赔或保费收入中的不确定的部分[11].

为了满足净利润的条件,也就是说,盈余过程的期望值非负,必须有 $(\theta_2-\eta_2+q\eta_2)\sigma+(\theta_1-\eta_1+q\eta_1)\times\lambda\mu>0$,即 $q>\bar{q}=1-\dfrac{\theta_1\lambda\mu+\theta_2\sigma}{\eta_2\sigma+\eta_1\lambda\mu}$.否则,对于 $u\geqslant 0$ 有 $\psi^q(u)\equiv 1$[12].

本文讨论的是经典风险模型中的扩散逼近模型的最优再保险问题.假设累积索赔过程是带漂移的布朗运动,也就是说

$$\hat{S}_t = at - \sigma W_t\,, \tag{3}$$

这里 $\{W_t,t\geqslant 0\}$ 是另一个标准布朗运动. $\hat{S}_t$ 可以看成是复合Poission过程 S_t 的扩散逼近[10],其中 $a=\lambda\mu$.假设布朗运动 B_t 和 W_t 是相关的,而且他们的相关系数是 ρ ,即 $E(W_tB_t)=\rho t$.

把(2)中的 S_t 用 $\hat{S}_t$ 代替,通过化简,得到以下新的盈余过程

$$\hat{X}_t^q = u + (\theta_2-\eta_2+q\eta_2)\sigma t + (\theta_1-\eta_1+q\eta_1)at + \beta B_t + q\sigma W_t,\quad q\in(\bar{q},1]\,. \tag{4}$$

令 $\tau_D^q=\inf\{t\geqslant 0:\hat{X}_t^q<0\}$ 是D–A模型中的破产时间, $\psi_D^q(u)=P\left(\tau_D^q<\infty\middle|\hat{X}_0^q=u\right)$ 是D–A模型中最终破产概率.

2 最优再保险策略与破产概率

根据鞅方法,我们可以得到以下定理:

定理1　$\left\{e^{-R_D(q)\hat{X}_t^q},t\geqslant 0\right\}$ 过程是鞅.因此

$$\psi_D^q(u) = e^{-R_D(q)u}\,, \tag{5}$$

其中

$$R_D(q) = \frac{2\left[(\theta_2-\eta_2+q\eta_2)\sigma+(\theta_1-\eta_1+q\eta_1)a\right]}{\beta^2+q^2\sigma^2+2\beta q\sigma\rho}\,. \tag{6}$$

证明　根据式(4),不难得 $E\left(\mathrm{e}^{-r\left(\hat{X}_t^q-u\right)}\right)=\mathrm{e}^{\left[-r\left(\theta_2-\eta_2+q\eta_2\right)\sigma-r\left(\theta_1-\eta_1+q\eta_1\right)a+\frac{1}{2}r^2\left(\beta^2+q^2\sigma^2+2\beta q\sigma\rho\right)\right]t}$.

令 $\tilde{g}(r)=-r\left[\left(\theta_2-\eta_2+q\eta_2\right)\sigma+\left(\theta_1-\eta_1+q\eta_1\right)a\right]+\frac{1}{2}r^2\left(\beta^2+q^2\sigma^2+2\beta q\sigma\rho\right)$,等式 $\tilde{g}(r)=0$ 有一个正根:$R_D(q)=\frac{2\left[\left(\theta_2-\eta_2+q\eta_2\right)\sigma+\left(\theta_1-\eta_1+q\eta_1\right)a\right]}{\beta^2+q^2\sigma^2+2\beta q\sigma\rho}$,从而 $E\left(\mathrm{e}^{-R_D(q)\left(\hat{X}_t^q-u\right)}\right)=1$,即 $\left\{\mathrm{e}^{-R_D(q)\hat{X}_t^q},t\geqslant 0\right\}$ 过程是鞅.这里 $R_D(q)$ 是调节系数,或者称为Lundberg指数.

根据标准鞅方法[10],我们能直接得到 $\psi_D^q(u)=\mathrm{e}^{-R_D(q)u}$.证毕.

接下来,我们试图去寻找使得破产概率达到最小的最优再保险策略 q^*,即

$$\psi_D(u):=\inf_{q\in(\bar{q},1]}\psi_D^q(u)=\psi_D^{q^*}(u).$$

根据式(5),可知使破产概率最小的最优再保险策略也是使调节系数最大的最优再保险策略.所以去寻找 q^*,使得 $R_D=R_D\left(q^*\right)=\sup_{q\in(\bar{q},1]}R_D(q)$.

我们发现,当 $r=R_D$ 时,函数 $\tilde{g}(r)$ 是非负的,也就是说 R_D 为以下方程的解

$$\inf_{q\in(\bar{q},1]}\left\{-r\left[\left(\theta_2-\eta_2+q\eta_2\right)\sigma+\left(\theta_1-\eta_1+q\eta_1\right)a\right]+\frac{1}{2}r^2\left(\beta^2+q^2\sigma^2+2\beta q\sigma\rho\right)\right\}=0. \tag{7}$$

对 $\tilde{g}(r)$ 中变量 q 进行求导,得到 $q_{\max}=\left(\frac{\eta_2}{\sigma}+\frac{a\eta_1}{\sigma^2}\right)\frac{1}{r}-\frac{\beta\rho}{\sigma}$,则 $q^*=q_{\max}\wedge 1$.

当 $q^*=q_{\max}<1$,把 $q_{\max}$ 代入等式(7),得到 $R^{+,-}=\frac{B_1\pm\sqrt{B_1^2+\beta^2\left(1-\rho^2\right)\left(a\eta_1+\eta_2\sigma\right)^2}}{\beta^2\sigma\left(1-\rho^2\right)}$,其中 $B_1=\left(\theta_2-\eta_2\right)\sigma^2+a\left(\theta_1-\eta_1\right)\sigma-\eta_2\beta\rho\sigma-a\eta_1\beta\rho$.为使 $\psi_D^q(u)$ 最小,只有正根 R^+ 有效.因此最小破产概率为

$$\psi_D(u)=\mathrm{e}^{-R^+u},$$

最优再保险策略

$$q^*=\left(\frac{\eta_2}{\sigma}+\frac{a\eta_1}{\sigma^2}\right)\frac{1}{R^+}-\frac{\beta\rho}{\sigma},$$

其中

$$R^+=\frac{B_1+\sqrt{B_1^2+\beta^2\left(1-\rho^2\right)\left(a\eta_1+\eta_2\sigma\right)^2}}{\beta^2\sigma\left(1-\rho^2\right)}. \tag{8}$$

当 $q^*=1$ 时,把 $q^*=1$ 代入等式(7),得到

$$R_1=\frac{2\left(\theta_2\sigma+a\theta_1\right)}{\beta^2+\sigma^2+2\beta\rho\sigma}, \tag{9}$$

最小破产概率是 $\psi_D(u)=\mathrm{e}^{-R_1u}$.

因此我们得到

定理2　模型(4)中使得破产概率最小的最优策略是

$$q^*=\left[\left(\frac{\eta_2}{\sigma}+\frac{a\eta_1}{\sigma^2}\right)\frac{1}{R^+}-\frac{\beta\rho}{\sigma}\right]\wedge 1, \tag{10}$$

最小破产概率是

$$\psi_D(u)=\mathrm{e}^{-R_Du}, \tag{11}$$

其中

$$R_D=\begin{cases}R^+,\bar{q}<q^*<1,\\ R_1,q^*=1.\end{cases} \tag{12}$$

定理3　令 $\rho=0$,R_J 是J-D模型中的最大调节系数[9].那么以下结论成立:

$$\psi_D(u)\leqslant\mathrm{e}^{-R_Ju}. \tag{13}$$

证明可以参考文献[13].

注1　从定理3可以看到,Lundberg不等式仍然成立.尽管这意味着 $\psi_D(u)$ 不会太多高估J-D模型中的破产概率 $\psi^{q^*}(u)$,但前者却很有可能低估后者,这在实务中是非常严重而且可怕的.

3　数值分析实例

在这部分,假设索赔额 $\{Y_i\}$ 服从参数为 $1/\mu$ 指数分布,且 $\theta_1=\eta_1=0$. 定义 $\psi_1(u)$ 是J-D模型中当 $q=1$ 的破产概率.

引理1[9]　假设 $\{Y_i\}$ 服从参数为 $1/\mu$ 指数分布,使得J-D模型中调节系数最大的最优策略为:

$$q^*=\left[\frac{1}{\mu}\left(1-\sqrt{\frac{a}{a+a\eta_1+\eta_2\sigma}}\right)/R_J\right]\wedge 1\ , \tag{14}$$

其中

$$R_J=\frac{B_2+\sqrt{B_2^2-2\beta^2\left[\lambda\left(\sqrt{\frac{a+a\eta_1+\eta_2\sigma}{a}}-1\right)-\frac{a+a\eta_1+\eta_2\sigma}{\mu}\left(1-\sqrt{\frac{a}{a+a\eta_1+\eta_2\sigma}}\right)\right]}}{\beta^2} \tag{15}$$

是最大调节系数,当 $q^*<1$. 其中 $B_2=(\theta_2-\eta_2)\sigma+(\theta_1-\eta_1)a$.

当 $q^*=1$,最大调节系数是:

$$R_J=\frac{\mu(\theta_2\sigma+a+a\theta_1)+\frac{1}{2}\beta^2-\sqrt{\left[\mu(\theta_2\sigma+a+a\theta_1)+\frac{1}{2}\beta^2\right]^2-2\beta^2\mu(\theta_2\sigma+a\theta_1)}}{\mu\beta^2}\ . \tag{16}$$

根据等式(16)和[11],可以得到以下结论:

引理2　假设索赔额 $\{Y_i\}$ 服从参数为 $1/\mu$ 指数分布,且 $\beta=1$, $q\equiv 1$,破产概率为:

$$\psi_1(u)=C_1\mathrm{e}^{-r_1u}+C_2\mathrm{e}^{-r_2u}\ , \tag{17}$$

其中

$$C_1=\frac{(\mu r_1-1)r_2}{r_1-r_2}\ ,\ C_2=\frac{(\mu r_2-1)r_1}{r_2-r_1}\ ,$$

$$r_1=\frac{\mu(\lambda\mu+\theta_2\sigma)+\frac{1}{2}-\sqrt{\left[\mu(\lambda\mu+\theta_2\sigma)+\frac{1}{2}\right]^2-2\mu\theta_2\sigma}}{\mu}\ ,$$

$$r_2=\frac{\mu(\lambda\mu+\theta_2\sigma)+\frac{1}{2}+\sqrt{\left[\mu(\lambda\mu+\theta_2\sigma)+\frac{1}{2}\right]^2-2\mu\theta_2\sigma}}{\mu}\ .$$

例1　令 $a=\lambda\mu=3$, $\theta_2=0.3$, $\eta_2=0.4$, $\sigma^2=2\lambda\mu^2=6(\sigma^2=0.16)$. 结果见图1、2.

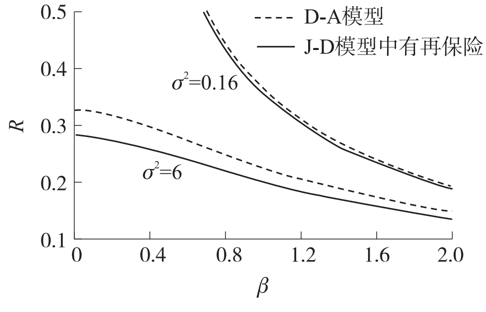

图1　参数 β 对调节系数 R 的影响

Fig.1　The effect of β on R

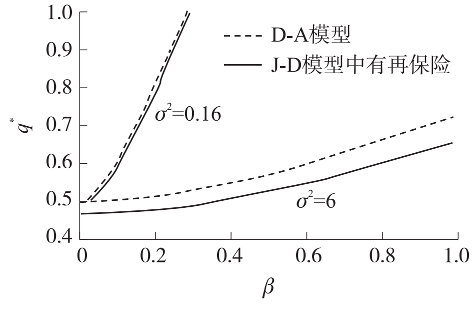

图2　参数 β 对最优再保险策略 q^* 的影响

Fig.2　The effect of β on q^*

从图1可以看出调节系数随着 β 的增加而减小,这意味着累积索赔或保费收入中的不确定部分越多风险越大.此外,正如定理3所证明的,D-A模型中最大调节系数总是要大于J-D模型中的最大调节系数.

并且,$\sigma^2 = 0.16$ 时的调节系数比 $\sigma^2 = 6$ 时要大,也就是说,$\mathrm{Var}(S_1)$ 越大,破产概率的最小上界越大,也就意味着 $S(t)$ 在风险理论里是一个重要的衡量风险的尺度.

从图2可以看出最优再保险策略的水平随着 β 的增大而增大,并且D-A模型中的最优再保险策略要大于J-D模型中的最优再保险策略.这意味着,相比D-A模型,在J-D模型中,保险者转移更多的风险给再保险人.此外,$\sigma^2 = 0.16$ 时的结果总大于 $\sigma^2 = 6$ 时,也就是说,风险越大,保险人愿意转移更多的风险给再保险人.

例2 令 $a = \lambda\mu = 3$,$\theta_2 = 0.3$,$\eta_2 = 0.4$,$\sigma^2 = 2\lambda\mu^2 = 6\left(\sigma^2 = 0.16\right)$,$\beta = 1, q \equiv 1$.结果见图3.

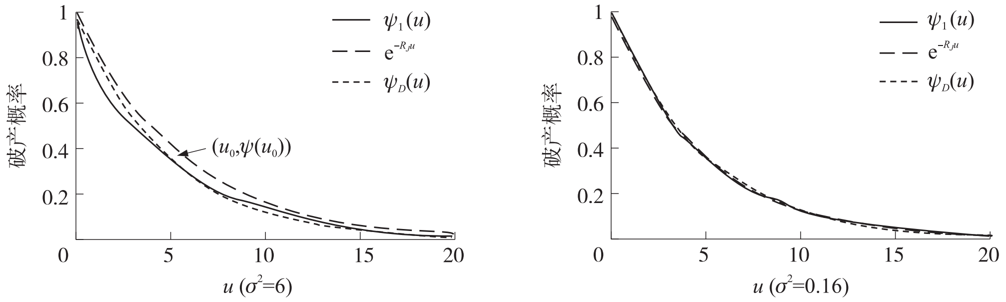

图3 初始盈余 u 对破产概率的影响

Fig.3 The effect of u on ruin probability

图3比较了下面3个结果:破产概率 $\psi_1(u)$,最小指数上界 $e^{-R_J u}$ 和破产概率 $\psi_D(u)$.$\sigma^2 = 6$ 时可以看出,当 $u \geqslant u_0$ 时,$\psi_D(u) < \psi_1(u) < e^{-R_J u}$,这就意味着 $\psi_D(u)$ 低估了 $\psi_1(u)$.这在实际中是非常危险的.因此当 $\mathrm{Var}(S_1)$ 比较大时用 $e^{-R_J u}$ 估计 $\psi_1(u)$ 比用 $\psi_D(u)$ 更安全.但是,$\sigma^2 = 0.16$ 时3种情况下的结论基本是相同的,也就是说当 $\mathrm{Var}(S_1)$ 很小的时候,$\psi_D(u)$ 和 $e^{-R_J u}$ 都可以很好地估计 $\psi_1(u)$.

[参考文献]

[1] BROWNE S. Optimal investment policies for a firm with random risk process:exponential utility and minimizing the probability of ruin[J]. Mathematics of operations research,1995,20(4):937-958.

[2] SCHMIDLI H. Optimal proportional reinsurance policies in a dynamic setting[J]. Scandinavian actuarial journal,2001,1(1):55-68.

[3] SCHMIDLI H. On minimizing the ruin probability by investment and reinsurance[J]. Annals of applied probability,2002,12(3):890-907.

[4] GERBER H,SHIU E. Optimal dividends:analysis with Brownian motion[J]. North American actuarial journal,2004,8(1):1-20.

[5] CENTENO M L. Dependent risks and excess of loss reinsurance[J]. Insurance:mathematics and economics,2005,37(2):229-238.

[6] CENTENO M L,GUERRA M. The optimal reinsurance strategy—the individual claim case[J]. Insurance:mathematics and economics,2010,46(3):450-460.

[7] LIANG Z,GUO J. Optimal proportional reinsurance and ruin probability[J]. Stochastic models,2007,23(2):333-350.

[8] 梁志彬,郭军义.最优比例与超额损失组合再保险下的破产概率[J].数学学报(中文版),2010,53(5):857-870.

[9] 华婷,梁志彬.最大化调节系数的最优比例再保险和破产概率[J].南京师大学报(自然科学版),2014,37(2):23-27.

[10] GRANDELL J. Aspects of risk theory[M]. New York:Springer-Verlag,1991.

[11] DUFRESNE F,GERBER H. Risk theory for the compound Poisson process that is perturbed by diffusion[J]. Insurance:mathematics and economics,1991,10(1):51-59.

[12] ROLSKI T,SCHMIDLI H,SCHMIDT V,et al. Stochastic processes for insurance and finance[M]. New York:John Wiley and Sons,1999.

[13] LIANG Z,GUO J. Upper bound for ruin probabilities under optimal investment and proportional reinsurance[J]. Applied stochastic models in business and industry,2008,24(2):109-128.

[责任编辑:丁 蓉]