几个最优映射存在唯一性定理的统一证明

陈 平

(江苏第二师范学院数学与信息技术学院,江苏 南京 210013)

[摘要] 基于凸锥的性质以及测度理论,本文给出了几个最优映射存在唯一性定理的统一证明.著名的Brenier定理以及其它几个与光线反射、折射有关的费用函数所对应的最优质量运输问题解的存在唯一性定理可以视为本文主要定理的重要推论.与Brenier定理的原始证明比较而言,本文证明过程简洁明了.

[关键词] 凸锥,Brenier定理,最优运输

[中图分类号]O174.12 [文献标志码]A [文章编号]1001-4616(2015)04-0082-04

Several Results About Existence and Uniqueness of Optimal Maps in Transportation Problems:a Unified Scheme Proof

Chen Ping

(School of Mathematics and Information Technology,Jiangsu Second Normal University,Nanjing 210013,China)

Abstract:Based on measure theories and convex cones,we give a unified and concise theorem which proves existence and uniqueness of optimal transport maps. Some interested results can be seen as corollaries of this unified theorem, such as the Brenier's theorem and some Monge's problems with cost functions coming from far field reflector problems and refraction problems.

Key words:convex cone,Brenier's theorem,optimal transportation

最优运输问题(Optimal Transportation Problem)是近年来热门的研究领域之一.它引起了大家的广泛兴趣,其原因在于最优运输理论同时具有理论与应用意义.在应用方面,最优运输的研究领域涉及光线反射、交通运输、城市规划、博弈理论、图像处理中的去噪问题等;在理论方面,最优运输与数学学科中的偏微分方程、几何分析等研究领域有着紧密的联系[1-2].最优运输问题粗略来讲是指:运输前后质量不发生变化,如何在保证费用最低的情况下,实施运输方案.用数学语言描述,即需解决如下变分问题:

$$\min_{T_{\#}\mu=\nu}\int_X c(x,T(x))\mathrm{d}\mu(x)\ , \tag{1}$$

及其松弛问题

$$\min_{\gamma\in\pi(\mu,\nu)}\int_{X\times Y} c(x,y)\mathrm{d}\gamma(x,y)\ . \tag{2}$$

变分问题(1)也被称为Monge问题,其解被称为最优映射,松弛问题(2)的解称为最优计划,其中 μ 和 ν 分别是运输空间 X,Y 上的概率测度,也称为边际运输测度(或者运输测度),描述物质的分布情况;$c(x,y)$ 称为费用函数,表示物质从位置 x 运输到位置 y 产生的运输费用;$T_{\#}\mu=\nu$ 称为质量守恒条件,是指对 Y 上 ν 任意可测集合 A ,有等式 $\nu(A)=\mu(T^{-1}(A))$ 成立;$\gamma\in\pi(\mu,\nu)$ 指 $X\times Y$ 上的满足条件 $\pi^1{}_{\#}\gamma=\mu,\pi^2{}_{\#}\gamma=\nu$ 的概率测度全体,其中 $\pi^1(x,y)=x,\pi^2(x,y)=y$,该条件也称 γ 以 μ 和 ν 为边际运输测度.

运输理论中重要的问题是,考虑由三要素运输测度 μ 和 ν 、运输空间 X 和 Y、费用函数 $c(x,y)$ 共同决定的不同最优运输问题中解的存在性、唯一性和正则性等问题.例如,著名的Brenier定理回答了欧氏空间

收稿日期:2015-04-24.

基金项目:国家自然科学基金青年项目(11401306)、江苏省高校自然科学基金(15KJB110003)、江苏第二师范学院人才培育基金(JSNU2014YB03).

通讯联系人:陈平,博士,研究方向:偏微分方程与几何分析.E-mail:chenping200507@126.com

中以 $|x-y|^2$ 为费用函数时最优映射 T 的存在唯一性，指出Kantorovich对偶位势 $\phi(x)$ 与最优映射 T 存在关系 $\nabla\phi(x)=T(x)$，并证明 $\phi(x)$ 满足Monge-Ampere方程，见文[3].原始Monge问题在1781年被提出，是费用函数为欧氏距离 $|y-x|$ 时的最优运输问题，此时费用函数具有凸性，且非严格凸性导致该问题的复杂性，直至上世纪80年代该问题才被逐步解决.基于运输线分解的方法见文[1-2]，文献[4]给出了基于测度论分析的简化方法，在此文献中，费用函数是更为一般的范数，欧氏距离是其特殊情形之一.此外带凸约束条件的最优运输问题可见文[5-7].流形上的运输问题可见文[8].

本文利用测度理论和凸锥给出了一个最优映射的存在唯一性定理，证明过程简洁明了，Brenier定理可作为本定理的一个重要推论，此外利用本文的结论可以证明其他一些最优质量运输问题中最优映射的存在唯一性，这些费用函数来自光线反射问题与折射问题.

1　预备知识

本文中 μ,ν 是有界开子集 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 上的概率测度，当 μ 关于Lebesgue测度 L^n 绝对连续时，记为 $\mu<<L^n$. $c(x,y):\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ 是下半连续费用函数，具有如下性质：存在上半连续的实值函数 $a(x)\in L^1(\mu)$，$b(y)\in L^1(\nu)$，使得对任意 $(x,y)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$，有不等式 $c(x,y)\geqslant a(x)+b(y)$ 成立.称 $\inf\limits_{\gamma\in\pi(\mu,\nu)}\int c(x,y)\mathrm{d}\gamma(x,y)$ 为最优费用，假设是有限值.

定义1[1-2]　$S\subset\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$，如果对任意 $k\in\mathbf{N}$，以及任意 $(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)\in S$，有下式成立：$\sum\limits_{i=1}^{k}c(x_i,y_i)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{k}c(x_i,y_{\sigma(i)})$，其中 σ 表示 k 个数的任意置换，则称集合具有 $c(x,y)$-循环单调性，简称 c-循环单调性.

定义2[1-2]　设 $\gamma\in\pi(\mu,\nu)$，若存在可测映射 $T:(\mathbf{R}^n,\mu)\to(\mathbf{R}^n,\nu)$ 使得 $(id\times T)_{\#}\mu=\gamma$，其中 $(id\times T)x=(x,Tx)$，则称运输计划 γ 可由映射 T 诱导出来.自然地，映射 T 是满足质量守恒 $T_{\#}\mu=\nu$ 的运输映射.我们称运输计划 γ 集中在一个 γ-可测图上,即指 γ 可由运输映射 T 诱导出来.这里可测图是指具有如下形式的集合：$\varGamma=\{(x,y)|y=Tx,\ x\in S,\ (x,y)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\}$，其中 S 是某一可测集合.

引理1[1-2]　假设 $c(x,y):\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ 是如前所述的下半连续费用函数，且最优费用是有限值，则松弛问题(2)存在解，并且最优计划 γ 集中在 c-循环单调可测集合上，记为 $\varGamma\subset\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$.

定义3[4-5]　设 $y\in\mathbf{R}^n,r>0$，$\gamma\in\pi(\mu,\nu)$ 集中在集合 $\varGamma$ 上，定义如下集合：

$$\varGamma^{-1}(\overline{B(y,r)})=\pi^1(\varGamma\cap\mathbf{R}^n\times\overline{B(y,r)}).$$

换言之，$\varGamma^{-1}(\overline{B(y,r)})$ 由这样一些初始点组成，位于其上的物质被部分或者整体运输到了区域 $\overline{B(y,r)}$.

引理2[5-7]　假定 $\mu<<L^n$，$\gamma\in\pi(\mu,\nu)$ 集中在集合 $\varGamma$ 上，则存在 $\varGamma\cap\mathrm{support}(\varGamma)$ 的 σ-紧子集 $CS(\varGamma)$，使得 γ 集中在其上，并且对其中任意的点对 $(x_0,y_0)\in CS(\varGamma)$，点 x_0 是 $B(y_0,r)$ 的Lebesgue点，即对任意 $r>0$，有

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{L^n(\varGamma^{-1}(\overline{B(y_0,r)})\cap B(x_0,\varepsilon))}{L^n(B(x_0,\varepsilon))}=1.$$

引理3[5-7]　若 $CS(\varGamma)$ 是引理2中的集合，设 (x,y) 是 $CS(\varGamma)$ 中的任意点对，$r>0$，$\delta\in(0,1)$ 为任意常数，$\xi\in\mathbf{R}^n$ 为任意单位向量，则对任意 $\varepsilon>0$，有

$$L^n(\varGamma^{-1}(\overline{B(y,r)})\cap B(x,\varepsilon)\cap C(x,\xi,\delta))>0.$$

其中 $C(x,\xi,\delta)=\{z|\langle z-x,\xi\rangle>(1-\delta)|z-x|,\ z\in\mathbf{R}^n\}$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 中的凸锥，是一个开集合，具有性质 $x\notin C(x,\xi,\delta)$.

引理4[1-2]　假定 γ 是松弛问题(2)的解，即最优运输计划，并且 γ 可由运输映射 T 诱导出来，则 T 是Monge问题(1)的最优运输映射.假定松弛问题(2)的任意最优运输计划可以由运输映射诱导出来，则Monge问题(1)存在唯一的最优映射.

2　主要结果与证明

定理1　假设有如下条件成立

(1) $\mu<<L^n$ 和 ν 是有界开子集 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 上的概率测度，

(2) $c(x,y):\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ 是如前所述的下半连续费用函数,

(3)由 Γ (见引理1)的 c-循环单调性可得:对任意的 (x_1,y_1) , $(x_2,y_2)\in\Gamma$,有 $(x_1-x_2)\cdot(y_1-y_2)\geqslant 0$ (或者 $(x_1-x_2)\cdot(y_1-y_2)\leqslant 0$)成立.

则Monge问题(1)存在唯一解.

证明　由定义2可知要证解的存在性仅需证明任意的最优计划 γ 可由最优映射诱导出来.由引理2可知存在 $\Gamma\cap\mathrm{support}(\Gamma)$ 的 σ-紧子集 $CS(\Gamma)$ 使得引理2结论成立.我们将证明对任意 $x\in\pi^1(CS(\Gamma))$,其中 $\pi^1:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n(x,y)\to x$,存在唯一的 $y\in\mathbf{R}^n$ 使得 $(x,y)\in CS(\Gamma)$,这意味 $CS(\Gamma)$ 是一个 γ-可测图,并且最优计划 γ 集中在 $CS(\Gamma)$ 上(见定义2).

用反证法给出证明,假设结论不成立,则可以找到 $x\in\pi^1(CS(\Gamma))$ 以及具有性质 $y\neq y'$ 的点对 $(x,y)\in CS(\Gamma)$, $(x,y')\in CS(\Gamma)$. 令 $\xi=\dfrac{y'-y}{|y'-y|}$.

当 Γ 的 c-循环单调性表明任意点对 (x_1,y_1) , $(x_2,y_2)\in\Gamma$,有 $(x_1-x_2)\cdot(y_1-y_2)\geqslant 0$ 成立时,由引理3可知

$$L^n(\Gamma^{-1}(\overline{B(y,r)})\cap B(x,\varepsilon)\cap C(x,\xi,\eta))>0\ ,$$

即可找到 $x^\varepsilon\in B(x,\varepsilon)\cap C(x,\xi,\eta)$, $y^r\in B(y,r)$ 使得 $(x^\varepsilon,y^r)\in CS(\Gamma)$ 是 (x,y) 的扰动.以下分析点对 (x^ε,y^r) 和 (x,y') :一方面,注意到向量 $x^\varepsilon-x$ 与 $y'-y^r$ 的方向均与 ξ 的方向接近,因此 $(x-x^\varepsilon)\cdot(y'-y^r)<0$;另一方面,由 Γ 的 c-循环单调性可知 $(x-x^\varepsilon)\cdot(y'-y^r)\geqslant 0$.得到一对矛盾.

当 Γ 的 c-循环单调性表明任意点对 (x_1,y_1) , $(x_2,y_2)\in\Gamma$,有 $(x_1-x_2)\cdot(y_1-y_2)\leqslant 0$ 成立,则由引理3可知

$$L^n(\Gamma^{-1}(\overline{B(y,r)})\cap B(x,\varepsilon)\cap C(x,-\xi,\eta))>0\ .$$

即可找到 $x^\varepsilon\in\Gamma^{-1}(\overline{B(y,r)})\cap B(x,\varepsilon)\cap C(x,-\xi,\eta)$, $y^r\in B(y,r)$ 使得 $(x^\varepsilon,y^r)\in CS(\Gamma)$.以下分析点对 (x^ε,y^r) 和 (x,y') :一方面,注意到向量 $x-x^\varepsilon$ 与 $y'-y^r$ 的方向均与 ξ 的方向接近,因此 $(x-x^\varepsilon)\cdot(y'-y^r)>0$;另一方面,由 Γ 的 c-循环单调性可知 $(x-x^\varepsilon)\cdot(y'-y^r)\leqslant 0$.得到矛盾.

综上所述,假设不成立,命题得证.

最后,因为任意最优计划可由最优映射诱导出来,由引理4可得最优映射的唯一性.

利用定理1可证明著名的Brenier定理[3].

推论1　设 $\mu<<L^n$ 和 ν 是有界开子集 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 上的Borel概率测度,则Monge问题: $\min\limits_{T_\#\mu=\nu}\int_X|x-T(x)|^2\mathrm{d}\mu(x)$ 存在唯一解.

证明　由引理1可知松弛问题(2)存在最优计划 γ .对任意 (x_1,y_1) , $(x_2,y_2)\in\Gamma$,由 $c(x,y)$ -循环单调性可得:

$$\left|x_1-y_1\right|^2+\left|x_2-y_2\right|^2\leqslant\left|x_1-y_2\right|^2+\left|x_2-y_1\right|^2\ .$$

计算可得:

$$(x_1-x_2)\cdot(y_1-y_2)\geqslant 0\ .$$

再由定理1可证明最优映射的存在唯一性.

接下来,我们处理费用函数为 $c(x,y)=-\log(1-x\cdot y)$ 的最优运输问题,该函数与光线反射问题有关.文[9]指出远场反射问题是一个最优运输问题.

推论2　设 $\mu<<L^n$, ν 是单位开球 $B_1=\{x\mid |x|<1,x\in\mathbf{R}^n\}$ 上的Borel概率测度,则Monge问题 $\min\limits_{T_\#\mu=\nu}\int_{B_1}-\log(1-x\cdot T(x))\mathrm{d}\mu(x)$ 存在唯一解.

证明　由引理1可知对应的松弛问题(2)存在最优计划 γ .对任意两对点 (x_1,y_1) , $(x_2,y_2)\in\Gamma$,由 $c(x,y)$ -循环单调性可得:

$$-\log(1-x_1\cdot y_1)-\log(1-x_2\cdot y_2)\leqslant-\log(1-x_1\cdot y_2)-\log(1-x_2\cdot y_1)\ .$$

计算可得:

$$\begin{aligned}&(1-x_1\cdot y_1)(1-x_2\cdot y_2)\geqslant(1-x_1\cdot y_2)(1-x_2\cdot y_1),\\&(x_1-x_2)(y_1-y_2)\leqslant 0.\end{aligned}$$

再由定理1可证明最优映射的存在唯一性．

接下来考虑的费用函数与文[10]分析的光线折射问题有关．该问题为：已知两种物质Ⅰ，Ⅱ的折射系数分别为n_1,n_2，点光源O位于物质Ⅰ中，光线从O出发，行经点$x\in\Omega$处（仍位于物质中Ⅰ）时，具有强度为$f(x)$．构建折射面N，使得两种物质Ⅰ，Ⅱ分开，并且使得所有经由折射面N折射到物质Ⅱ中的光线其方向属于给定集合Ω^*．作者将该折射问题转换成从一个最优运输问题并给出证明，费用函数与反射系数$k=n_2/n_1$有关．具体地，当$0<k<1$时，费用函数为$c(x,y)=-\log(1-kx\cdot y)$．当$k>1$时，费用函数为$c(x,y)=\log(kx\cdot y-1)$．

推论3　设$\mu<<L^n$，ν是单位开球$B_1=\{x\,|\,|x|<1,x\in\mathbf{R}^n\}$上的Borel概率测度，则分别以$c(x,y)=-\log(1-kx\cdot y)$（$0<k<1$），$c(x,y)=\log(kx\cdot y-1)$（$k>1$）为费用函数的Monge问题（1）存在唯一解．

证明　由引理1可知对应的松弛问题（2）存在最优计划γ．设(x_1,y_1)，$(x_2,y_2)\in\Gamma$为任意两对点．

由$-\log(1-kx\cdot y)$-循环单调性可得：

$$-\log(1-kx_1\cdot y_1)-\log(1-kx_2\cdot y_2)\leqslant-\log(1-kx_1\cdot y_2)-\log(1-kx_2\cdot y_1).$$

计算可得：

$$(1-kx_1\cdot y_1)(1-kx_2\cdot y_2)\geqslant(1-kx_1\cdot y_2)(1-kx_2\cdot y_1),$$
$$(x_1-x_2)\cdot(y_1-y_2)\leqslant 0.$$

而由$\log(kx\cdot y-1)$-循环单调性可得：

$$\log(kx_1\cdot y_1-1)+\log(kx_2\cdot y_2-1)\leqslant\log(kx_1\cdot y_2-1)+\log(kx_2\cdot y_1-1).$$

直接计算可得：

$$(kx_1\cdot y_1-1)(kx_2\cdot y_2-1)\leqslant(kx_1\cdot y_2-1)(kx_2\cdot y_1-1),$$
$$(x_1-x_2)\cdot(y_1-y_2)\geqslant 0.$$

再由定理1可证明最优映射的存在唯一性．

[参考文献]

[1]　AMBROSIO L, GIGLI N. A user's guide to optimal transport[M]. Berlin Heidelberg: Springer, 2013: 1-155.

[2]　VILLANI C. Optimal transportation, old and new[M]. Berlin Heidelberg: Springer, 2008.

[3]　BRENIER Y. Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions[J]. Communications on pure and applied mathematics, 1991, 44: 375-417.

[4]　CHAMPION T, DE PASCALE L. The monge problem in $\mathbf{R}^d$[J]. Duke mathematical journal, 2011, 157(3): 551-572.

[5]　JIMENEZ C, SANTAMBROGIO F. Optimal transportation for a quadratic cost with convex constraints and applications[J]. Journal de mathématiques pures et appliquées, 2012, 98(1): 103-113.

[6]　CHEN P, JIANG F D, YANG X P. Two dimensional optimal transportation problem for a distance cost with a convex constraint[J]. ESAIM: Control, optimisation and calculus of variations, 2013, 19(4): 1064-1075.

[7]　CHEN P, JIANG F D, YANG X P. Optimal transportation in $\mathbf{R}^n$ for a distance cost with a convex constraint[J]. Zeitschrift füer angewandte mathematik und physik, 2015, 66(3): 587-606.

[8]　DU S Z, LI Q R. Positivity of Ma-Trudinger-Wang curvature on Riemannian surfaces[J]. Calculus of variations and partial differential equations, 2014, 51(3/4): 495-523.

[9]　WANG X J. On the design of a reflector antenna Ⅱ[J]. Calculus of variations and partial differential equations, 2004, 20(3): 329-341.

[10]　GUTIÉRREZ C E, HUANG Q. The refractor problem in reshaping light beams[J]. Archive for rational mechanics and analysis, 2009, 193(2): 423-443.

[责任编辑：陈　庆]