doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2016.01.003

3类3-正则图中的完美对集数

唐保祥[1],任 韩[2]

(1.天水师范学院数学与统计学院,甘肃 天水 741001)
(2.华东师范大学数学系,上海 200062)

[摘要] Lovász L 和 Plummer M 提出了一个猜想:任意 2-边连通图至少有指数多个完美对集.这个猜想至今没有被证明,也没有被否定.本文用划分、求和,再嵌套递推的方法给出了 3 类特殊图完美对集数目的显式表达式,从而验证了 Lovász L 和 Plummer M 猜想在这 3 类图上的正确性.

[关键词] 完美对集,线性递推式,2-边连通图,3-正则图
[中图分类号]O157.5 [文献标志码]A [文章编号]1001-4616(2016)01-0021-04

The Number of Perfect Matchings in Two Types of 3-Regular Graph

Tang Baoxiang[1],Ren Han[2]

(1.School of Mathematics and Statistics,Tianshui Normal University,Tianshui 741001,China)
(2.Department of Mathematics,East China Normal University,Shanghai 200062,China)

Abstract:Lovász and Plummer proposed a conjecture on this problem:every 2-edge-connected cubic graph has at least exponential perfect matchings. This conjecture has not been proved or denied. In this paper,by applying differentiation, summation and the re-nested recursive method,several counting formulas of the perfect matching for three specific types of graphs are given. And the results indicate that the conjecture of Lovász and Plummer conjecture is true in the case of the three types of graphs.

Key words:perfect matching,linear recurrence relation,2-edge connected,3-regular graph

Lovász L 和 Plummer M 在文献[1]中提出一个猜想:任意 2-边连通图至少有指数多个完美对集.文献[2-4]中证实,存在一些 2-边连通 3-正则的图类,它们都有指数多个不同的完美对集.本文给出了 3 类图,其完美对集数目也是指数多个.

定义[1] 若图 G 的两个完美对集 M_1 和 M_2 中至少有一条边不同,则称 M_1 和 M_2 是 G 的两个不同的完美对集.

设 n 个长为 6 的圈记为 $C_6^i=u_{i1}u_{i2}u_{i3}u_{i4}u_{i5}u_{i6}u_{i1}\,(i=1,2,...,n)$,连接圈 C_6^i 与 C_6^{i+1} 的顶点 u_{i2} 与 $u_{i+1,1}$,u_{i3} 与 $u_{i+1,6}$,$u_{i,4}$ 与 $u_{i+1,5}\,(i=1,2,...,n-1)$,再连接圈 C_6^1 与 C_6^n 的顶点 u_{16} 与 u_{n3},连接 u_{11} 与 u_{15},连接 u_{n2} 与 u_{n4},所得到的图记为 $3-nC_6$,如图 1 所示.

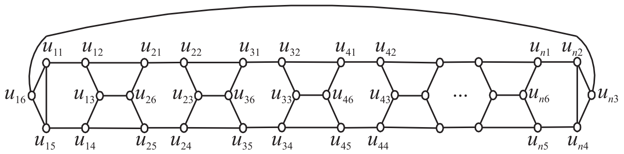

图1 $3-nC_6$图

Fig.1 Figure of $3-nC_6$

设 n 棵 2 个 2 度顶点,4 个 1 度顶点的树记为 T^i,其顶点集为 $V(T^i)=\{u_{i1},u_{i2},u_{i3},v_{i1},v_{i2},v_{i3}\}\,(i=1,2,\cdots,n)$.连接树 T^i 的顶点 u_{i2} 与 u_{i3},v_{i2} 与 $v_{i3}\,(i=1,2,\cdots,n)$;连接树 T^i 与 T^{i+1} 的顶点 u_{i2} 与 $u_{i+1,3}$,v_{i2} 与 $v_{i+1,3}$

收稿日期:2015-03-17.
基金项目:国家自然科学基金项目(11171114).
通讯联系人:唐保祥,教授,研究方向:图论和组合数学.E-mail:tbx0618@sina.com

$(i=1,2,\cdots,n-1)$；再连接树 T^1 的顶点 u_{13} 与 v_{13}，树 T^n 的顶点 u_{n2} 与 v_{n2}，这样所得的图记为 $2-nT$，如图 2 所示．

设 n 个长为 4 的圈记为 $C_4^i=u_{i1}u_{i2}u_{i3}u_{i4}u_{i1}(i=1,2,\cdots,n)$，连接圈 C_4^i 与 C_4^{i+1} 的顶点 u_{i4} 与 $u_{i+1,1}$，u_{i2} 与 $u_{i+1,3}(i=1,2,\cdots,n-1)$，再连接圈 C_4^1 的顶点 u_{11} 与 u_{13}，圈 C_4^n 的顶点 u_{n4} 与 u_{n2}，得到的图记为 $2-nC_4$，如图 3 所示．

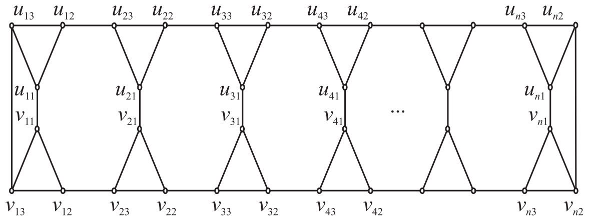

图2　2-*nT*图

Fig.2　Figure of 2-*nT*

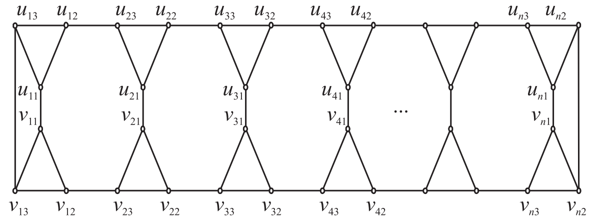

图3　2-*nC*₄图

Fig.3　Figure of 2-*nC*₄

1　主要结果及其证明

定理 1　$\sigma(n)$ 表示图 $3-nC_6$ 的完美对集的数目，则 $\sigma(n)=3^n+1$．

证明　图 $3-nC_6$ 是 3-正则 3 边连通图，显然存在完美对集．欲求 $\sigma(n)$，下面定义图 G_1、G_2、G_3，并分别求出它们的完美对集的数目．图 $3-nC_6$ 删除边 $u_{11}u_{15}$，删除顶点 u_{n3} 后得到的图记为 G；将路 $u_1u_2u_3$ 的顶点 u_1、u_2、u_3 分别与图 G 的顶点 u_{11}、u_{16}、u_{15} 连接得到的图记为 G_1；图 $3-nC_6$ 删除边 $u_{11}u_{15}$，$u_{16}u_{n3}$ 后得到的图记为 G'；将路 u_1u_2 的顶点 u_1、u_2 分别与图 G' 的顶点 u_{11},u_{16} 连接得到的图记为 G_2；将路 u_1u_2 的顶点 u_1,u_2 分别与图 G' 的顶点 u_{16}、u_{15} 连接得到的图记为 G_3；图 G_1、G_2、G_3 如图 4~6 所示．显然图 G_1、G_2、G_3 都存在完美对集，且 $G_2\cong G_3$.

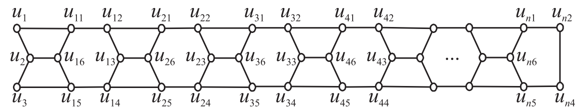

图4　*G*₁图

Fig.4　Figure of *G*₁

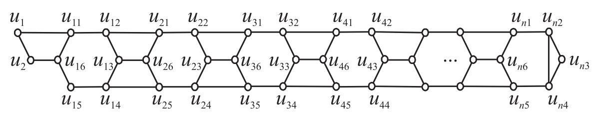

图5　*G*₂图

Fig.5　Figure of *G*₂

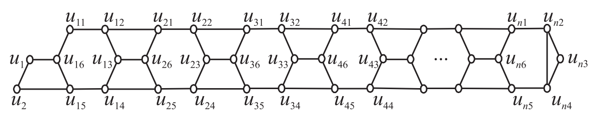

图6　*G*₃图

Fig.6　Figure of *G*₃

设图 G_1、G_2、G_3 的完美对集数分别为 $a(n)$、$b(n)$、$c(n)$，则 $b(n)=c(n)$．

图 G_1 的完美对集数按饱和顶点 u_1 可划分如下 3 种情形求得．

情形 1　由 $a(n)$ 的定义，图 G_1 包含边 u_1u_{11}、u_2u_{16}、u_3u_{15} 的完美对集数为 $a(n-1)$．

情形 2　由 $a(n)$ 的定义，图 G_1 包含边 u_1u_{11}、u_2u_3、$u_{16}u_{15}$ 的完美对集数为 $a(n-1)$．

情形 3　由 $a(n)$ 的定义，图 G_1 包含边 u_1u_2、$u_{11}u_{16}$、u_3u_{15} 的完美对集数为 $a(n-1)$．

综上所述，得线性递推式 $a(n)=3a(n-1)$．

易知上述递推式的解为

$$a(n)=3^n. \tag{1}$$

图 G_2 的完美对集数按饱和顶点 u_1 可划分如下 3 种情形求得 .

情形 1　由 $b(n)$ 的定义，图 G_2 包含边 u_1u_{11} 、u_2u_{16} 、$u_{14}u_{15}$ 的完美对集数为 $b(n-1)$.

情形 2　由 $c(n)$ 的定义，图 G_2 包含边 u_1u_2 、$u_{11}u_{12}$ 、$u_{16}u_{15}$ 的完美对集数为 $c(n-1)$ ，又 $b(n)=c(n)$ ，所以 $c(n-1)=b(n-1)$.

情形 3　由 $b(n)$ 的定义，图 G_2 包含边 u_1u_2 、$u_{11}u_{16}$ 、$u_{14}u_{15}$ 的完美对集数为 $b(n-1)$.

综上所述，得线性递推式 $b(n)=3b(n-1)$.

上述递推式的解为

$$b(n)=3^n . \tag{2}$$

图 $3-nC_6$ 的完美对集数按饱和顶点 u_{16} 可划分如下 4 种情形求得：

情形 1　图 $3-nC_6$ 的完美对集包含边 $u_{16}u_{n3}$、$u_{11}u_{12}$、$u_{14}u_{15}$ ，则该完美对集一定包含边 $u_{i3}u_{i+1,6}$、$u_{i3}u_{i+1,4}$、$u_{i+1,1}u_{i+1,2}$、$u_{i+1,4}u_{i+1,5}$ ，$i=1,2,\cdots,n-1$ ，所以图 $3-nC_6$ 包含边 $u_{16}u_{n3}$、$u_{11}u_{12}$、$u_{14}u_{15}$ 的完美对集恰有一个 .

情形 2　由 $a(n)$ 的定义，图 $3-nC_6$ 包含边 $u_{16}u_{n3}$、$u_{11}u_{15}$ 的完美对集数为 $a(n-1)$.

情形 3　由 $b(n)$ 的定义，图 $3-nC_6$ 包含边 $u_{11}u_{16}$、$u_{14}u_{15}$ 的完美对集数为 $b(n-1)$.

情形 4　由 $c(n)$ 的定义，图 $3-nC_6$ 包含边 $u_{16}u_{15}$、$u_{11}u_{12}$ 的完美对集数为 $c(n-1)$ ，又 $b(n)=c(n)$ ，所以 $c(n-1)=b(n-1)$.

综上所述，

$$\sigma(n)=a(n-1)+2b(n-1)+1 , \tag{3}$$

由式（1）~（3）得 $\sigma(n)=3^n+1$.

定理 2　$\tau(n)$ 表示图 $2-nT$ 的完美对集的数目，则 $\tau(n)=2^{n+1}$.

证明　图 $2-nT_2$ 是 2 边连通 3 正则图，显然存在完美对集 . 为了求 $\tau(n)$ ，先定义两个图 G_4 、G_5 ，并分别求出它们的完美对集的关系式 . 删除图 $2-nT_2$ 的边 $u_{13}v_{13}$ 得到的图记为 G_4 ；把路 $u_1u_2v_1v_2$ 的顶点 u_1 、v_2 分别与 G_4 的顶点 u_{13}、v_{13} 连接得到的图记为 G_5 . 图 G_4 、G_5 如图 7~8 所示 .

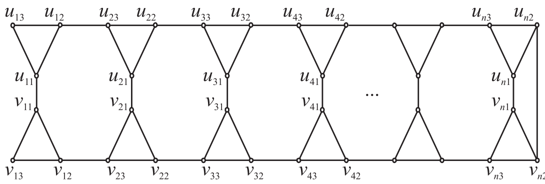

图7　G_4图

Fig.7　Figure of G_4

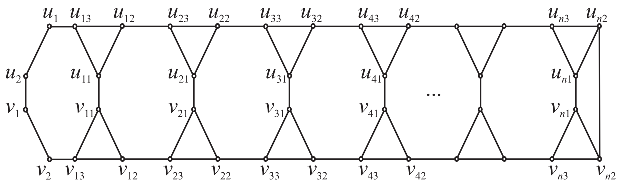

图8　G_5图

Fig.8　Figure of G_5

设图 G_4 、G_5 的完美对集数分别为 $d(n)$ 、$e(n)$.

图 G_5 的完美对集数按饱和顶点 u_2 可划分如下 2 种情形求得：

情形 1　由 $d(n)$ 的定义，图 G_5 包含边 u_1u_2 、v_1v_2 的完美对集数为 $d(n)$.

情形 2　由 $e(n)$ 的定义，图 G_5 包含边 u_2v_1 、u_1u_{13} 、v_2v_{13} 的完美对集数为 $e(n-1)$.

故

$$e(n)=d(n)+e(n-1) . \tag{4}$$

图 $2-nT$ 的完美对集数按饱和顶点 u_{13} 可划分如下 3 种情形求得：

情形 1　由 $d(n)$ 的定义，图 $2-nT$ 包含边 $u_{12}u_{13}$ 、$u_{11}v_{11}$ 、$v_{12}v_{13}$ 的完美对集数为 $d(n-1)$.

情形 2　由 $e(n)$ 的定义，图 $2-nT$ 包含边 $u_{11}u_{13}$ 、$u_{12}u_{23}$ 、$v_{11}v_{13}$ 、$v_{12}v_{23}$ 的完美对集数为 $e(n-2)$.

情形 3　由 $e(n)$ 的定义，图 $2-nT$ 包含边 $u_{13}v_{13}$ 的完美对集数为 $e(n-1)$.

故

$$\tau(n)=d(n-1)+e(n-1)+e(n-2) . \tag{5}$$

由式（4）和（5），得

$$\tau(n)=2e(n-1) , \tag{6}$$

式（6）的解为 $\tau(n)=2^{n-1}e(1)$.

因为 $e(1)=4$ ，所以 $\tau(n)=2^{n+1}$.

定理 3 $\varphi(n)$ 表示图 $2-nC_4$ 的完美对集的数目，则 $\varphi(n)=2^n+1$.

证明 图 $2-nC_4$ 是 2 边连通 3 正则图，显然存在完美对集 . 为了求 $\varphi(n)$ ，删除图 $2-nC_4$ 的边 $u_{11}u_{13}$ 得到的图记为 G_6 ，如图 9 所示 . 设 G_6 的完美对集数为 $h(n)$.

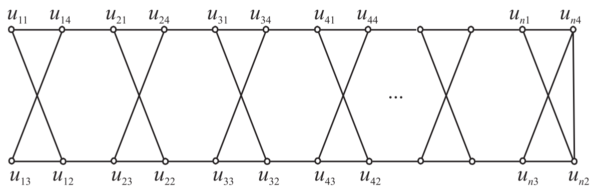

图9 G_6图

Fig.9 Figure of G_6

图 G_6 的完美对集数 $h(n)$ 按饱和顶点 u_{11} 可划分如下 2 种情形求得：

情形 1 由 $h(n)$ 的定义，图 G_6 包含边 $u_{11}u_{14}$ 、$u_{12}u_{13}$ 的完美对集数为 $h(n-1)$.

情形 2 由 $h(n)$ 的定义，图 G_6 包含边 $u_{11}u_{12}$ 、$u_{13}u_{14}$ 的完美对集数为 $h(n-1)$.

故 $h(n)=2h(n-1)$. 易知线性递推式（7）的解为

$$h(n)=2^n . \tag{7}$$

图 $2-nC_4$ 的完美对集数按饱和顶点 u_{11} 可划分如下 3 种情形求得：

情形 1 由 $h(n)$ 的定义，图 $2-nC_4$ 包含边 $u_{11}u_{14}$ 、$u_{12}u_{13}$ 的完美对集数为 $h(n-1)$.

情形 2 由 $h(n)$ 的定义，图 $2-nC_4$ 包含边 $u_{11}u_{12}$ 、$u_{13}u_{14}$ 的完美对集数为 $h(n-1)$.

情形 3 图 $2-nC_4$ 的完美对集包含边 $u_{11}u_{13}$ ，一定包含边 $u_{i4}u_{i+1,1}$ 、$u_{i2}u_{i+1,3}(i=1,2,\cdots,n-1)$ 、$u_{n4}u_{n2}$ ，所以图 $3-nC_6$ 包含边 $u_{11}u_{13}$ 的完美对集恰有一个 . 故 $\varphi(n)=2h(n-1)+1$. （8）

由（7）和（8）式得，$\varphi(n)=2^n+1$.

［参考文献］

［1］ LOVÁSZ L，PLUMMER M. Matching Theory［M］. New York：North-Holland Press，1986.

［2］ KRÁL D，SERENI J S，STIEBITZ M. A new lower bound on the number of perfect matchings in cubic graphs［J］. Discrete Math，2009，23：1 465-1 483.

［3］ KARDOS F，KRÁL D，MISKUF J，et al. Fullerene graphs have exponentially many perfect matchings［J］. Journal of Mathematical Chemistry，2009，46：443-447.

［4］ 唐保祥，任韩 . 几类图完美匹配的数目［J］. 南京师大学报（自然科学版），2010，33（3）：1-6.

［责任编辑：陆炳新］