

# 圣维南原理与双层平板复合材料的层间弹性耦合

高 蓉, 陶 进, 张 宁

(南京师范大学磁电子学实验室, 江苏 南京 210023)

**[摘要]** 研究了铁磁(电)/弹性介质双层复合材料中的层间弹性耦合, 分析了圣维南原理(或局部作用原理)对理想弹性耦合条件下弹性介质内应力分布的影响. 从弹性力学基本方程出发得到了切应力和张应力在弹性体内分布的解析模型. 建议了一种用于研究局部作用原理的实验方法, 该实验方法以应力双折射效应为基础, 结合磁(电)致伸缩, 构成乘积效应材料, 并辅以应力计检测. 分析发现, 实验与理论结果基本一致.

**[关键词]** 圣维南原理, 多层复合材料(膜), 弹性介质, 电光效应

**[中图分类号]** O343.2 **[文献标志码]** A **[文章编号]** 1001-4616(2016)01-0057-05

## Saint-Venant's Principle and Interlayer Elastic Coupling in Bilayer Composites of Ferroelectric/Elastic Medium

Gao Rong, Tao Jin, Zhang Ning

(Magnetoelectronic Lab, Nanjing Normal University, Nanjing 210023, China)

**Abstract:** The interlayer elastic coupling in bilayer composite of ferromagnetic and elastic medium was studied. The effect of Saint-Venant's principle on the stress distribution in the elastic material under the condition of interfacial elastic coupling was derived based on the basic equations of elasticity. An experimental method has been suggested for investigating the local-action effect. The method is based on stress-birefringence effects, combined with magnetostriction (or electrostriction) effects to compose the materials of product effects, and assisted by standard stress meter detection. Analysis showed that the theoretical calculations in general accord with the experimental results.

**Key words:** Saint-Venant's principle, multilayer composite, elastic medium, electro-optical effect

薄膜或平板状多层复合材料, 例如金属多层膜(或超晶格材料)<sup>[1-3]</sup>、层状复合磁电效应材料及层状复合电光效应材料<sup>[4-7]</sup>等, 均具有以层间弹性耦合为基础的乘积效应. 在这样的复合材料中, 施力层通常作用有彻体力, 例如磁致伸缩或电致伸缩所引起的应力. 如果该彻体力沿平行于薄膜或平板表面, 则做为受力层的弹性介质将受到平行于表面的面力作用. 迄今, 在探讨层间弹性耦合时都倾向于认为上述面力在弹性介质层内引起的应力分布是均匀的<sup>[8-11]</sup>. 在这一假设下经常会得到某些与实验难以相符的理论结果. 例如, 在计算层状复合材料的磁电效应时, 发现理论值经常是实验结果的3倍<sup>[12-13]</sup>, 而实验观察层状复合材料电光效应时发现电光延迟随光束入射点与粘结界面间距离的增加而减小<sup>[7]</sup>. 显然, 这些现象均难以符合受力层中应力均匀分布的假设. 事实上, 根据“局部作用”原理, 即圣维南原理<sup>[14-15]</sup>, 在平行于表面的面力作用下, 弹性介质内平行于表面的应力沿垂直于表面方向是非均匀分布的.

圣维南(Saint-Venant)原理是弹性力学的基本原理之一. 其表述为: 分布于弹性体上一小块面积(或体积)内的载荷所引起的物体内部应力, 在离载荷作用区稍远的地方, 基本上只同载荷的合力和合力矩有关; 载荷的具体分布只影响载荷作用区附近的应力分布. 这一原理的正确性已被大量实验事实所证明. 圣维南原理是定性地说明确弹性力学中一大批局部效应的第一个原理, 在实践和理论上都有重要意义. 在解决具体问题时, 如果只关心远离载荷处的应力, 可视计算或实验的方便, 在保持合力和合力矩不变的情况下采用

收稿日期: 2015-01-16.

基金项目: 国家自然科学基金(面上)项目(51277098).

通讯联系人: 张宁, 教授, 研究方向: 凝聚态物理. E-mail: zhangning@njnu.edu.cn

等效均匀分布载荷.但在载荷作用区附近,须考虑局部作用效应.而薄膜型层状复合材料中的弹性介质层沿厚度方向正是位于“载荷作用区附近”,故由于局部作用效应而可能导致不均匀应力分布.根据经验知道,离界面距离越远,平行于表面的应力也越小.但该应力分布随观察点与界面的距离 $x$ 的增加而变化的规律至今并不清楚,概因圣维南原理尚未得到彻底证明,或者说局部作用效应尚不能被严格量化<sup>[16-20]</sup>.

在弹性力学的边值问题中,严格地说内应力分布应逐点满足面力给定的边界条件及位移给定的边界条件,但在数学上要给出完备的边界条件或者完全满足边界条件的解答是非常困难的,这是局部效应难以被量化的根本原因.然而,最近我们发现针对平板型层状复合材料,做某些合理近似后,可以给出一组完备的边界条件,并且可以获得应力分布的解析解.

## 1 面力作用下的局部应力分布的物理图像及实验证据

设有均匀且各向同性的弹性平板介质,其左右表面作用有共线(同轴)点平衡力系 $F$ ,如图1(a)所示.所谓点外力系指力的作用面积 $S$ 可略,则点平衡力系在平板内所形成的“影响”应是轴对称的.根据圣维南原理,如果点平衡力系 $F$ 的作用范围是有限的,则其作用范围应该是以 $F$ 的作用线为轴心的旋转体.可称其为“圣维南(应力)旋转体”.该旋转体内平行于 $F$ 作用线的线段长度应理解为该线段的延长线与平板板面相交的那一点所对应的平行于 $F$ 作用线的应力的大小.该旋转体的最大半径给出局部作用效应的尺度,可称为“圣维南长度”,并记作 $h$ .

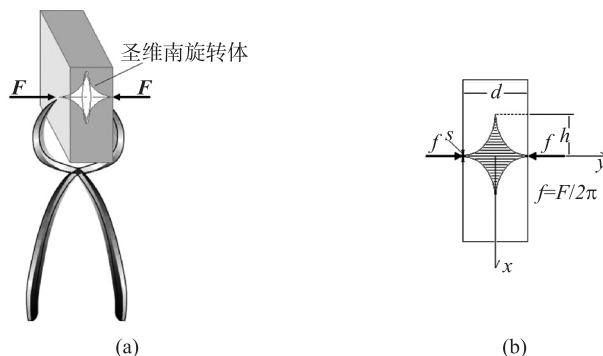


图1 厚平板表面点平衡外力作用示意(a)及局部作用原理(面外力作用下内部应力分布预想(菱形内线段长度表应力之大小))破面图示(b)

Fig.1 A example of the surface of a plate acted by a point applied force (a) and the schematic diagram of the distribution of the internal stress in a plate or film applied by a surface force on single lateral (b)

设垂直于该平板过 $F$ 作用线的半平面中的应力分布如图1(b)所示.该平面仅作用有单侧面力 $f=F/2\pi$ ,于是点平衡力系 $F$ 的作用范围研究可化为经过作用线的平面问题.该平面可视为层状复合材料中弹性介质层的侧面,图1中的板厚 $d_2$ 转化为弹性介质层的长度,而垂直于作用线的径向( $x$ 方向)尺寸为此时的弹性介质层厚度 $d_1$ .

设在外力 $f$ 的作用下,在作用点( $x=0$ )处沿作用线( $y$ )方向发生位移 $\Delta d_1$ .如果弹性介质层的厚度小于 $f$ 的影响范围,即小于圣维南长度 $h$ ,则有可能通过实验感知 $f$ 的“局部作用效应”.这一预想已被我们的实验所证实.该实验可由图2简单描述.图2的嵌图给出了一种双层结构复合材料.该双层复合材料的上层为一平板状磁致伸缩材料铽镓铁(TDF),下层为高分子材料聚乙烯醇(PC),两种材料被用树脂粘接成层状结构.分别在该层状复合材料的上下两个端面贴上应变片,然后将样品置于强度可调的直流磁场中,即可测得上下两个端面的应变随磁场的改变.在磁场 $H$ 作用下,置于TDF端面的应变片所测量到的应该是TDF的磁致伸缩 $\Delta d_1/d_2$ .如果两层平板间的界面弹性耦合是理想的,即铁磁体的应变可毫无损失地传递给PC层,则PC层靠近

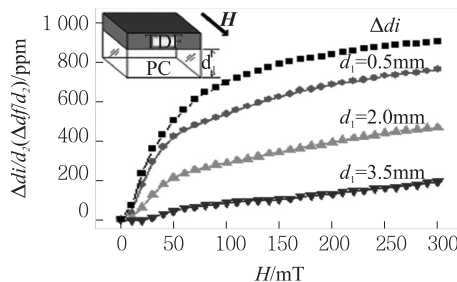


图2 具有不同厚度弹性介质层的磁致伸缩/弹性介质双层复合材料的磁致应变

Fig.2 The magnetic field-induced strains for a bilayer composite of magnetic striction/elastic material with different thickness of the elastic layer

粘结界面的应变等于磁致伸缩  $\Delta d/d_2$ . 而另一端面(可称为自由表面)的应变数值则反映了 PC 层另一端的形变  $\Delta d/d_2$ . 我们制备了多个具有不同厚度 PC 层的层状复合样品,并测量了形变  $\Delta d/d_2$  及  $\Delta d/d_2$ , 结果见图 2. 可见,随着受力层的加厚,自由表面的形变逐渐减小,显示局部作用原理得到验证.

## 2 面力作用下的应力分布及作用范围的解

根据弹性力学中平面问题的应力解法,设  $\varphi$  为平面应力函数,则有

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - Xx, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - Yy, \quad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad (1)$$

其中  $X, Y$  分别为  $x, y$  方向的彻体力. 对于层状复合材料中的弹性介质层而言可设彻体力为零,于是式(1)简化为

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad (2)$$

同时应力函数还必须满足双调和方程

$$\nabla^4 \varphi = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \varphi = 0. \quad (3)$$

考虑到外力仅仅沿  $y$  方向,则沿  $y$  方向的内应力为主应力方向. 对于长条形层状薄膜或平板材料,由于  $x$  方向线度远小于  $y$  方向线度,因此  $x$  方向形变  $\varepsilon_x$  亦远小于  $y$  方向形变  $\varepsilon_y$ ; 另外,  $\varepsilon_x$  与  $\varepsilon_y$  还应满足泊松关系  $\varepsilon_x = -\mu \varepsilon_y$ , 其中  $\mu$  为泊松系数,通常  $\mu \leq 0.5$ , 从而有  $|\varepsilon_x| \leq 0.5 |\varepsilon_y|$ , 于是  $x$  方向形变  $\varepsilon_x$ , 以致  $x$  方向的应力可忽略不计,即可近似有  $\sigma_x = \partial^2 \varphi / \partial y^2 = 0$ . 据此可设  $\partial \varphi / \partial y = f(x)$ , 设其解为

$$\varphi = yf(x) + f_1(x), \quad (4)$$

并分别设

$$f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + C_1, \quad f_1(x) = Dx^3 + Fx^2 + F_1x + F_2,$$

于是由方程(4)得应力函数

$$\varphi = y(Ax^3 + Bx^2 + Cx + C_1) + Dx^3 + Fx^2 + F_1x + F_2,$$

而方程组(1)可重写为

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = y(6Ax + 2B) + 6Dx + 2F, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -(3Ax^2 + 2Bx + C), \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $A, B, C, D$  及  $F$  为待求常数. 可见,待求的函数为方程组(5)中的后两个,即  $\sigma_y$  和  $\tau_{xy}$ . 根据前述一系列构想,并根据弹性力学方法,可列出边界条件如下. 设  $v$  为  $y$  方向的位移. 则边缘位移满足

$$(v)_{x=0, y=d_1/2} = \Delta d_i, \quad (6)$$

由主矢为零得

$$\frac{1}{d_1} \int_0^{d_1} (\Sigma_y + T_{xy})_{y=d_2/2} dx + f = 0, \quad (7)$$

$$\frac{2}{d_2} \int_0^{d_2/2} (T_{yx})_{x=d_1} dy = 0, \quad (8)$$

由自由表面上切应力为零得

$$(\tau_{xy})_{x=d_1} = 0, \quad (9)$$

根据前面关于圣维南长度  $h$  的定义,当  $x$  大于或等于圣维南长度时张应力亦为零

$$(\sigma_y)_{x=h} = 0, \quad (10)$$

其中  $\Sigma_y = \frac{1}{y} \int_0^y \sigma_y dy$ ,  $T_{xy} = \frac{1}{y} \int_0^y \tau_{xy} dy$  及  $T_{yx} = \frac{1}{x} \int_0^x \tau_{yx} dx$  分别为沿  $y$  方向的张应力和切应力之和. 另外有关系

$\tau_{yx} = -\tau_{xy}$ ,  $f$  为作用在弹性体表面的且平行于界面的外力.

根据所给边界条件解方程组(5)可得

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= G \frac{4f + E\Delta d_i}{Ed_1^2} (3x^2 - 4d_1x + d_1^2), \\ \sigma_y &= 2(3x - 2d_1) \left[ G \frac{4f + E\Delta d_i}{Ed_1^2} \left( \frac{d_2}{4} - y \right) + \frac{f}{d_1} \right],\end{aligned}\quad (11)$$

其中  $E$  为受力弹性体的杨氏模量。(11)显示随着与界面距离的增加,切应力呈二次曲线衰减,而张应力呈线性衰减,同时张应力沿平行于界面的方向(以中心线为原点)亦呈线性衰减.同理可得沿  $z$  方向的应力

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= G \frac{4f + E\Delta d_i}{Ed_1^2} (3x^2 - 4d_1x + d_1^2), \\ \sigma_z &= 2(3x - 2d_1) \left[ G \frac{4f + E\Delta d_i}{Ed_1^2} \left( \frac{d_3}{4} - z \right) + \frac{f}{d_1} \right].\end{aligned}\quad (12)$$

式(11)及式(12)所给出的结果可由实验加以验证.由于 PC 具有应力双折射效应,因此图 2 中的双层复合介质实际上具有磁致伸缩诱导的应力双折射效应——磁致双折射.我们也可以用具有电致伸缩效应的材料,例如锆钛酸铅(PZT)取代图 2 中的铁磁材料,从而获得电致双折射复合材料,因为电致双折射效应更方便实验操作.关于电致应力双折射效应研究我们将专文讨论.这里仅借用其作为双层平板复合材料中局部作用原理的实验验证方法.

将压电相 PZT-5 裁剪成  $26 \times 5 \times 3 \text{ mm}^3$  的片状,弹光相 PC 的尺寸为  $24 \times 5 \times 3 \text{ mm}^3$ . PZT 的长度超出 PC 2 mm 以便制备电极,因此 PZT 的有效长度为 20 mm. 所有 PC 薄片均经过退火处理以消除残余应力.采用 super glue 将两者粘结成层状复合材料.当 PC 受到作用于表面的应力时,内部亦会呈现由式(11)所描述的应力分布.而弹光效应研究指出,  $o$  光与  $e$  光的透射光相位差(延迟)

$$\delta = 2\pi c d \sigma / \lambda, \quad (12)$$

其中  $c$  为应力光学常数,  $d$  为沿光束方向的样品尺寸,  $\sigma$  为垂直于光束方向的主应力,  $\lambda$  为入射光波长.如果激光束沿  $z$  方向入射,则式(12)应该改写为

$$\delta = 2\pi c d_3 \sigma_y / \lambda, \quad (12-1)$$

式(12)式指出表征应力双折射效应的相位延迟正比于张应力,而与切应力无关.因此 PC 中应力的测量可采用电光效应的方法进行,即,随着激光束入射点的位移导致  $o$  光与  $e$  光相位差改变,从而改变光强

$$\text{NELI} = \sin^2(\delta/2) = \sin^2(\pi c d_3 \sigma_y / \lambda), \quad (13)$$

其中 NELI 称为归一化透射光强.当相位差  $\delta$  很小时,  $\sin^2(\delta/2) \approx \delta/2$ , 从而有

$$\text{NELI} \approx (\pi c d_3 \sigma_y / \lambda)^2. \quad (13-1)$$

通过测量透射光强可得到相位延迟及透射点的内应力.图 3 给出不同电场条件下激光束入射点沿厚度( $x$ )方向移动时 NELI 的变化,零点位于界面处,插图为电光效应实验简图.图 4 给出与界面不同距离条件下入射点平行于界面( $y$  方向)移动时 NELI 的变化,零点位于样品中点.因为在电致伸缩作用下,张

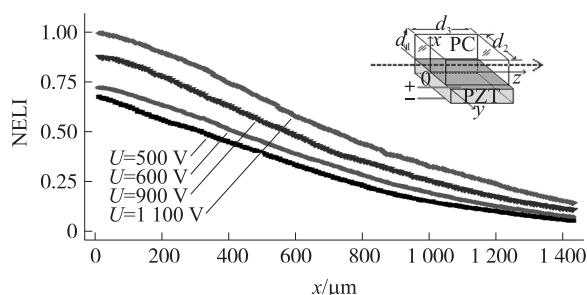


图3 300 mT磁场下双层复合电致应力双折射材料中激光束归一化透射光强随垂直于界面方向位移的变化

Fig.3 The normalized emergent light intensity of the laser beam NELI versus the distance to the interface in the optical layer for the bilayered composite of magnetostrictive/optical material under a magnetic field of 300 mT

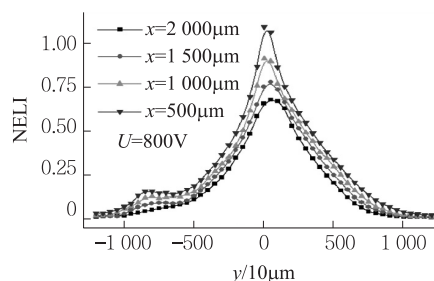


图4 300 mT磁场下双层复合电致应力双折射材料中激光束归一化透射光强随平行于界面方向位移的变化,零点位于中心线上

Fig.4 The normalized emergent light intensity of the laser beam NELI versus the displacement parallel to the interface in the optical layer for the bilayered composite of magnetostrictive/optical material under a magnetic field of 300 mT. The zero point locates at the centre line of the optical layer



应力分布关于中心线对称.可见两者均基本呈二次曲线.这与式(13)的预测是一致的.入射点平行于界面移动时光强随位移变化关于中心线对称显示张应力分布关于中心线对称.另外,当激光束入射点沿厚度方向移动时,光强变化更灵敏,其灵敏度比之平行于界面移动时高一个数量级,同时也有更好的线性.这一结果可用于微位移测量,精度可达  $\mu\text{m}$  数量级.

### 3 结论

根据圣维南原理,受均匀且沿表面方向的面力作用的弹性介质薄层(膜)内的应力沿厚度方向是非均匀分布的,即按离开受力面的距离的二次方递减,从而复合层状材料中的弹性介质层中的应力沿厚度方向亦循此规律递减,而弹性介质层两端的位移曲线亦为与受力面的距离的二次函数.对于给定的弹性介质,自由表面的形变依赖于粘结界面的形变.在忽略沿垂直于界面方向的形变条件下,面力的局部效应范围,即圣维南长度与材料的切变模量成正比,与外力成反比,并同时依赖于弹性介质层的几何尺寸.

#### [参考文献]

- [1] BAIBICH M N, BROTO J M, FERT A, et al. Giant Magnetoresistance of (001) Fe/(001) Cr magnetic superlattices [J]. Phys Rev Lett, 1988, 61: 2 472-2 475.
- [2] BINASCH G, GRÜNBERG P, SAURENBACH F, et al. Enhanced magnetoresistance in layered magnetic structures with anti-ferromagnetic interlayer exchange [J]. Phys Rev, 1989, B39: 4 828-4 835.
- [3] KREBS J J, LUBITZ P, CHAIKEN A, et al. Magnetic resonance determination of the antiferromagnetic coupling of Fe layers through Cr [J]. Phys Rev Lett, 1989, 63: 1 645-1 648.
- [4] SRINIVASAN G, RASMUSSEN E T. Calcium manganite prepared by tape casting [J]. Appl Phys Lett, 2002, 80: 464-467.
- [5] KIYOTAKE M, MANFRED W. Coupling in Terfenol-D/polyvinylidene difluoride composites [J]. Appl Phys Lett, 2002, 81: 100-102.
- [6] DONG S X, ZHAI J Y, LI J F, et al. Field response of magnetoelectric laminate composites [J]. Appl Phys Lett, 2006, 88: 082907-1-3.
- [7] LI X Y, ZHANG N, LUO X B, et al. Electric field-induced stress-birefringence in layered composites PbZr<sub>1-x</sub>Ti<sub>x</sub>O<sub>3</sub>/Polycarbonate [J]. Chin Phys, 2011, B20: 037802-1-4.
- [8] BICHURIN M I, KORNEV I A, PETROV V M, et al. Theory of magnetoelectric effects at microwave frequencies in a Piezoelectric/magnetostrictive multilayer composite [J]. Srinivasan Phys Rev, 2001, B64: 094409-1-6.
- [9] HARSHE G, DOUGHERTY J O, NEWNHAM R E. Theoretical modelling of multilayer magnetoelectric composites [J]. Int J Appl Electromagn Mater, 1993, 4: 145-148.
- [10] AVELLANEDA M, HARSHE G. Magnetoelectric Effect in piezoelectric/magnetostrictive multilayer (2-2) composites [J]. Intell J Mater Syst Struct, 1994, 5: 501-506.
- [11] BICHURIN M I, PETROV V M, SRINIVASAN G. Theory of low-frequency magnetoelectric coupling in magnetostrictive-piezoelectric bilayers [J]. Phys Rev, 2003, B68: 054402-1-6.
- [12] BICHURIN M I, PETROV V M, SRINIVASAN G. Theory of low-frequency magnetoelectric effects in ferromagnetic-ferroelectric layered composites [J]. J Appl Phys, 2002, 92: 7 681-7 686.
- [13] SRINIVASAN G, RASMUSSEN E T, HAYES R. Magnetoelectric effects in ferrite-lead zirconate titanate layered composites: the influence of zinc substitution in ferrites [J]. Phys Rev, 2003, B67: 014418-1-5.
- [14] SAINT-VENANT B. De mémoire sur la torsion des prismes, mémoire des savants étrangers [J]. Académie de Sciences, Paris France, X, IV, 1855: 233-560.
- [15] BOUSSINESQ J. Application des potentials [M]. Paris: Gauthier-Viliars Paris, 1885: 298-332.
- [16] 赵建中. Tourpin-Бердичевский 定理不能作为圣维南原理的数学表达 [J]. 应用数学和力学, 1986, 7(10): 913-917.
- [17] 孔超群. 圣维南原理研究工作综述 [J]. 力学季刊, 1990, 11(3): 35-44.
- [18] TOUPIN R A. Saint-Venant's Principle [J]. Arch Rat Mech Anal, 1965, 18: 83-96.
- [19] JAMES K K. On Saint-Venant's principle in the two-dimensional linear theory of elasticity [J]. Arch Rat Mech Anal, 1966, 21: 1-22.
- [20] PAPPALETTRE C, GALIETTI U. Polycarbonate for frozen stress photoelasticity [J]. Strain, 2008, 31(2): 69-74.

[责任编辑:顾晓天]