doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2016.02.002

具有随机扰动的吸血虫模型的稳定性

肖叶宇[1],邓　超[2]

(1.东北大学软件学院,辽宁 沈阳 110169)
(2.南京师范大学数学科学学院,江苏 南京 210023)

[摘要]　通过构造 Lyapunov 泛函得到了文献[18]中提出的一种新的吸血虫模型在随机扰动下无病平衡点的局部稳定性.

[关键词]　局部渐近稳定性,随机吸血虫模型,Lyapunov 泛函
[中图分类号]O211.63　[文献标志码]A　[文章编号]1001-4616(2016)02-0004-06

Stability of Schistosomiasis Model with Stochastic Perturbations

Xiao Yeyu[1],Deng Chao[2]

(1.Software College,Northeastern University,Shenyang 110169,China)
(2.School of Mathematical Sciences,Nanjing Normal University,Nanjing 210023,China)

Abstract:In this paper,a new schistosomiasis model proposed in[18],allowing white noise perturbations around the endemic equilibrium is studied. The equibibrium state of the model with random perturbation is locally asymptotically stable by constructing Lyapunov functional.

Key words:local asymptotic stability,stochastic schistosomias model,Lyapunov functional

吸血虫病给人类健康和社会经济带来了巨大的损失.吸血虫病的传播依赖于人类、动物和钉螺等复杂的生命圈,所以对人类而言要根除吸血虫病是很困难的.近几十年,出现了许多分析、预测和控制吸血虫病的有意义的数学模型.第一个关于吸血虫病的传播见文献[1].Woolhouse[2]考虑了不同层面的人类影响.在一些动态模型中人类是唯一决定性的宿主[3-5].在文献[6-8]中,人们考虑了延迟效应.由于现实生活中充满了不确定性,所以考虑随机模型是有效的.随机微分方程的最近的研究进展使我们能够在传统的生物数学模型中引入随机效应,它表示由于环境的变化引起参数的波动.最近一些随机生物数学模型的研究见文献[9-17]等.由于吸血虫病模型的复杂性,随机情形的数学进展发展缓慢.本文中,我们将考虑吸血虫病模型在无病平衡点附近的随机扰动.本文回顾了文[18]中的确定性模型,给出了随机稳定性的基本结论,研究了随机吸血虫病模型的天病平衡点的局部稳定性.

1　确定性吸血虫病模型

Qi 等[17]基于前人的研究给出了如下新的吸血虫病模型:

$$\begin{cases} \mathrm{d}x_s/\mathrm{d}t = A_x - \mu_x x_s - \beta_x x_s y_i\,, \\ \mathrm{d}x_i/\mathrm{d}t = \beta_x x_s y_i - (\mu_x + \alpha_x)x_i\,, \\ \mathrm{d}y_s/\mathrm{d}t = A_y - \mu_y y_s - \beta_y x_i y_s\,, \\ \mathrm{d}y_e/\mathrm{d}t = \beta_y x_i y_s - (\mu_y + \theta)y_e\,, \\ \mathrm{d}y_i/\mathrm{d}t = \theta y_e - (\mu_y + \alpha_y)y_i\,. \end{cases} \tag{1}$$

这里 $x_s(t)$ 为易感哺乳动物宿主数,$x_i(t)$ 感染哺乳动物宿主数,$y_s(t)$ 为易感钉螺宿主数,$y_e(t)$ 为感染和脱壳前钉螺宿主数,$y_i(t)$ 为感染和脱壳钉螺宿主数.模型中的参数均为非负常数.其中 A_x 为哺乳动物宿

收稿日期:2015-12-20.
基金项目:江苏省优势学科、江苏省气候变化协同创新中心和江苏省教育厅自然科学基金(11KJA110001).
通讯联系人:肖叶宇,讲师,研究方向:数学建模.E-mail:641339691@qq.com

主的出生率,μ_x 为哺乳动物宿主的自然死亡率,α_x 为哺乳动物宿主因疾病导致的死亡率,β_x 为从感染钉螺到易感哺乳动物的迁移率,A_y 为钉螺宿主的自然出生率,mu_y 为钉螺宿主的自然死亡率,α_y 为钉螺宿主因疾病导致的死亡率,β_y 为从感染钉螺到易感钉螺的迁移率,θ 为从脱壳前感染钉螺到脱壳钉螺的迁移率.显然,方程组(1)具有无病平衡点 $\boldsymbol{E}_0=(x_s^0,0,y_s^0,0,0)=\left(\frac{A_x}{\mu_x},0,\frac{A_y}{\mu_y},0,0\right)$ 基于生成矩阵[19]和基本再生数公式[7],相应两个矩阵为:

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta_x\frac{A_x}{\mu_x} \\ \beta_y\frac{A_y}{\mu_y} & 0 & 0 \\ 0 & \theta & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

和

$$\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix} \mu_x+\alpha_x & 0 & 0 \\ 0 & \mu_y+\theta & 0 \\ 0 & 0 & \mu_y+\alpha_y \end{bmatrix} \tag{3}$$

则(1)的基本再生数为:

$$R_0=\rho(\boldsymbol{F}\boldsymbol{V}^{-1})=\sqrt[3]{\frac{A_xA_y\theta\beta_x\beta_y}{\mu_x\mu_y(\mu_x+\alpha_y)(\mu_y+\alpha_y)(\mu_y+\theta)}}\ ,$$

这里 ρ 为谱半径.下面我们回忆文献[17]中的结果:

命题 1 如果 $R_0<1$,则方程组(1)的无病平衡点 $\boldsymbol{E}_0$ 是局部稳定的且是整体渐近稳定的,而当 $R_0>1$ 是不稳定的.

注记 事实上我们也可以讨论系统的地方病平衡点的相关性质.

2 随机稳定性

随机微分方程的平衡点的相关定义和性质见文[20].考虑如下 n 维随机微分方程:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{X}(t))\mathrm{d}t+\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{X}(t))\mathrm{d}\boldsymbol{W}(t)\ , \tag{4}$$

这里 $\boldsymbol{f}(t,x)$ 是定义在 $[t_0,+\infty]\times R^n$ 上的函数,$\boldsymbol{g}(t,x)$ 是 $n\times m$-矩阵,$\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 是局部 Lipschitz 函数.$\boldsymbol{W}(t)$ 是 m-维标准 Wiener 过程.

定义 1 随机过程 $\boldsymbol{X}(t)=\bar{X}$ 是随机方程组(4)具有初值 $\boldsymbol{X}(t_0)=\bar{X}$ 的稳态解如果 $\boldsymbol{f}(t,\bar{X})=0,\boldsymbol{g}(t,\bar{X})=0$.如果 $\bar{X}=0$,则稳态解被称为是平凡的.

定义 2 随机方程组(4)的平凡解 $X(t)=0$ 称之为:

(1)依概率稳定如果 $\forall\ \varepsilon>0$ 和 $s\geqslant t_0$,

$$\lim_{\gamma\to 0}P\{\sup_{t\in[t_0,+\infty]}|X(\boldsymbol{t};s,\boldsymbol{\gamma})|\geqslant\varepsilon\}=0\ ,$$

这里 $\boldsymbol{X}(t;s,\boldsymbol{\gamma})$ 表示方程组(4)具有初值 $\boldsymbol{X}(s)=\boldsymbol{\gamma}$ 的解,

(2)渐近稳定如果依概率稳定且

$$\lim_{\gamma\to 0}P\{\lim_{t\to+\infty}|\boldsymbol{X}(t;s,\boldsymbol{\gamma})|=0\}=1,\quad s>t_0\ ,$$

(3)全局渐近稳定如果依概率稳定且

$$P\{\lim_{t\to+\infty}|\boldsymbol{X}(t;s,\boldsymbol{\gamma})|=0\}=1,\quad \forall\boldsymbol{\gamma}\in R^n\ .$$

记 $C^{1,2}(R\times R^n;R_+)$ 为定义在 $R\times R^n$ 的非负函数,$V(t,\boldsymbol{x})$ 使得关于 t 一次可微,$\boldsymbol{x}$ 二次可微.定义关于方程组(4)的微分算子 L 为

$$L=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{f}_i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}[\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x})]_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_ix_j}\ .$$

将 L 作用到 $\boldsymbol{V}(t,\boldsymbol{x})\in C^{1,2}(R\times R^n;R_+)$,得到

$$L(V)(t,\boldsymbol{x})=\frac{\partial V}{\partial t}+\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}+\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial \boldsymbol{x}^2}\cdot\boldsymbol{g}\right].$$

用 Lyapunov 函数刻画的随机方程组平凡解的随机稳定性结果[20]：

定理 1　假设存在一非负函数 $V(t,\boldsymbol{x})\in C^{1,2}(R\times R^n)$，两连续函数 a，b：$R_+^0\to R_+^0(a(0)=b(0)=0$ 且在 R^+ 上为正和正常数 K 使得对 $|\boldsymbol{x}|<K$，

$$a(|\boldsymbol{x}|)\leqslant V(t,\boldsymbol{x})\leqslant b(|\boldsymbol{x}|)$$

成立．

(1)如果 $LV\leqslant 0,|\boldsymbol{x}|\in(0,K)$，则方程组(4)的平凡解是依概率稳定．(2)如果存在一连续函数 $c{:}R_0^+\to R_0^+$，在 R^+ 上为正，使得 $LV\leqslant -\mathrm{c}(|\boldsymbol{x}|)$ 成立，则方程组(4)的平凡解是渐近稳定的．(3)如果 $\forall\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}\neq 0)(ii)$ 成立且 $\lim\limits_{t\to+\infty}a(r)=+\infty$，则方程组(4)的平凡解是全局渐近稳定的．许多非线性随机方程组的平衡解的稳定性问题可转化为线性问题的稳定性．设 $\boldsymbol{X}(t)=0$ 为方程组(4)的平凡解，则方程组(4)的线性形式定义为：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{X}(t)\mathrm{d}t+\boldsymbol{G}(t)\boldsymbol{X}(t)\mathrm{d}\boldsymbol{W}(t)\,,\tag{5}$$

这里 $\boldsymbol{F}$ 是$(t_0,+\infty)$上的函数，$\boldsymbol{G}$ 是$(t_0,+\infty)$上的 m 维向量．

定理 2　如果线性方程组(5) $(F(t)=F,G(t)=G)$ 的平凡解 $\boldsymbol{X}(t)=0$ 是渐近稳定的且在 $\boldsymbol{x}=0$ 的充分小的领域里，(4)和(5)的系数满足下列不等式：

$$|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})-F\cdot\boldsymbol{x}|+|\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x})-G\cdot\boldsymbol{x}|<\gamma|\boldsymbol{x}|\,,\tag{6}$$

这里 γ 是充分小的参数，则(4)的平凡解 $X(t)=0$ 是局部渐近稳定的．

3　无病平衡点的随机稳定性

May 等[21]指出由于环境的涨落，出生率、承载容量、竞争系数和模型中其他参数会围绕其平均值随机变化．有两种方式在确定性模型中来考虑环境的涨落的影响．一、可将时间无关的参数替换成随机参数．二、可直接将随机效应引入系统．为研究无病平衡点的环境涨落，考虑第一种方式引入随机效应．考虑参数 β_x 和 β_y 小的白噪声扰动，就得到下面的随机方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_s}{\mathrm{d}t}=A_x-\mu_x x_s-\beta_x x_s y_i-\sigma_1 x_s y_i\mathrm{d}W_1,\\ \dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=\beta_x x_s y_i-(\mu_x+\alpha_x)x_i+\sigma_1 x_s y_i\mathrm{d}W_1,\\ \dfrac{\mathrm{d}y_s}{\mathrm{d}t}=A_y-\mu_y y_s-\beta_y x_i y_s-\sigma_2 x_i y_s\mathrm{d}W_2,\\ \dfrac{\mathrm{d}y_e}{\mathrm{d}t}=\beta_y x_i y_s-(\mu_y+\theta)y_e+\sigma_2 x_i y_s\mathrm{d}W_2,\\ \dfrac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t}=\theta y_e-(\mu+\alpha_y)y_i.\end{cases}\tag{7}$$

这里，$W_i(i=1,2)$ 为独立的标准 Brown 运动，$\sigma_i^2(i=1,2)$ 表示 $W_i(i=1,2)$ 的强度．随机方程组(7)具有与方程组(1)同样的 $\boldsymbol{E}_0$．下面，我们将通过构造适当的 Lyapunov 泛函讨论(7)无病平衡点 $\boldsymbol{E}_0$ 的稳定性．

设 $u_1=x_s-x_s^0$，$u_2=x_i$，$u_3=y_s-y_s^0$，$u_4=y_e$，$u_5=y_i$，我们得到如下方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}=-\mu_x u_1-\beta_x x_s^0 u_5+\beta_x x_s^0 u_5+\sigma_1(u_1+x_s^0)u_5\mathrm{d}W_1\,,\\ \dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}=\beta_x u_1 u_5-(\mu_x+\alpha_x)u_2+\beta_x x_s^0 u_5+\sigma_1(u_1+x_s^0)u_5\mathrm{d}W_1\,,\\ \dfrac{\mathrm{d}u_3}{\mathrm{d}t}=-\beta_y y_s^0 u_2-\mu_y u_3-\beta_y u_2 u_3-\sigma_2(u_3+y_s^0)u_2\mathrm{d}W_2\,,\\ \dfrac{\mathrm{d}u_4}{\mathrm{d}t}=\beta_y y_s^o u_2+\beta_y u_2 u_3-(\mu_y+\theta)u_4+\sigma_2(u_3+y_s^0)u_2\mathrm{d}W_2\,,\\ \dfrac{\mathrm{d}u_5}{\mathrm{d}t}=\theta u_4-(\mu_y+\alpha_y)u_5\,.\end{cases}\tag{8}$$

为讨论(7)的无病平衡点 $\boldsymbol{E}_0$ 的稳定性，我们仅需研究(8)的平凡解的稳定性．

相应的线性化系统（8）可写出如下形式：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(t))\mathrm{d}t+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}(t))\mathrm{d}\boldsymbol{W}(t)\ , \tag{9}$$

这里 $\boldsymbol{u}(t)=\mathrm{col}(u_1(t),u_2(t),u_3(t),u_4(t),u_5(t))$ 和

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(t))=\begin{bmatrix}-\mu_x u_1 & 0 & 0 & 0 & -\beta_x x_s^0 u_5\\ 0 & -(\mu_x+\alpha_x)u_2 & 0 & 0 & \beta_x x_s^0 u_5\\ 0 & -\beta_y y_s^0 u_2 & -\mu_y u_3 & 0 & 0\\ 0 & \beta_y y_s^0 u_2 & 0 & -(\mu_y+\theta)u_4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \theta u_4 & -(\mu_y+\alpha_y)u_5\end{bmatrix}, \tag{10}$$

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}(t))=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma_1 x_s^0 u_5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_1 x_s^0 u_5\\ 0 & -\sigma_2 y_s^0 u_2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 y_s^0 u_2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}. \tag{11}$$

引理 1　假设下列条件成立：

$$\frac{\theta}{2}<\mu_y+\alpha_y\ ,\qquad \frac{\beta_y y_s^0}{2}<\mu_y\ . \tag{12}$$

如果

$$\frac{\beta_x x_s^0}{2}+\frac{y_s^0\theta[\beta_x x_s^0+(\sigma_1 x_s^0)^2](\beta_y+y_s^0\sigma_2^2)}{8AB}<\mu_x+\alpha_x\ , \tag{13}$$

这里 $A=\mu_y+\alpha_y-\dfrac{\theta}{2}$ ，$B=\mu_y+\theta-\dfrac{\beta_y y_s^0}{2}$ ，则（9）的平凡解是渐近稳定的 .

证明　记 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5)$ 且考虑如下泛函：

$$V(\boldsymbol{u}(t))=\frac{1}{2}\Big[(u_1+u_2)^2+\omega_2u_2^2+\omega_3u_3^2+\omega_4u_4^2+\omega_5u_5^2\Big]\ , \tag{14}$$

这里 $\omega_i(i=2,3,4,5)$ 为待定正常数 . 进一步，我们有

$$LV(\boldsymbol{u}(t))=-\mu_xu_1^2-(\mu_x+\alpha_x)(1+\omega_2)u_2^2-(\mu_y+\theta)\omega_4u_4^2-\beta_y y_s^0\omega_3u_2u_3-(\mu_y+\alpha_y)\omega_5u_5^2-(2\mu_x+\alpha_x)u_1u_2-$$
$$\mu_y\omega_3u_3^2+\beta_x x_s^0\omega_2u_2u_5+\beta_y y_s^0\omega_4u_2u_4+\theta\omega_5u_4u_5+\frac{1}{2}\Big[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}(t))^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2V}{\partial\boldsymbol{u}^2}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}(t))\Big].$$

这里

$$\frac{\partial^2V}{\partial\boldsymbol{u}^2}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & (1+\omega_2) & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \omega_3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \omega_4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_5\end{bmatrix}, \tag{15}$$

因此

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}(t))^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2V}{\partial\boldsymbol{u}^2}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}(t))=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & (\sigma_2y_s^0)^2(\omega_3+\omega_4)u_2^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\sigma_1x_s^0)^2\omega_2u_5^2\end{bmatrix}. \tag{16}$$

所以

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\Big[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}(t))^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2V}{\partial\boldsymbol{u}^2}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}(t))\Big]=\frac{1}{2}[(\sigma_1x_s^0)^2\omega_2u_5^2+(\sigma_2y_s^0)^2(\omega_3+\omega_4)u_2^2]\ , \tag{17}$$

和

$$LV(\boldsymbol{u}(t))=-\mu_xu_1^2-[(\mu_x+\alpha_x)(1+\omega_2)-\frac{1}{2}(\sigma_2y_s^0)^2(\omega_3+\omega_4)]u_2^2-(\mu_y+\theta)\omega_4u_4^2-\beta_yy_s^0\omega_3u_2u_3-(2\mu_x+\alpha_x)u_1u_2-$$
$$\mu_y\omega_3u_3^2+\beta_xx_s^0\omega_2u_2u_5+\beta_yy_s^0\omega_4u_2u_4+\theta u_4u_5-[(\mu_y+\alpha_y)\omega_5-\frac{1}{2}(\sigma_1x_s^0)^2\omega_2]u_5^2\ .$$

用 Cauchy 不等式,我们有

$$
\begin{aligned}
&(2\mu_x+\alpha_x)u_1u_2 \leqslant \frac{1}{2}\mu_x u_1^2+\frac{1}{2}\frac{(2\mu_x+\alpha_x)^2}{\mu_x}u_2^2,\\
&\beta_y y_s^0\omega_3u_2u_3 \leqslant \frac{\beta_y y_s^0\omega_3}{2}u_2^2+\frac{\beta_y y_s^0\omega_3}{2}u_3^2,\\
&\beta_x x_s^0\omega_2u_2u_5 \leqslant \frac{\beta_x x_s^0\omega_2}{2}u_2^2+\frac{\beta_x x_s^0\omega_2}{2}u_5^2,\\
&\beta_y y_s^0\omega_4u_2u_4 \leqslant \frac{\beta_y y_s^0\omega_4}{2}u_2^2+\frac{\beta_y y_s^0\omega_4}{2}u_4^2,\\
&\theta\omega_5u_4u_5 \leqslant \frac{\theta\omega_5}{2}u_4^2+\frac{\theta\omega_5}{2}u_5^2.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

由 A,B 的定义和不等式(18),我们选取

$$\omega_2=\frac{q}{p},\ \omega_3=1,\ \omega_4=\frac{[\beta_x x_s^0+(\sigma_1 x_s^0)^2]\theta q+2P\theta\mu_y+4AP\mu_x}{4ABP},\ \omega_5=\frac{[\beta_x x_s^0+(\sigma_1 x_s^0)^2]q+2P\mu_y}{2AP},$$

这里

$$p=\mu_x+\alpha_x-\frac{\beta_x x_s^o}{2}-\frac{y_s^0\theta[\beta_x x_s^0+(\sigma_1 x_s^0)](\beta_y+y_s^0\sigma_2^2)}{8AB},$$

$$q=\frac{(2\mu_x+\alpha_x)^2}{2\mu_x}+\frac{\beta_y y_s^0}{2}+\frac{y_s^0\theta\mu_y(\beta_y+\sigma_2^2y_s^0)}{4AB}+\frac{\mu_x y_s^0(\beta_y+y_s^0\sigma_2^2)}{2B}+\frac{(y_s^o\sigma_2)^2}{2}.$$

我们验证 ω_i (i=2,3,4,5)均为正常数,则我们有

$$LV(u(t))\leqslant-\frac{\mu_x}{2}u_1^2-(\mu_x+\alpha_x)u_2^2-\left(\mu_y-\frac{\beta_y y_s^*}{2}\right)u_3^2-u_4^2-\mu_y u_5^2.$$

进而,选取 $a(|\boldsymbol{u}|)=\lambda_1|\boldsymbol{u}|^2$, $b(|\boldsymbol{u}|)=\lambda_2|\boldsymbol{u}|^2$, $c|\boldsymbol{u}|=\min\left(\frac{\mu_x}{2},\mu_x+\alpha_x,\mu_y-\frac{\beta_y y_s^0}{2},\mu_x,\mu_y\right)|\boldsymbol{u}|^2$,这里 λ_1、λ_2 为相应系数矩阵的最小最大特征值 . 根据定理 1,结论得证 . 非线性系统(8)的平凡解的稳定性可由定理 2 得到,事实上我们有

定理3　如果假设(12)和(13)成立,则(8)的平凡解是局部渐近稳定的.

证明　由于引理1和定理2,为完成我们的证明,只要(6)证明就足够了.(6)的左边为

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{2(\beta_x u_1u_5)^2+2(\beta_y u_2u_3)^2}+\sqrt{2(\sigma_1u_1u_5)^2+2(\sigma_2u_2u_3)^2}\leqslant\beta\sqrt{u_1^4+u_2^4+u_3^4+u_4^4+u_5^4}+\\
&\sigma\sqrt{u_1^4+u_2^4+u_3^4+u_4^4+u_5^4}\leqslant(\beta+\sigma)\sqrt{u_1^4+u_2^4+u_3^4+u_4^4+u_4^5}\leqslant(\beta+\sigma)|u|^2.
\end{aligned}
$$

这里 $\sigma=\min(\sigma_1,\sigma_2)$ 和 $\beta=\min(\beta_x,\beta_y)$,且它小于等于 $(\beta+\sigma)\varepsilon|u(t)|$. 当 ε 充分小 . 证明完成 .

注记　本文中,我们研究了无病平衡点的随机扰动 . 我们在一定条件(在这些条件下确定性系统可能不稳定)下得到了无病平衡点随机稳定性,系统可能在大涨落的情况下不稳定 . 从我们的条件可以看出自然出生率、由疾病导致的死亡率以及迁移率在稳定性的讨论中起了很大作用 .

[参考文献]

[1]　MACDONALD G. The dynamics of heleminth infections, with special reference to schistosomes[J]. Transactions of the royal society of tropical medicine and hygiene, 1965, 59: 489-506.

[2]　WOOLHOUSE M E J. On the application of mathmatical models of schistosome transmission dynamics, I. Narural transmissiion [J]. Acta Trop, 1991, 49: 241-270.

[3]　CASTILLO C C, FENG Z L, XU D. A schistosomiasis model with mating structure and time delay[J]. Math Biosc, 2008 (211): 333-341.

[4]　FENG Z, EPPERT A, MILNER F A, et al. Estimation of parameters governing the transmission dynamics of schistosomes[J]. Appl Math Lett, 2004, 17: 1 105-1 112.

[5] FENG Z, LI C C, MILNER F A. Schistosomiasis models with two migrating human groups[J]. Math and Comput model, 2005, 41:1 213-1 230.
[6] ALLEN E J, VICTORY JR H D. Modeling and simulation of a schistosomiasis infection with biological control[J]. Acta Trop, 2003(87):251-267.
[7] DRIESSCHE P V, WATMOUGH J. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission[J]. Math Biosci, 2002, 180:29-48.
[8] LIANG S, SETO E Y W, REMAIS J V, et al. Environmental effects on parasitic disease transmission exemplified by schistosomiasis in western China[J]. Proc Natl Acad Sci USA, 2007, 104:7 110-7 115.
[9] RILEY S, CARABIN H, BELISLE P, et al. Multi-host transimission dynamics of schistosoma japonicum in Samar Province, the Philippines[J]. Plos Med, 2008, 5(1):70-78.
[10] ABBAS S, BAHUGGUNA D, BANERJEE M. Effect of stochasric perturbation on a two species competitive model[J]. Nonlinear analysis: hybrid systems, 2009(3):195-206.
[11] DAS P, MUKHERJEE D, SARKAR A K. Analysis of a disease transmission model of Hepatitis C[J]. J Biol Syst, 2005(13):331-339.
[12] LIU Q. Stability of SIRS system with random perturbations[J]. Physica A, 2009, 388:3 677-3 686.
[13] MARGHERITA C. Mean-square stability of a stochastic model for bacteriophage infection with time delays[J]. Math Bios, 2007, 210:395-414.
[14] MUKHERJEE D. Stability analysis of a stochastic model for prey-predator system with disease in the prey[J]. Nonlinear analysis: modelling and control, 2003, 8:83-92.
[15] SARKAR R R, BANERJEE S. Cancer self remission and tumor stability-astochastic approch[J]. Math Biol, 2005, 196:65-81.
[16] YU J J, JIANG D Q, SHI N Z. Global stability of two-group SIR model with random perturbation[J]. J Math Anal Appl, 2009, 360:235-244.
[17] DENG C, GAO H. Stability of SVIR system with random perturbations[J]. Inter J Biomath, 2012, 5(4):1 250 025, 15.
[18] QI L, CUI J, GAO Y, et al. Modeling the schistosomiasis on the Islets in Nanjing[J]. Inter J Biomath, 2012, 5(4):1 250 037.
[19] DIEKMANN O, HEESTERBEEK J A P, METZ J A J. On the definition and the computation of the basic reproduction ratio R_0 in models for infectious diseases in heterogeneous populations[J]. J Math Biol, 1990, 28:365-382.
[20] HAS'MINSKIJ R Z. Stochastic Stability of Differential Equations[M]. The Netherlands: Sijthoof Noordhoof, Alphen aan den Rijn, 1980.
[21] MAY R M. Stability and complexity in model ecosystems[M]. Princeton: Princeton University Press, 2001.

[责任编辑:陆炳新]