doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2016.02.004

完备度量空间中的图定向自相似集合

魏 敏[1],严珍珍[2],石 磊[1]

(1.南京农业大学理学院,江苏 南京 210095)
(2.南京邮电大学理学院,江苏 南京 210046)

[摘要] 文中发展了完备度量空间中的图定向自相似集合的 Hausdorff 维数和测度,这些理论和欧几里德空间中的有很大的不同,即满足开集条件不能意味着在完备度量空间中的图定向自相似集 K 的 α 维 Hausdorff 测度大于零,这里的 α 为 K 的 Hausdorff 维数 . 本文讨论了完备度量空间中图定向自相似集合一些性质之间的关系 .
[关键词] 图定向自相似集合,开集条件(OSC),强开集条件($SOSC$)
[中图分类号]O19 [文献标志码]A [文章编号]1001-4616(2016)02-0016-06

Graph-Directed Self-Similar Set in Complete Metric Spaces

Wei Min[1],Yan Zhenzhen[2],Shi Lei[1]

(1.College of Sciences,Nanjing Agricultural University,Nanjing 210095,China)
(2.College of Science,Nanjing University of Posts and Telecommunications,Nanjing 210046,China)

Abstract: In this topic, we develop the Hausdorff dimension, Hausdorff measure of graph-directed self-similar sets in complete metric spaces. These are different from R^d, that is to say, the sets satisfy OSC in R^d, but we cannot have the conclusion that the α dimensional Hausdorff measure of graph-directed self-similar set K is positive in complete metric spaces, where the α is the Hausdorff dimension of K. We find the relationship between strong open set condition, Hausdorff dimension, the positivity of the Hausdorff measure and β space of graph-directed self-similar sets in complete metric spaces.
Key words: graph-directed self-similar sets, open set condition(OSC), strong open set condition($SOSC$)

在函数迭代系统中,很重要的一个方面就是研究吸引子的分离性质、Hausdorff 维数和 Hausdorff 测度之间的关系 .Schief A[1]证明了 R^d 中的自相似集合有下面的关系:

$$SSC \Rightarrow SOSC \Leftrightarrow OSC \Leftrightarrow H^{\alpha}(K)>0 \Rightarrow \dim_H K=\alpha\ ,$$

其中 H^{α} 表示 α 维 Hausdorff 测度, $\dim_H$ 表示 Hausdorff 维数, α 为 $\sum_{i=1}^{m} r_i^{\alpha}=1$ 的唯一解 . 然而,到了一般的度量空间中,上述关系就发生了较大的变化 . 主要原因是在一般度量空间中缺少 R^d 中的几何性质 . Schief A[2]指出完备度量空间中的自相似集合有下面的关系:

$$H^{\alpha}(K)>0 \Rightarrow SOSC \Rightarrow \dim_H K=\alpha\ ^{[1,2,3]}.$$

Mauldin,Williams[3]给出了比函数迭代系统更一般的系统—图定向函数迭代系统 . 设 (V,E) 为一个定向图,这里的 V 为顶点的集合, E 为所有路径的集合,对于每个顶点 $u\in V$, 有路径 $e\in E$ 从顶点 u 出发 . 若顶点 $u,v\in V$, 路径 $e\in E$,则 E_u 是以 u 为初始顶点的路径的集合, E_{uv} 是从顶点 u 到 v 的路径的集合,路径 e 的初始顶点记为 $i(e)$,终止顶点记为 $t(e)$. 一个图定向函数迭代系统为

$$G=\left((V,E),(X_u)_{\{u\in V\}},(S_e)_{\{e\in E\}},(r_e)_{\{e\in E\}}\right).$$

收稿日期:2015-11-18.
基金项目:中央高校基本科研业务费专项资金(KYZ201538)、江苏省基础研究计划(自然科学基金)(BK20150651)、南京农业大学青年科技创新基金(Y0201300259)、南京农业大学理学院青年科技创新基金(LXYQ201201104).
通讯联系人:魏敏,讲师,研究方向:拓扑动力系统 . E-mail:weimin2005@njau.edu.cn

这里

（1）(V,E) 是一个定向图；

（2）X_u 是完备度量空间；

（3）$S_e:X_v \to X_u$ 是自相似映射，$e \in E_{uv}$；

（4）r_e 是 S_e 的相似比，对于每个循环 $\alpha = (e_1 e_2 \cdots e_q : t(e_q) = i(e_1))$，$r_\alpha = r_{e_1} r_{e_2} \cdots r_{e_q} < 1$，则称 G 为一个 Mauldin-Williams 图 .

对于一个 Mauldin-Williams 图 G，Mauldin，Williams[3]证明了：存在唯一不变集族 $(K_u)_{\{u \in V\}}$，满足

$$K_u = \bigcup_{e \in E_u} S_e(K_{t(e)}), \forall u \in V ,$$

其中 K_u 是 X_u 非空的紧子集 .

注 1　通过重标度[4]，不失一般性，我们能假设对 $\forall e \in E$，有 $r_e<1$.

$(K_u)_{\{u \in V\}}$ 称为 G 的图定向自相似集合族，集合 $K = \bigcup_{u \in V} K_u$ 称为图定向构造对象[3].

定义 1　设 $G = \left((V,E),(X_u)_{\{u \in V\}},(S_e)_{\{e \in E\}},(r_e)_{\{e \in E\}}\right)$ 是 M-W 图，G 满足 OSC 当且仅当存在集合族 $(U_u)_{\{u \in V\}}$，其中 U_u 是 X_u 的一个非空，开的有界子集，满足对于 $\forall u \in V$ 和 $e, e' \in E_u$，且 $e \neq e'$，有

（1）
$$\bigcup_{e \in E_u} S_e(U_{t(e)}) \subset U_u, \forall u \in V,$$

（2）
$$S_e(U_{t(e)}) \cap S_{e'}(U_{t(e')}) = \varnothing,$$

若 G 满足 OSC，并且对于 $\forall u \in V$，$U_u \cap K_u \neq \varnothing$，则 G 满足 $SOSC$[4-7].

简记

在路径中，$|\alpha|$ 记为路径的长度，E_{uv}^* 是所有有限路径 α 的集合且 $i(\alpha) = u, t(\alpha) = v$；$E_{uv}^{(n)}$ 是所有从顶点 u 到 v，长度为 n 的路径的集合；$E^{(n)}$ 是长度为 n 的路径的集合；E^* 为所有有限的路径的集合；E_u^* 为图中从 u 开始的所有有限路径的集合 .

空集约定为对于 $\forall u \in V$，$E_{uu}^{(0)}$ 只有一个元素，即从顶点 u 到 u 的一个空路径 .

注 2　E^* 是由 $\forall u \in V$，E_u^* 互不相交的并组成，如果 $\alpha = (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k) \in E^*$，则 $t(\alpha_j) = i(\alpha_{j+1})$，$j = 1, 2, 3 \cdots k-1$. 若 α，β 代表两个路径，且 $t(\alpha) = i(\beta)$，则 $\alpha\beta$ 也代表一个路径 . 若 $i(\alpha) = t(\alpha)$，则 α 为一个循环 .

下面考虑无限路径的情况 .

无限路径 $E^{(w)}$ 是每条边的终止顶点即为下一条边的初始顶点的集合，$E_u^{(w)}$ 为初始顶点为 u 的无限路径的集合 .

在 $E^{(w)}$ 中，定义 T 为左移位映射，即

$$T(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots) = (\alpha_2 \alpha_3 \cdots) .$$

对于 $\alpha \in E^* \cup E^{(w)}$，$k$ 为非负整数 . 若 $\alpha \in E^*$，且 $k \leqslant |\alpha|$. 令 $\alpha|_k = (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k)$，在 $E^* \cup E^{(w)}$ 中定义半序 $\alpha \prec \beta \Leftrightarrow \beta|_{|\alpha|} = \alpha$. 若 $\alpha \in E^*$，则记 $[\alpha] = \{\sigma \in E^{(w)} : \alpha \prec \sigma\}$ 是由 α 产生的柱集 . 因而，柱集 $[\alpha]$ 是起始路径为 α 的所有无限路径组成的集合，则可知 $E^{(w)}$ 为一个度量空间，且开集 $\{[\alpha] : \alpha \in E^*\}$ 为它的一个可数基 .

若 $\alpha = (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k) \in E^*$，记

$$\begin{aligned} &S_\alpha = S_{\alpha_1} S_{\alpha_2} \cdots S_{\alpha_k}, \qquad K_\alpha = S_\alpha(K_{t(\alpha)}), \\ &r_\alpha = r_{\alpha_1} r_{\alpha_2} \cdots r_{\alpha_k}, \qquad r_\alpha^* = r_{\alpha_1} r_{\alpha_2} \cdots r_{\alpha_{k-1}}, \\ &r_{\max} = \max\{r_e : e \in E\}, \quad r_{\min} = \min\{r_e : e \in E\}. \end{aligned}$$

由于 r_i 的不同，我们给出下面的定义：给定 $1 \geqslant b > 0$，令：

$$I_b = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_k) : r_\alpha \leqslant b < r_\alpha^*\}, \quad (\text{若} b > 1, I_b = \{\varnothing\}).$$

显然 I_b 的元素是不可约的，且 $K = \bigcup_{\alpha \in I_b} K_\alpha$.

令 $\varepsilon>0$,记

$$G_k=\bigcup(\varepsilon r_k,K_k),$$
$$I_k=\left\{\alpha\in I_{\mathrm{diam}G_k}:K_\alpha\cap G_k\neq\varnothing\right\},\gamma_\varepsilon=\sup_k\#I(k),$$

$\#I(k)$ 为 $I(k)$ 的基数 .

在文献[5]中给出了下面3个定义:

定义 2[5]　设 G 为 M-W 图,射影映射 $\pi:E^{(w)}\to X=\bigcup_{u\in V}X_u$.

$$\{\pi(\sigma)\}=\bigcap_{k=1}^{\infty}S_{\sigma|k}(X_{t(\sigma|k)}).$$

因为对于 $\forall e\in E,0<r_e<1$,所以 π 是连续的,并且对于 $\forall u\in V$,有 $K_u=\{\pi(\sigma):\sigma\in E_u^{(w)}\}$.

若 G 为强连通的,则对于每对顶点 u,v ,都有一条从顶点 u 到顶点 v 的定向路径 .

定义 3[5]　设 G 为 M-W 图,定义构造矩阵 $A_s=(\sum_{e\in E_{uv}}r_e^s)_{u,v\in V},s\geqslant 0$, 满足 $\Phi(s)=1$,其中 $\Phi(s)$ 为 A_s 的谱半径 .

注 3　若 G 为强连通的,则 A_s 不可约 .

定义 4[5]　若 $B\subset X=\bigcup_{u\in V}X_u$, 且 $\rho>0$. 定义 $N(B,\rho)$ 为中心在 B 内,半径为 ρ 的互不相交闭球的最大个数 . 若对于 $\forall 0<\beta<1$, 存在常数 C,D, 使得对于 $\forall D>R>0,x\in B$,有 $N(U(x,R),\beta R)<C$ 成立,则称 B 为一个 β 空间 .

设 (X,d) 是完备度量空间, X 的紧子集的 Hausdorff 度量也为 d .

$$D(F,K)=\inf\{d(x,y):x\in F,y\in K\},F\subset X,K\subset X.$$

$U(x,\varepsilon)$ 是 X 的 ε 邻域, $U(F,\varepsilon)=\bigcup\{U(x,\varepsilon):x\in F\}$.

注 4　下面的定理都是在 $H^\alpha(K)<\infty$ 下讨论的 .

1　定理及其证明

定理 1　若对于 $\forall u\in V$, $\gamma_u<\infty$,则图定向自相似集 K 满足强开集条件(SOSC).

证明　因为 $\gamma_u=\sup_{\xi\in E_u^*}\{\#I^u(\xi)\}<\infty$, 所以对于 $\forall u\in V$,选择 $\xi^u\in E_u^*$, 满足 $\#I^u(\xi^u)=\gamma_u$.

下面证明一个论断:对于 $\forall u\in V$, $\alpha\in E_{uu}^*$, 有 $I^u(\alpha\xi^u)=\{\alpha\beta:\beta\in I^u(\xi^u)\}$.

首先设 $\alpha\beta\in\{\alpha\beta:\beta\in I^u(\xi^u)\}$,则 $r_\beta\leqslant r_{\xi^u}<r_{\beta||\beta|-1},K_\beta\cap G_{\xi^u}\neq\varnothing$. 可得

$$\varnothing\neq S_\alpha(K_\beta\cap G_{\xi^u})=K_{\alpha\beta}\cap G_{\alpha\xi^u},$$
$$r_{\alpha\beta}\leqslant r_{\alpha\xi^u}<r_{\alpha\beta||\alpha\beta|-1}.$$

所以 $\alpha\beta\in I^u(\alpha\xi^u)$.

反之,因为 $\#I^u(\alpha\xi^u)\leqslant\#I^u(\xi^u)$, 所以 $I^u(\alpha\xi^u)\subseteq\{\alpha\beta:\beta\in I^u(\xi^u)\},\forall u\in V$.

令

$$W_u=\bigcup_{\alpha\in E_u^*}G^*_{\alpha\xi^{t(\alpha)}},G^*_\sigma=N\left(K_\sigma,\frac{1}{2}\varepsilon r_\sigma\right),$$

下面证明:开集 $\{W_u\}_{u\in V}$ 满足 SOSC.

(1)因为 $K_{\xi^u}\subset G^*_{\xi^u}\subset W_u$, 所以 $K_u\cap W_u\neq\varnothing$.

(2)对于 $\forall e\in E_{vu},S_e(W_u)=S_e(\bigcup_{\alpha\in E_u^*}G^*_{\alpha\xi^{t(\alpha)}})=\bigcup_{\alpha\in E_u^*}G^*_{e\alpha\xi^{t(\alpha)}}\subset W_v$.

(3)对于 $\forall e\in E_{vu},e'\in E_{vu'},e\neq e',S_e(W_u)\cap S_{e'}(W_{u'})=\varnothing$.

否则, $\exists\alpha\in E_u^*,\beta\in E_{u'}^*$, 使得 $G^*_{e\alpha\xi^{t(\alpha)}}\cap G^*_{e'\beta\xi^{t(\beta)}}\neq\varnothing$.

设 $r_{e\alpha\xi^{t(\alpha)}}\geqslant r_{e'\beta\xi^{t(\beta)}}$. 若 $y\in G^*_{e\alpha\xi^{t(\alpha)}}\cap G^*_{e'\beta\xi^{t(\beta)}}$, 则 $\exists y_1\in K_{e\alpha\xi^{t(\alpha)}},y_2\in K_{e'\beta\xi^{t(\beta)}}$, 满足:

$$|y-y_1|<\frac{1}{2}\varepsilon r_{e\alpha\xi^{t(\alpha)}},|y-y_2|<\frac{1}{2}\varepsilon r_{e'\beta\xi^{t(\beta)}}.$$

所以 $|y_1-y_2|<\varepsilon r_{e\alpha\xi^{t(\alpha)}}$, 即 $e'\beta\xi^{t(\beta)}\in I^{v}(e\alpha\xi^{t(\alpha)})$.

若 $v=t(\alpha)$,则由论断可得 $e'\beta\xi^{t(\beta)}=e\alpha\sigma,\sigma\in I^{v}(\xi^{v})$. 因为 $e\neq e'$, 所以假设不成立 .

若 $v\neq t(\alpha)$,由 G 为强连通可得 $\exists w\in E_{t(\alpha)v}$,满足 $we'\beta\xi^{t(\beta)}\in I^{t(\alpha)}(we\alpha\xi^{t(\alpha)})=we\alpha\sigma,\sigma\in I^{t(\alpha)}(\xi^{t(\alpha)})$. 因为 $e\neq e'$, 所以假设不成立 .

综上所述,对于 $\forall e\in E_{vu},e'\in E_{vu'},e\neq e',S_e(W_u)\bigcap S_{e'}(W_{u'})=\varnothing$. 证毕 .

推论 1　每个 R^s 为一个 β 空间,每一个 β 空间的紧子集为一个 β 空间 .

证明　此推论是[6]中定理 11 的结果 .

定理 2　若 K 为一个 β 空间,且满足 $SOSC$,则 $H^{\alpha}(K)>0$.

证明　对于 $\forall v\in V$,设 $\{U_v\}_{v\in V}$ 为满足 $SOSC$ 的开集,则:$U_v\bigcap K_v\neq\varnothing$. 即 $\exists x\in K_v,\varepsilon>0$,使得 $B(x,\varepsilon)\subset U_v$. 设 B 为可测集,使得 $b=\dfrac{\mathrm{diam}B}{\mathrm{diam}K}\leqslant 1$.

对于 $\forall u,v\in V$,令

$$I_b^{uv}=\left\{\alpha\in E_{uv}^{*}:r_{\alpha}\leqslant b<r_{\alpha||\alpha|-1}\right\},\quad I^{uv}=\left\{e\in I_{uv}^{*}:\bigcup_{e\in E_{uv}^{*}}S_e(K_v)\bigcap B\neq\varnothing\right\},\quad I^{u}=\bigcup_{u\in V}I^{uv},\quad I=\bigcup_{u\in V}I^{u},$$

$S_e(B(x,\varepsilon))\bigcap K=B(x_e,\varepsilon r_e)\bigcap K$ 是互不相交的,且 $\forall y\in B$ 都包含在

$$\bigcup\left(y,\mathrm{diam}B+\max_{e\in I}\mathrm{diam}K_{i(e)}+\max_{e\in I}\varepsilon r_e\right)\subset\bigcup\left(y,b\left(2\mathrm{diam}K+\varepsilon\right)\right).$$

存在常数 C(依赖 ε),使得 $\#I\leqslant C$. 所以有

$$\mu(B)\leqslant C\max_{e'\in I}\mu\left(K_{i(e')}\right)=C\max_{e'\in I}\mu\left(\bigcup_{e\in E_{i(e')}}S_e(K_{t(e)})\right)=C\max_{e'\in I}\sum_{v\in V}\sum_{e\in E_{i(e')v}}r_e^{s}\mu(K_v)\leqslant Cb^{s}.$$

所以由质量分布原理得 $H^{\alpha}(K)>0$. 证毕 .

定理 3　若 $\{K_u\}_{\{u\in V\}}$ 是互不相交的,则 $H^{\alpha}(K)>0$.

证明　令 $\delta=\min\limits_{e\neq e'}D\left(\bigcup\limits_{e\in E_u}S_e(K_{t(e)}),\bigcup\limits_{e'\in E_u}S_{e'}(K_{t(e')})\right)$.

下面考虑一个可测集 $B\subset X,b$ 在定理 2 中已定义,使得 $b=\dfrac{2\mathrm{diam}B}{\delta}\leqslant 1$,则 $\mathrm{diam}B<\delta r_{\alpha}^{*}$,所以 B 至多与一个 K_u 相交,则

$$\mu(B)\leqslant\mu\left(K_u\right)=\mu\left(\bigcup_{e\in E_u}S_e(K_{t(e)})\right)=\sum_{v\in V}\sum_{e\in E_{uv}}r_e^{\alpha}\mu(K_v)\leqslant b^{\alpha}\sum_{v\in V}\sum_{v\in V}\mu(K_v)=b^{\alpha}\leqslant 2^{\alpha}\delta^{-\alpha}\left(\mathrm{diam}B\right)^{\alpha}.$$

所以由质量分布原理得 $H^{\alpha}(K)>0$. 证毕 .

定理 4　设 (V,E) 为强连通图,若 K 满足 $SOSC$,则 $\dim K=\alpha$.

证明　因为 K 满足强开集条件,设 $\{U_u\}_{\{u\in V\}}$ 为满足条件的开集,则对于 $\forall\alpha\in E_{vu}^{(n)},\alpha'\in E_{vu}^{(n)},\alpha\neq\alpha'$, 有

$$S_{\alpha}\left(U_u\right)\bigcap S_{\alpha'}\left(U_{u'}\right)=\varnothing,S_{\alpha}\left(U_u\right)\subset U_v.$$

由[7],对于 $\forall u,u'\in V$ 有一个循环 $\beta\in E_{uu}^{*},\ \eta\in E_{u'u'}^{*}$,使得 $S_{\beta}\left(K_u\right)\subseteq U_u,S_{\eta}\left(K_{u'}\right)\subseteq U_{u'}$, 所以 $S_{\alpha}(S_{\beta}\left(K_u\right))\bigcap S_{\alpha'}(S_{\eta}\left(K_{u'}\right))=\varnothing$, 即 $S_{\alpha\beta}\left(K_u\right)\bigcap S_{\alpha'\eta}\left(K_{u'}\right)=\varnothing$.

下面定义新的 IFS,首先定义一新的定向图 (V',E')

$$V'=V,E_{uv}'=\left\{\alpha\beta_v:\alpha\in E_{uv}^{(n)}\right\},S_{\alpha\beta_v}'=S_{\alpha\beta_v}.$$

而 $S_{\alpha\beta_v}'\left(K_v'\right)\subseteq K_u$,所以 K_v' 为 K_v 的子集 . 所以 $S_{\alpha\beta_u}'\left(K_u'\right)\bigcap S_{\alpha'\eta_u}'\left(K_{u'}'\right)=\varnothing$,即 $\{K_u'\}_{\{u\in V\}}$ 是互不相交的 .

由定理 3 得, $H^{\alpha'}(K')>0$,由 $K'=\bigcup\limits_{u\in V}K_u'$,所以 $H^{\alpha'}(K)>0$,则 $\alpha'\leqslant\dim K\leqslant\alpha$.

假设　$\beta=\dim K<\alpha$,即 $\alpha'\leqslant\beta<\alpha$.

因为 (V,E) 为强连通的,所以 $A_s=(\sum\limits_{e\in E_{uv}}r_e^{s})$ 不可约,且 A_s 有特征值为 1 ,则有正特征向量

$$\lambda_u=\sum_{v\in V}\sum_{e\in E_{uv}} r_e^s\lambda_v,\ \ 且\sum_{u\in V}\lambda_v=1.$$

因为 (V',E') 也为强连通的,同理得 $A_s'=\left(\sum_{\alpha\in E_{uv}^{(n)}} r_{\alpha\beta^v}^s\right)$ 不可约,且有正特征向量

$$\lambda_u'=\sum_{v\in V}\sum_{\alpha\in E_{uv}^{(n)}} r_{\alpha\beta^v}^s\lambda_v',\ \ 且\sum_{u\in V}\lambda_v'=1.$$

所以 $\sum_{u\in V}\sum_{v\in V}\sum_{\alpha\in E_{uv}^{(n)}} r_{\alpha\beta^v}^{\alpha'}\lambda_v'=1$.

令 $C=\min_{v\in V} r_{\beta^v}$,则

$$C^{-\alpha'}\geqslant\sum_{u\in V}\sum_{v\in V}\sum_{\alpha\in E_{uv}^{(n)}} r_\alpha^{\alpha'}\lambda_v'\geqslant\sum_{u\in V}\sum_{v\in V}\sum_{\alpha\in E_{uv}^{(n)}} r_\alpha^{\beta}\lambda_v'=\sum_{u\in V}\sum_{v\in V}\sum_{\alpha\in E_{uv}^{(n)}} r_\alpha^{\alpha}r_\alpha^{\beta-\alpha}\lambda_v'\geqslant\sum_{u\in V}\sum_{v\in V}\sum_{\alpha\in E_{uv}^{(n)}} r_\alpha^{\alpha}r_{\max}^{n(\beta-\alpha)}\lambda_v'\geqslant$$

$$\sum_{u\in V}\sum_{v\in V}\sum_{\alpha\in E_{uv}^{(n)}} r_\alpha^{\alpha}r_{\max}^{n(\beta-\alpha)}\min_{v\in V}\frac{\lambda_v'}{\lambda_v}\lambda_v=r_{\max}^{n(\beta-\alpha)}\min_{v\in V}\frac{\lambda_v'}{\lambda_v}\to\infty\quad(n\to\infty),$$

而 $C^{-\alpha'}$ 被 C^{-b} 限定,则与假设矛盾.所以 $\dim K=\alpha$.证毕.

定理5　若对于某一 $u\in V$,有 $\gamma_u<\infty$,则 K 是一个 β 空间.

证明　对于 $\forall u\in V,\xi\in E_u^*,\gamma_u=\sup_{\xi\in E_u^*}\left\{\#I^u(\xi)\right\}<\infty$.

设 $0<d<1,\forall u,v\in V$,

$$I_d^{uv}=\left\{\alpha\in E_{vv}^*:r_\alpha\leqslant d<r_{\alpha||\alpha|-1}\right\},$$
$$I_d^{u}=\left\{\alpha\in E_{u}^*:r_\alpha\leqslant d<r_{\alpha||\alpha|-1}\right\}.$$

令 $r_\varnothing=1$,则 $I_d^u=\bigcup_{v\in V}I_d^{uv},K_u=\bigcup_{\alpha\in I_d^u}K_\alpha$.

由 $\xi\in E_u^*$ 可得

$$I^u(\xi)=\left\{\alpha\in I_{r\xi}^u:K_\alpha\cap G_\xi\neq\varnothing\right\},\quad I^{uv}(\xi)=\left\{\alpha\in I_{r\xi}^{uv}:K_\alpha\cap G_\xi\neq\varnothing,\forall v\in V\right\},\quad I^u(\xi)=\bigcup_{v\in V}I^{uv}(\xi).$$

首先证明:对于 $\rho\leqslant\mathrm{diam}K$,有 $N(K,\rho)\leqslant\left(\frac{\mathrm{diam}K}{\rho r_{\min}}\right)^\alpha$.

设 $B_1,B_2,B_3,\cdots B_p$ 为半径为 ρ,中心 x_k 在 K 上的互不相交的球,有 $\alpha_k\in I_{\frac{\rho}{\mathrm{diam}K}}$,即 $r_{\alpha_{k_1k_2\cdots k_n}}\leqslant\frac{\rho}{\mathrm{diam}K}<r_{\alpha_{k_1k_2\cdots k_{n-1}}}$,使得 $x_k\in K_{i(\alpha_k)}$,所以 $K_{i(\alpha_k)}\subset B_k$,即 $\left\{K_{i(\alpha_k)}\right\}$ 是互不相交的.

令 $K'=\bigcup K_{i(\alpha_k)}\subset K$,由定理3得 $\dim K'=\beta\leqslant\alpha$,且

$$1=\sum_{v\in V}\sum_{\alpha\in E_{uv}^*} r_\alpha^\beta\lambda_v\geqslant p\left(\frac{\rho r_{\min}}{\mathrm{diam}K}\right)^\beta\sum_{v\in V}\lambda_v=p\left(\frac{\rho r_{\min}}{\mathrm{diam}K}\right)^\beta,$$

所以 $p=N(K,\rho)\leqslant\left(\frac{\mathrm{diam}K}{\rho r_{\min}}\right)^\alpha$.

设 $x\in K$,给定 $R,\rho,\alpha\in I_b^{uv},b=\frac{R}{\varepsilon}$,使得 $x\in K_u$.由于 $U(x,R)\subset U(K_u,\varepsilon r_{\alpha||\alpha|-1})$,所以

$$N(U(x,R),\rho)\leqslant\mathrm{N}(K,\rho)\leqslant\sum_{u\in V}\sum_{\alpha\in I_b^u}\left(\frac{\mathrm{diam}K_\alpha}{\rho r_{\min}}\right)^\alpha\leqslant A\gamma_u r_\alpha^\alpha\left(\frac{\mathrm{diam}K}{\rho r_{\min}}\right)^\alpha\leqslant A\gamma_u\left(\frac{R}{\varepsilon}\right)^\alpha\left(\frac{\mathrm{diam}K}{\rho r_{\min}}\right)^\alpha\leqslant A\gamma_u\left(\frac{R}{\rho}\right)^\alpha\left(\frac{\mathrm{diam}K}{\varepsilon r_{\min}}\right)^\alpha.$$

$A=\#\{u|u\in V\}$,

所以 K 为一个 β 空间.证毕.

推论2　若对于某个 $u\in V$,$\gamma_u<\infty$,则 $H^\alpha(K)>0$

证明　由定理1及定理3和定理5可得.证毕.

[参考文献]

[1] SCHIEF A. Separation properties for self-similarsets[J]. Proceeding of the American mathematical society, 1994, 122: 111-115.

[2] SCHIEF A. Self-similar sets in complete metric spaces[J]. Proceeding of the American mathematical society, 1996, 124: 481-490.

[3] MAULDIN R D, WILLIAMS S C. Hausdorff dimension in graph directed constructions[J]. Transactions of the American Math Soc, 1988, 309: 811-829.

[4] EDGAR G A. Measure, topology, and fractal geometry[M]. New York: Springer Verlag, 1990.

[5] WANG J L. The open set condition for graph directed self-sim-ilar sets[J]. Random Compu Dynam, 1997, 5: 283-305.

[6] LARMAN D G.A new theory of dimension[J]. Proc London Math Soc, 1967, 17(3): 178-192.

[7] EDGAR G A, GOLDS J. A fractal dimension estimate for a graph-directed iterated function system of non-similarities[J]. Indiana Univ Math J, 1999, 48(2): 429-447.

[责任编辑:陆炳新]

(上接第3页)

[参考文献]

[1] ARHANGEL'SKII A V, Tkachenko M. Topological groups and related structures[M]. Paris: Atlantis Press and World Sci, 2008.

[2] ČHOBAN M M. On topological homogeneous algebras[C]//Interim Reports of II Prague Topol Symp, Prague, 1987: 25-26.

[3] ČHOBAN M M. The structure of locally compact algebras[J]. Serdica, 1992, 18: 129-137.

[4] USPENSKII V V. Topological groups and Dugundji compacta[J]. Mat Sb, 1989, 180: 1 092-1 118.

[5] GUL'KO A S. Rectifiable spaces[J]. Topology Appl, 1996, 68: 107-112.

[6] ENGELKING R. General topology[M]. Berlin: Heldermann Verlag, 1989.

[7] 林福财. 拓扑代数与广义度量空间[M]. 厦门:厦门大学出版社, 2012: 10-11.

[8] FUCAI L, JING Z, KEXIU Z. Locally σ-compact rectifiable spaces[J]. Topology Appl, 2015, 193: 182-191.

[责任编辑:陆炳新]