doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2016.03.002

一类具有非线性传染率和生育脉冲的随机SIS传染病模型的动力学分析

蒋贵荣[1],杨 鲲[2],林 娇[3]

(1.桂林航天工业学院电子信息与自动化学院,广西 桂林 541004)
(2.三门峡市外国语高级中学,河南 三门峡 472000)
(3.百色学院数学与统计学院,广西 百色 533000)

[摘要] 研究了一类具有非线性传染率、生育脉冲和随机干扰的SIS传染病模型.通过建立Lyapunov函数证明了全局正解的存在唯一性,研究疾病是否消亡,得到了疾病灭绝的充分条件,利用随机非线性理论中Lyapunov指数,得到无病解随机指数渐近稳定的充分条件.

[关键词] 随机SIS传染病模型,非线性传染率,生育脉冲,Lyapunov函数
[中图分类号]O175.1 [文献标志码]A [文章编号]1001-4616(2016)03-0010-06

Dynamics Analysis of a Stochastic SIS Epidemic Model with Nonlinear Incidence and Birth Pulses

Jiang Guirong[1],Yang Kun[2],Lin Jiao[3]

(1.College of Electronic Information and Automation,Guilin University of Aerospace Technology,Guilin 541004,China)
(2.Sanmenxia Foreign Language High School,Sanmenxia,472000,China)
(3.School of Mathematics and Statics,Baise University,Baise 533000,China)

Abstract:A stochastic SIS epidemic model with nonlinear incidence and birth pulses is investigated in this paper. The existence and uniqueness of the global positive solution are proved by establishing Lyapunov function. The sufficient condition for stochastic extinction of the infection is gained. The sufficient condition for the stochastically exponentially asymptotically stability of infection-free solution is gained by using the Lyapunov exponents.

Key words:stochastic SIS epidemic model,nonlinear incidence,birth pulses,Lyapunov function

传染病始终威胁着人类的生命健康与生存发展,如何预防传染病的产生,以及如何制定有效的防控策略,越来越成为当今世界研究的重大课题.传染病动力学是对传染病做定性、定量、稳定性等方面分析的一种重要方法.对于传染病动力学的研究,国内外许多学者做了大量的工作[1-3].

传染病在传播过程中存在状态变量突然变化的现象,可用脉冲微分方程来对其进行描述[4].Jiao[5]等研究了在固定时刻对害虫数量脉冲控制的SI害虫管控模型,并通过与经典模型对比,得出脉冲控制方法更优的结论.甘文珍、史一欢[6]利用Lyapunov函数的方法研究了一类具有弱耦合扩散与非线性发生率的SIRS传染病模型,得到当$R<1$,初值较小且在一定范围内时,无病平衡点渐近稳定的结论.

传染病的传播还常常受到白噪声等随机因素的干扰,因此随机微分方程理论在传染病动力学的研究中是非常必要的.周艳丽、张卫国[7]研究了一类具有非线性传染率的随机SIS传染病模型,分析并得到了疾病持续存在与随机灭绝的充分条件.王伟华[8]利用随机微分方程理论分析了一类具有比率依赖的动力学行为,得到了系统正解的存在性、随机最终有界性等结论.

收稿日期:2015-11-13.
基金项目:国家自然科学基金(11662001,11562006)、广西自然科学基金(2012GXNSFAA053006)、广西教育厅科研项目(KY2015YB112)、广西研究生教育创新计划项目(YCSZ2014143).
通讯联系人:蒋贵荣,博士,教授,研究方向:非光滑动力系统动力学分析.E-mail:grjiang9@163.com

传染病在传播过程中会同时受到人为因素、白噪声等多种不同因素的干扰,而在一个模型中同时考虑脉冲效应与随机扰动的研究并不多见 . 另外,已有的文献里传染病模型中大多考虑的随机因素项单一,例如只考虑染病者转为易感者的比率有随机干扰的情形 . 基于以上因素,本文研究一类具有非线性传染率和脉冲生育的随机 SIS 传染病模型,考虑复杂的随机干扰,将随机因素引进到模型中的传染率、死亡率和染病者转为易感者的比率里,并从理论分析和数值模拟两方面研究该随机传染病模型的复杂动力学行为 .

1 模型描述

设 $S(t)$, $I(t)$ 分别代表 t 时刻易感者和感染者的数量,文献[9]讨论了 SIS 传染病模型

$$\begin{cases}\left.\begin{array}{l}\dot{S}=-\beta SI-\sigma S+\delta I\\ \dot{I}=\beta SI-(\sigma+\delta)I\end{array}\right\}, & t\neq nT,\\ \left.\begin{array}{l}\Delta S=b\mathrm{e}^{-N}N\\ \Delta I=0\end{array}\right\}, & t=nT,\end{cases}$$

其中 β,σ,δ,b 均为正常数, βSI 为双线性发生率, σ 为死亡率且 $0\leqslant\sigma\leqslant 1$, δ 为染病者转为易感者的比率 . 生育脉冲发生在 $t=nT\ (n\in\mathbf{N}^{+})$ 时刻,在不考虑垂直传染的情况下,生育脉冲为 $\Delta N=b\mathrm{e}^{-N}N$,即新出生个体均为易感者, T 是两个连续生育脉冲发生时间之差, $\Delta S=S(t^{+})-S(t)$, $\Delta I=I(t^{+})-I(t)$.

系统中传染率 βSI 是线性的,而日常生活中的实际情况相对复杂,因而这里考虑非线性的传染率 $\dfrac{\beta SI}{\psi(I)}$. 考虑到易感者与染病者的死亡率不一定相等,令 σ_1, σ_2 分别表示易感者与染病者的死亡率 . 系统常常受到外界的噪声干扰,现在假设模型中的每一项都受到随机干扰,对参数 β, σ_1, σ_2, δ 做如下变换

$$\beta\to\beta+\alpha_1\dot{B}_1(t),\qquad \sigma_1\to\sigma_1+\alpha_2\dot{B}_2(t),$$
$$\sigma_2\to\sigma_2+\alpha_3\dot{B}_3(t),\qquad \delta\to\delta+\alpha_4\dot{B}_4(t).$$

从而得到具有非线性传染率的传染病模型:

$$\begin{cases}\left.\begin{array}{l}\mathrm{d}S=\left(-\dfrac{\beta SI}{\psi(I)}-\sigma_1 S+\delta I\right)\mathrm{d}t-\dfrac{\alpha_1 SI}{\psi(I)}\mathrm{d}B_1(t)-\alpha_2 S\mathrm{d}B_2(t)+\alpha_4 I\mathrm{d}B_4(t)\\ \mathrm{d}I=\left(\dfrac{\beta SI}{\psi(I)}-(\sigma_2+\delta)I\right)\mathrm{d}t+\dfrac{\alpha_1 SI}{\psi(I)}\mathrm{d}B_1(t)-\alpha_3 I\mathrm{d}B_3(t)-\alpha_4 I\mathrm{d}B_4(t)\end{array}\right\}, & t\neq nT,\\ \left.\begin{array}{l}\Delta S=b\mathrm{e}^{-N}N\\ \Delta I=0\end{array}\right\}, & t=nT,\end{cases}\tag{1}$$

其中 α_i, $\dot{B}_i(t)\ (i=1,2,3,4)$ 分别表示白噪声强度与标准白噪声, $\psi(I)$ 满足 $\psi(0)=1$ 和 $\psi'(I)\geqslant 0$. 容易看出对于所有的 $I\geqslant 0$ 都有 $\psi(I)\geqslant 1$.

2 全局正解的存在唯一性

定理 1 对于任意给定初值 $S(0)>0$, $I(0)>0$,当 $t\geqslant 0$ 时,系统(1)存在唯一解 $S(t)>0$, $I(t)>0$.

证明 首先,建立如下无生育脉冲的系统:

$$\begin{cases}\mathrm{d}\bar{S}=\left(-\dfrac{\beta\bar{S}\bar{I}}{\psi(\bar{I})}-\sigma\bar{S}+\delta\bar{I}\right)\mathrm{d}t-\dfrac{\alpha_1\bar{S}\bar{I}}{\psi(\bar{I})}\mathrm{d}B_1(t)-\alpha_2\bar{S}\mathrm{d}B_2(t)+\alpha_4\bar{I}\mathrm{d}B_4(t),\\ \mathrm{d}\bar{I}=\left(\dfrac{\beta\bar{S}\bar{I}}{\psi(\bar{I})}-(\sigma+\delta)\bar{I}\right)\mathrm{d}t+\dfrac{\alpha_1\bar{S}\bar{I}}{\psi(\bar{I})}\mathrm{d}B_1(t)-\alpha_3\bar{I}\mathrm{d}B_3(t)-\alpha_4\bar{I}\mathrm{d}B_4(t).\end{cases}\tag{2}$$

系统(2)的系数是局部 Lipschitz 连续的,故对于任意给定的初值 $(\bar{S}(0),\ \bar{I}(0))\in D$,系统(2)存在唯一的局部解 $(\bar{S}(t),\ \bar{I}(t))\in D$, $t\in[0,\tau_e)$,其中 τ 为爆破时间 . 现定义停时

$$\tau_k=\inf\left\{t\in[0,\tau_e]:\bar{S}(t)\leqslant 0\quad\text{或}\quad\bar{I}(t)\leqslant 0\right\},$$

其中假设 $\inf\phi=\infty$ (ϕ 表示空集). 由停时的定义可知,如果可以证明 $\tau_k=\infty$ a.s.,那么当 $t>0$ 时, $\tau_e=\infty$,并且 $\bar{S}(t)>0$, $\bar{I}(t)>0$ 一定存在 . 若不然,则存在常数 $T>0$ 和 $\varepsilon\in(0,\ 1)$ 使得 $P\{\tau_k\leqslant T\}>\varepsilon$.

下面证明 $\tau_k=\infty$ a.s.,考虑如下 Lyapunov 函数

$$V\left(\bar{S}(t),\ \bar{I}(t)\right)=-\ln\left(\frac{\sigma\bar{S}}{b}\right)-\ln\left(\frac{\sigma\bar{I}}{b}\right),$$

其中 b 为正常数,由 Itô 公式得

$$\mathrm{d}V(\bar{S},\ \bar{I})=-\frac{1}{\bar{S}}\mathrm{d}\bar{S}-\frac{1}{\bar{I}}\mathrm{d}\bar{I}+\frac{1}{2\bar{S}^2}(\mathrm{d}\bar{S})^2+\frac{1}{2\bar{I}^2}(\mathrm{d}\bar{I})^2=\left(\frac{\beta\bar{I}}{\psi(\bar{I})}+\sigma_1-\frac{\delta\bar{I}}{\bar{S}}+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_1\bar{I}}{\psi(\bar{I})}\right)^2+\frac{1}{2}\alpha_2^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_4\bar{I}}{\bar{S}}\right)^2\right)\mathrm{d}t+$$
$$\left(-\frac{\beta\bar{S}}{\psi(\bar{I})}+(\sigma_2+\delta)+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_1\bar{S}}{\psi(\bar{I})}\right)^2+\frac{1}{2}\alpha_3^2+\frac{1}{2}\alpha_4^2\right)\mathrm{d}t+\frac{\alpha_1\bar{I}}{\psi(\bar{I})}\mathrm{d}B_1(t)+\alpha_2\mathrm{d}B_2(t)-\frac{\alpha_4\bar{I}}{\bar{S}}dB_4(t)-\frac{\alpha_1\bar{S}}{\psi(\bar{I})}\mathrm{d}B_1(t)+$$
$$\alpha_3\mathrm{d}B_3(t)+\alpha_4\mathrm{d}B_4(t),$$

因为 $\psi(\bar{I})\geqslant 1$,那么

$$\mathrm{d}V(\bar{S},\bar{I})\leqslant Q(\bar{S}(s),\ \bar{I}(s))\mathrm{d}t+\frac{\alpha_1(\bar{I}-\bar{S})}{\psi(\bar{I})}\mathrm{d}B_1(t)+\alpha_2\mathrm{d}B_2(t)+\alpha_3\mathrm{d}B_3(t)+\alpha_4\frac{\bar{S}-\bar{I}}{\bar{S}}\mathrm{d}B_4(t),\tag{3}$$

其中

$$Q(\bar{S}(s),\ \bar{I}(s))=\beta\bar{I}+\frac{1}{2}\alpha_1^2\bar{I}^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_4\bar{I}}{\bar{S}}\right)^2+(\sigma_1+\sigma_2+\delta)+\frac{1}{2}\alpha_1^2\bar{S}^2+\frac{1}{2}\alpha_2^2+\frac{1}{2}\alpha_3^2+\frac{1}{2}\alpha_4^2,$$

对(3)两边同时从 0 到 t 积分得

$$V(\bar{S},\bar{I})\leqslant V(\bar{S}(0),\ \bar{I}(0))+\int_0^t Q(\bar{S}(s),\bar{I}(s))\mathrm{d}s+\int_0^t\frac{\alpha_1(\bar{I}-\bar{S})}{\psi(\bar{I})}\mathrm{d}B_1(s)+\int_0^t\alpha_4\left(\frac{\bar{S}-\bar{I}}{\bar{S}}\right)\mathrm{d}B_4(s)=P(\bar{S},\bar{I}),$$

又因为 $V\left(\bar{S}(t),\ \bar{I}(t)\right)=-\ln\left(\frac{\sigma\bar{S}}{b}\right)-\ln\left(\frac{\sigma\bar{I}}{b}\right)$,且由停时的定义可知 $\lim\limits_{t\to\tau_k}V(\bar{S},\bar{I})=\infty$,所以得出矛盾

$$\infty\leqslant P(\bar{S},\bar{I})<\infty,$$

故必有 $\tau_k=\infty$ a.s.,那么对于任意给定初值 $\bar{S}(0)>0$,$\bar{I}(0)>0$,系统(2)存在唯一解 $\bar{S}(t)>0,\bar{I}(t)>0$.

那么,对于系统(1),当 $t\in[0,\ T]$ 时,对于任意给定初值 $S(0)>0$,$I(0)>0$,显然系统(1)存在唯一解 $S_1(t)>0,\ I_1(t)>0$;由于系统(1)中存在生育脉冲,当 $t=T$ 时,因为 $b>0$,那么必有

$$S(T^+)=S(T)+\Delta S>0,\ I(T^+)=I(T)+\Delta I>0,$$

所以当 $t\in(T,\ 2T]$ 时,系统(1)唯一的解为 $S_2(t)>0,I_2(t)>0$;依此可得,当 $t\in(kT,(k+1)T]$ 时,$S_{k+1}(t)>0,I_{k+1}(t)>0$.

所以对于任意给定初值 $S(0)>0,\ I(0)>0$,当 $t\geqslant 0$ 时,系统(1)存在唯一解 $S(t)>0,\ I(t)>0$.

3　疾病的随机灭绝性

引理 1[10]　如果当 $t\geqslant 0$ 时,$M(t)$ 是一个局部连续鞅,且满足 $M(0)=0$,那么存在 $k_0(\omega)$ 对几乎所有的满足 $k>k_0(\omega)$ 的 $\omega\in\Omega$ 都有如下不等式成立:

$$M(t)\leqslant\frac{\gamma_k}{2}\langle M(t)\rangle+\frac{\theta\ln k}{\gamma_k},$$

其中,γ_k 为一列正数,$\theta>1$,$\langle M(t)\rangle$ 是 $M(t)$ 的二次变分 .

定理 2　在随机系统(1)中,对于任意具有正初值的解 $(S(t),I(t))$,假设条件:

$$2\alpha_1^2(\sigma_2+\delta+\frac{1}{2}\alpha_3^2+\frac{1}{2}\alpha_4^2)-\beta^2>0$$

成立,则系统中的染病者 $I(t)$ 将以指数形式趋于零 .

证明　定义 Lyapunov 函数

$$V(I(t))=\ln I(t),$$

由 Itô 公式得

$$\mathrm{d}V(I)=\frac{1}{I}\mathrm{d}I-\frac{1}{2I^2}(\mathrm{d}I)^2=\left(\frac{\beta S}{\psi(I)}-(\sigma_2+\delta)-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_1 S}{\psi(I)}\right)^2-\frac{1}{2}\alpha_3^2-\frac{1}{2}\alpha_4^2\right)\mathrm{d}t+\frac{\alpha_1 S}{\psi(I)}\mathrm{d}B_1(t)-\alpha_3\mathrm{d}B_3(t)-\alpha_4\mathrm{d}B_4(t),$$

将上式两边同时从 0 到 t 积分得

$$\ln I(t)-\ln I(0)=\int_0^t\left(\frac{\beta S(s)}{\psi(I(s))}-(\sigma_2+\delta)-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_1 S(s)}{\psi(I(s))}\right)^2-\frac{1}{2}\alpha_3^2-\frac{1}{2}\alpha_4^2\right)\mathrm{d}s-\alpha_3B_3(t)-\alpha_4B_4(t)+M(t)\ , \tag{4}$$

其中 $M(t)=\int_0^t\frac{\alpha_1 S(s)}{\psi(I(s))}\mathrm{d}B_1(s)$. 由引理 1 可得如下不等式:

$$M(t)\leqslant\frac{\gamma_k}{2}\alpha_1^2\int_0^t\left(\frac{S(s)}{\psi(I(s))}\right)^2\mathrm{d}s+\frac{2\ln k}{\gamma_k}\ ,\quad t\in[0,k]\ , \tag{5}$$

将(5)代入(4)可以得到

$$\ln I(t)\leqslant\ln I(0)+\left(\frac{\beta^2}{2(1-\gamma_k)\alpha_1^2}-\sigma_2-\delta-\frac{1}{2}\alpha_3^2-\frac{1}{2}\alpha_4^2\right)t-\alpha_3B_3(t)-\alpha_4B_4(t)+\frac{2\ln k}{\gamma_k}\ ,$$

因此,当 $k-1\leqslant t\leqslant k$ 时,有

$$\frac{\ln I(t)}{t}\leqslant\frac{\ln I(0)}{t}+\left(\frac{\beta^2}{2(1-\gamma_k)\alpha_1^2}-\sigma-\delta-\frac{1}{2}\alpha_3^2-\frac{1}{2}\alpha_4^2\right)-\alpha_3\frac{B_3(t)}{t}-\alpha_4\frac{B_4(t)}{t}+\frac{2\ln k}{\gamma_k(k-1)}\ ,$$

由强大数定律可知 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{B_i(t)}{t}=0$. 令 $k\to\infty$, $\gamma_k\to 0$ 有

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\ln I(t)}{t}\leqslant\frac{\beta^2}{2\alpha_1^2}-(\sigma_2+\delta+\frac{1}{2}\alpha_3^2+\frac{1}{2}\alpha_4^2)\ \text{a.s.}. \tag{6}$$

因为条件 $2\alpha_1^2(\sigma_2+\delta+\frac{1}{2}\alpha_3^2+\frac{1}{2}\alpha_4^2)-\beta^2>0$ 成立,由上式得到

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\ln I(t)}{t}\leqslant\frac{\beta^2}{2\alpha_1^2}-(\sigma_2+\delta+\frac{1}{2}\alpha_3^2+\frac{1}{2}\alpha_4^2)<0\ .$$

因此,在系统(1)中,将疾病以指数形式趋于灭绝 .

4 无病解的随机稳定性

由定理 2 可知,当 $2\alpha_1^2(\sigma_2+\delta+\frac{1}{2}\alpha_3^2+\frac{1}{2}\alpha_4^2)-\beta^2>0$ 时,疾病终将消亡 . 下面来讨论当种群中不存在染病者,即 $I(t)\equiv 0$ 时,系统平凡解的稳定性 . 此时系统(1)变为:

$$\begin{cases}\mathrm{d}S=-\sigma_1S\mathrm{d}t-\alpha_3S\mathrm{d}B_3(t), & t\neq nT,\\ \Delta S=S\cdot b\mathrm{e}^{-S}, & t=nT.\end{cases} \tag{7}$$

由 $\Delta S=S\cdot b\mathrm{e}^{-S}>0$ 得 $S^+>S$,构造比较系统:

$$\begin{cases}\mathrm{d}S'=-\sigma_1S'\mathrm{d}t-\alpha_3S'\mathrm{d}B_3(t), & t\neq nT,\\ S'^+=S', & t=nT,\\ S'_0=S_0>0\ .\end{cases} \tag{8}$$

系统(8)有唯一的正解 $S'(t)=S'_0\exp\left\{\left(-\sigma_1-\frac{\alpha_3^2}{2}\right)t-\alpha_3B_3(t)\right\}$,且由比较定理有

$$S(t)>S'(t)\ .$$

由 $\Delta S=S\cdot b\mathrm{e}^{-S}$ 得 $S^+=(1+b\mathrm{e}^{-S})S<(1+b)S$,构造如下的比较系统

$$\begin{cases}\mathrm{d}S''=-\sigma_1S''\mathrm{d}t-\alpha_3S''\mathrm{d}B_3(t), & t\neq nT,\\ S''^+=(1+b)S'', & t=nT,\\ S''_0=S_0>0\ .\end{cases} \tag{9}$$

脉冲系统(9)存在唯一正解 $S''(t)=(1+b)^{k+1}S''_0\exp\left\{\left(-\sigma_1-\frac{\alpha_3^2}{2}\right)t-\alpha_3B_3(t)\right\}$,且由比较定理可得

$$S(t)<S''(t)\ ,$$

从而有

$$S'(t)<S(t)<S''(t)\ , \tag{10}$$

所以系统(7)的解是存在的.

系统(7)存在平凡解为 $S(t)=0$,用范数 $\|S(t)\|$ 表示系统(7)的解偏离平凡解的距离,其最大 Lyapunov 指数为 $\lambda=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\|S(t)\|$,显然 $\|S(t)\|$ 是一个随机过程. 又因为系统(7)中 $S(t)>0$,且为一维,那么 $\|S(t)\|=S(t)$. 由(10)式可得

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\left(S'(t)\right)<\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\left(S(t)\right)<\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\left(S''(t)\right).$$

由最大 Lyapunov 指数的定义得出系统(8)的最大 Lyapunov 指数为 $\lambda'=-\sigma_1-\frac{\alpha_3^2}{2}$,系统(9)的最大 Lyapunov 指数为 $\lambda''=\frac{k+1}{t}\ln(1+b)-\sigma_1-\frac{\alpha_3^2}{2}$. 由于 $k<\frac{t}{T}$,所以有 $\lambda''<\frac{\ln(1+b)}{T}-\sigma_1-\frac{\alpha_3^2}{2}$. 从而有

$$-\sigma_1-\frac{\alpha_3^2}{2}<\lambda=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\left(S(t)\right)<\frac{\ln(1+b)}{T}-\sigma_1-\frac{\alpha_3^2}{2}.$$

又上式,当 $\frac{\ln(1+b)}{T}-\sigma_1-\frac{\alpha_3^2}{2}\leqslant 0$ 时,有 $-\sigma_1-\frac{\alpha^2}{2}<0$,从而系统(7)的平凡解随机指数渐近稳定;若 $\frac{\ln(1+b)}{T}-\sigma_1-\frac{\alpha_3^2}{2}>0$,则不能确定平凡解是否稳定.

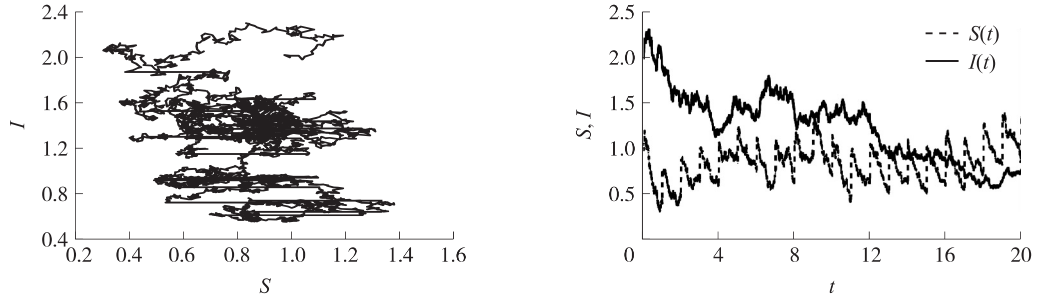
定理3　若下列条件成立:

$$2\alpha_1^2(\sigma_2+\delta+\frac{1}{2}\alpha_3^2+\frac{1}{2}\alpha_4^2)-\beta^2>0,\ \frac{\ln(1+b)}{T}-\sigma_1-\frac{\alpha_3^2}{2}\leqslant 0, \tag{11}$$

则系统(7)的平凡解是随机指数渐近稳定的.

5　数值模拟和结论

现在系统(1)中取 $\beta=0.9$, $\sigma_1=0.2$, $\sigma_2=0.3$, $\delta=0.1$, $b=1.5$, $T=1$, $\psi(I)=1+I$, $\alpha_1=0.1$, $\alpha_2=0.15$, $\alpha_3=0.1$, $\alpha_4=0.11$. 系统(1)过初始点(1,2)唯一解的相图如图1(a)所示,时间序列图如图1(b)所示. 如果另取 $\beta=0.2$,则 $2\alpha_1^2(\sigma_2+\delta+\frac{1}{2}\alpha_3^2+\frac{1}{2}\alpha_4^2)-\beta^2>0$ 成立,由定理2知染病者 $I(t)$ 将以指数形式趋于零,如图2(a)所示. 如果另取 $\beta=0.2$, $\sigma_1=0.6$, $b=0.4$, $\alpha_1=0.4$,条件(11)成立,由定理3系统的平凡解是随机指数渐近稳定的,过初始点(1,2)的解的时间序列图如图2(b)所示.



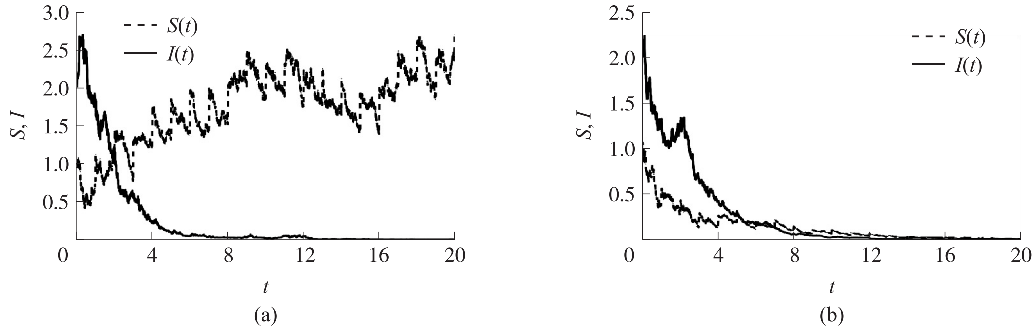
(a)　　　　(b)

图1　当 β=0.9, σ_1=0.2, σ_2=0.3, δ=0.1, b=1.5, T=1, $\psi(I)$=1+I, α_1=0.1, α_2=0.15, α_3=0.1, α_4=0.11 时系统(1)的(a)相图;(b)时间序列图.

Fig.1　The phase portrait(a) and time series of S, I(b) of system(1) with β=0.9, σ_1=0.2, σ_2=0.3, δ=0.1, b=1.5, T=1, $\psi(I)$=1+I, α_1=0.1, α_2=0.15, α_3=0.1, and α_4=0.11

本文讨论了一类具有非线性传染率与脉冲生育的随机SIS传染病模型的全局正解的存在唯一性,疾病随机灭绝的充分条件,以及系统平凡解的随机渐近稳定性. 当 $2\alpha_1^2(\sigma_2+\delta+\alpha_3^2/2+\alpha_4^2/2)>\beta^2$ 时,染病者 $I(t)$ 以指数形式趋于灭绝,而易感者不趋向于零,这有利于疾病的控制;如果还有条件 $\frac{\ln(1+b)}{T}-\sigma_1-\frac{\alpha_3^2}{2}\leqslant 0$ 成立,染病者和易感者会趋于灭亡. 这种情形下,参数 b 的增大,生育时间周期 T 的减少,白噪声的强度的减少利于种群无病者的存在. 对于系统(1)的噪声的强度对系统解的有界性和周期

解的分岔的影响等问题，暂时没有方法解决，留待以后进一步讨论 .



（a）$\sigma_1=0.2$ ，$b=1.5$ ，$\alpha_1=0.1$ ；（b）$\sigma_1=0.6$ ，$b=0.4$ ，$\alpha_1=0.4$

图2　当 $\beta=0.2$，$\sigma_2=0.3$，$\delta=0.1$，$T=1$，$\alpha_2=0.15$，$\alpha_3=0.1$，$\alpha_4=0.11$ 时系统（1）的时间序列图

Fig.2　The time series of S, I of system（1）with $\beta=0.2$, $\sigma_2=0.3$, $\delta=0.1$, $T=1$, $\alpha_2=0.15$, $\alpha_3=0.1$, $\alpha_4=0.11$

［参考文献］

［1］ MAO X. Stochastic differential equation：theory and applications［M］. New York：Wiley，1972.

［2］ 王克 . 随机生物数学模型［M］. 北京：科学出版社，2010.

［3］ GRAY A，GREENHALGH D，MAO X，et al. The SIS epidemic model with Markovian switching［J］. Journal of mathematical analysis and applications，2012，394(1)：496-516.

［4］ 陈兰荪 . 非线性生物动力系统［M］. 北京：科学出版社，1993.

［5］ JIAO J，CHEN L. A pest management SI model with impulsive control concerned［J］. 生物数学学报，2007，22(3)：385-394.

［6］ 甘文珍，史一欢 . 一类具扩散的 SIRS 传染病模型解的渐近性质［J］. 南京师大学报(自然科学版)，2009，32(3)：25-30.

［7］ 周艳丽，张卫国 . 非线性传染率的随机 SIS 传染病模型的持久性和灭绝性［J］. 山东大学学报(理学报)，2013，48(10)：68-77.

［8］ 王伟华 . 具有状态转换和时滞的随机生态模型的研究［D］. 南昌：南昌大学，2013：1-38.

［9］ LIU J. Analysis of an epidemic model with density-dependent birth rate，birth pulses［J］. Communication in nonlinear science and numerical simulation，2010，15(1)：3 568-3 576.

［10］ LI Y. On the almost surely asymptotic bounds of a class of Ornstein-Uhlenbeck Processes in infinite dimensions［J］. Journal of systems science & complexity，2008，21(1)：416-426.

［责任编辑：陆炳新］