doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2016.03.003

一类Duffing方程周期解的存在唯一性

李宇尘,张康群

(南京工程学院数理部,江苏 南京 210003)

[摘要] 讨论了 Duffing 方程周期解的存在性和稳定性问题.文中用不同的方法给出的结论比 Lazer 和 McKenna[1]的更灵活和方便,且文献[1]的结论是本文的特殊情形,并给出了界的精确公式.

[关键词] 周期解,存在性,唯一性,Duffing 方程

[中图分类号]O175.14 [文献标志码]A [文章编号]1001-4616(2016)03-0016-06

The Existence and Uniqueness of Periodic Solution to a Class of Duffing Equations

Li Yuchen, Zhang Kangqun

(Department of Mathematics and Physics,Nanjing Institute of Technology,Nanjing 211167,China)

Abstract: This paper is to study the problem of the existence and uniqueness of periodic solution to Duffing equations, using different method to make the conclusion more flexible, and the conclusion of ref.[1] is the special case of this pape. Also, it gives the precise formula about the bound.

Key words: periodic solutions, existence, uniqueness, Duffing equations

在 Lazer 和 McKenna 的文献[1]中,考虑了 Duffing 方程

$$u''+cu'+g(t,u)=0 \tag{1}$$

的周期解,其中,$c>0$ 是常数,g 和它关于第二个变量的偏导记为 g'_x,是连续的,且 g 关于 t 是 T-周期的,其中,$T>0$.文中在如下形式的条件

$$a\leqslant g'_x(t,\xi)\leqslant b \tag{2}$$

下得到了方程(1)的 T-周期解 u_0 的存在唯一性,且 u_0 是局部指数渐近稳定的.指数渐近稳定的定义如下:

定义 1 设 u 是另一个解,当存在常数 $C>0$ 和 $\alpha>0$ 使得 $|u(0)-u_0(0)|$ 和 $|u'(0)-u'_0(0)|$ 充分小时,则

$$|u(t)-u_0(t)|\leqslant Cde^{-\alpha t},\ |u'(t)-u'_0(t)|\leqslant Cde^{-\alpha t},\text{对 }\forall t>0\text{ 成立},$$

其中,

$$d=|u(0)-u_0(0)|+|u'(0)-u'_0(0)|,$$

则称 u_0 是指数渐近稳定的.

当 $k=0$ 时,这个方程的 T-周期解存在唯一性已经在一些文章中考虑过.这种情况下,如果存在整数 $N\geqslant 0$,使得 $\dfrac{(2n\pi)^2}{T^2}<a\leqslant b<\dfrac{[2(n+1)\pi]^2}{T^2}$ 以及(2)成立,则方程存在一个唯一的 T-周期解,这是 Loud[2]的经典结果.通过附加某种对称性条件和 Leach 在更一般情形下的工作,Dolph[3]证明 Loud-Leach 的结果都能从一个关于 Hammerstein 积分方程的定理中得出.

收稿日期:2015-12-10.

基金项目:国家自然科学基金天元基金项目(11326152)、南京工程学院科学研究基金(YKJ201339).

通讯联系人:李宇尘,博士,讲师,研究方向:偏微分方程.E-mail:yuchenli@njit.edu.cn

文献[1]中的主要定理如下：

定理 1[1]　设 $c\in\mathbf{R}$，$g(t,x)$ 对 $\forall(t,\xi)\in\mathbf{R}^2$ 上有定义且连续，且 g 关于 ξ 的偏导数为分段连续，g 关于 t 是 T–周期的，$T>0$. 如果存在常数 a 和 b 使得 $a\leqslant g'_x(t,\xi)\leqslant b$，对 $\forall(t,\xi)\in\mathbf{R}^2$ 成立，和在复平面中存在一个以 $\gamma=\dfrac{a+b}{2}$ 为中心，半径 $r>\dfrac{b-a}{2}$ 的闭圆盘 B，使得

$$\frac{4\pi^2n^2}{T^2}-\frac{2\pi inc}{T}\notin B,\ \forall n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots,\tag{3}$$

则存在唯一的 T–周期解 .

受上述定理证明的启发，本文将在下面讨论 Duffing 方程的存在性和稳定性问题 . 文中用不同的方法给出的结论比 Lazer 和 McKenna[1]的更灵活和方便，且文献[1]的结论在某种意义下是本文的特殊情形，并给出了出了界的精确公式 .

1　线性情形

先对齐次线性方程引入下列引理：

引理 1　考虑线性方程

$$x''+cx'+p(t)x=0,\tag{4}$$

$$x(0)=x(T),\ x'(0)=x'(T),$$

的 T–周期解，如果存在 $k\in\mathbf{R}$，使得

$$\|k-p(t)\|_\infty<\sqrt{C_{\min}(k)},$$

其中，$c>0$ 为常数，$p(t)$ 是连续 T–周期函数，

$$C_{\min}(k)=\min_{n\in Z}C(k,n)=\min_{n\in Z}\left\{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^4n^4+(c^2-2k)\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2n^2+k^2\right\},$$

则方程(4)没有非平凡 T–周期解，即只有零 T–周期解 .

证明　将方程(4)化为

$$x''+cx'+kx=[k-p(t)]x,$$

对方程两边同时平方，且从 0 到 T 积分，有

$$\int_0^T(x''+cx'+kx)^2\mathrm{d}t=\int_0^T[k-p(t)]^2x^2\mathrm{d}t,\tag{5}$$

由边值条件和分部积分有

$$\int_0^T2cx'x''\mathrm{d}t=cx'^2\Big|_0^T=0,$$

$$\int_0^T2ckxx'\mathrm{d}t=ckx^2\Big|_0^T=0,$$

$$\int_0^T2kxx''\mathrm{d}t=2kxx'\Big|_0^T-\int_0^T2kx'^2\mathrm{d}t=-\int_0^T2kx'^2\mathrm{d}t,$$

式(5)左边为：

$$\int_0^T(x''+cx'+kx)^2\mathrm{d}t=\int_0^T[x''^2+c^2x'^2+k^2x^2+2cx'x''+2ckxx'+2kxx'']\mathrm{d}t=\int_0^T[x''^2+(c^2-2k)x'^2+k^2x^2]\mathrm{d}t.\tag{6}$$

利用 x 的 Fourier 展开式 $x(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}a_i\mathrm{e}^{2\pi nit/T}$ 和 Parseval 恒等式，有

$$\|x\|_2^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_i|^2,\ \|x'\|_2^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2n^2|a_i|^2,\ \|x''\|_2^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^4n^4|a_i|^2.$$

代入式(6)，则有

$$\int_0^T(x''+cx'+kx)^2\mathrm{d}t=\int_0^T[x''^2+(c^2-2k)x'^2+k^2x^2]\mathrm{d}t=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left(\frac{2\pi}{T}\right)^4n^4+(c^2-2k)\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2n^2+k^2\right]|a_i|^2\geqslant$$

$$C_{\min}(k)\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_i|^2=C_{\min}(k)\|x\|_2^2,\tag{7}$$

由定理条件,式(5)的右边有

$$\int_0^T [k-p(t)]^2 x^2 \mathrm{d}t \leqslant \|k-p(t)\|_\infty^2 \|x\|_2^2 , \tag{8}$$

从式(5),(7)和(8),有

$$C_{\min}(k)\|x\|_2^2 \leqslant \|k-p(t)\|_\infty^2 \|x\|_2^2 .$$

而由条件 $\|k-p(t)\|_\infty < \sqrt{C_{\min}(k)}$ 知,上式当且仅当 $\|x\|_2^2 = 0$,即 $x \equiv 0$ 时成立,证毕.

下面对 $C_{\min}(k) = \min\limits_{n\in Z}\left\{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^4 n^4 + (c^2-2k)\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 n^2 + k^2\right\}$ 进行一些说明.由

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^4 n^4 + (c^2-2k)\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 n^2 + k^2 = \left[\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 n^2 + \frac{(c^2-2k)}{2}\right]^2 + k^2 - \left(\frac{(c^2-2k)}{2}\right)^2 , \tag{9}$$

易见当 $k \leqslant \frac{c^2}{2}$ 时,

$$C_{\min}(k) = \min_{n\in \mathbf{Z}}\left\{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^4 n^4 + (c^2-2k)\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 n^2 + k^2\right\} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^4 n^4 + (c^2-2k)\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 n^2 + k^2\Big|_{n=0} = k^2 > 0 ;$$

当 $k > \frac{c^2}{2}$ 时,有 $k > \frac{c^2}{4}$,则 $C_{\min}(k) \geqslant k^2 - \left(\frac{(c^2-2k)}{2}\right)^2 > 0$.综上可知,对 $\forall k \in \mathbf{R}$,有 $C_{\min}(k) > 0$.故引理1中的 $C_{\min}(k)$ 是合理的.

$C_{\min}(k)$ 的精确值分情况考虑如下:

由(9)知:当 $k > \frac{c^2}{2}$ 时,如果 $\left\{\sqrt{\frac{2k-c^2}{2}}\left(\frac{T}{2\pi}\right)\right\}_{\text{func}} < 0.5$,取 $n = \left[\sqrt{\frac{2k-c^2}{2}}\left(\frac{T}{2\pi}\right)\right]_{\text{func}}$,则

$$C_{\min}(k) = \left(\left[\sqrt{\frac{2k-c^2}{2}}\left(\frac{T}{2\pi}\right)\right]_{\text{func}}^2 \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 - \frac{2k-c^2}{2}\right)^2 + k^2 - \left(\frac{c^2-2k}{2}\right)^2 ;$$

如果 $\left\{\sqrt{\frac{2k-c^2}{2}}\left(\frac{T}{2\pi}\right)\right\}_{\text{func}} > 0.5$,取 $n = \left[\sqrt{\frac{2k-c^2}{2}}\left(\frac{T}{2\pi}\right)\right]_{\text{func}} + 1$,则

$$C_{\min}(k) = \left(\left(\left[\sqrt{\frac{2k-c^2}{2}}\left(\frac{T}{2\pi}\right)\right]_{\text{func}} + 1\right)^2 \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 - \frac{2k-c^2}{2}\right)^2 + k^2 - \left(\frac{c^2-2k}{2}\right)^2 .$$

其中, $\{\cdot\}_{\text{func}}$, $[\cdot]_{\text{func}}$ 分别是数论中取小数部分和整数部分的函数,例如:

$$\{2.4\}_{\text{func}} = 0.4 ,\ [3.7]_{\text{func}} = 3 .$$

由上面说明可知,如果取 $k = \frac{c^2}{2}$,则 $C_{\min}(k) = \left(\frac{c^2}{2}\right)^2$,则有

推论1　如果 $p(t)$ 满足 $\left\|\frac{c^2}{2} - p(t)\right\|_\infty < \frac{c^2}{2}$,则方程(4)没有非平凡解,即只有零解.

2　非线性情形

考虑非线性方程

$$x'' + cx' + g(t, x) = h(t) , \tag{10}$$
$$x(0) = x(T) ,\ x'(0) = x'(T)$$

的 T-周期解的存在唯一性.

若 $g(t, 0) \neq 0$,则可以在式(10)两边分别减去 $g(t,0)$,故不失一般性,下面假设 $g(t, 0) = 0$.另外,记 C_T^k 为具有 k 阶连续导数的 T-周期函数空间, C_T^0 简记为 C_T .定义算子 $G: C_T^2 \to C_T$ 如下:

$$G(x(t)) = x'' + cx' + g(t, x) . \tag{11}$$

首先有如下引理：

引理 2 设 $g(t,x)\in C^1(\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R})$ 且存在 $k\in\mathbf{R}$ 和常数 $a>0$，使得

$$\left\|k-g'_x(t,x)\right\|_\infty<a<\sqrt{C_{\min}(k)}\ ,$$

其中，

$$C_{\min}(k)=\min_{n\in\mathbf{Z}}\left\{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^4 n^4+(c^2-2k)\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 n^2+k^2\right\},$$

则算子 $G:C_T^2\to C_T$ 为固有映射．

证明 由固有映射定义知，即证：$\forall$紧集$E\subset C_T$，$G^{-1}(E)$ 为 C_T^2 中的紧集．由于任何紧集总是闭集，由 G 的连续性知，$G^{-1}(E)$ 为 C_T^2 中的闭集．

下面证明 $G^{-1}(E)$ 为 C_T^2 中的列紧集．分两步进行：

(1)若 $E\subset C_T$ 为有界集，则 $G^{-1}(E)$ 为 C_T^2 中的有界集．

用反证法．设 $G^{-1}(E)$ 在 C_T^2 中无界，则存在 $M>0$，$\{h_n(t)\}\subset E$，$\left\|h_n(t)\right\|<M$，但 $\left\|x_n\right\|_{C_T^2}\to+\infty$，使得

$$x''_n+cx'_n+g(t,x_n)=h_n(t)\ .$$

记 $y_n(t)=\dfrac{x_n}{\left\|x_n\right\|_{C_T^2}}$，则 $\left\|y_n(t)\right\|=1$．设 $\varphi\in C_T^2$，将上式两边同除以 $\left\|x_n\right\|_{C_T^2}$，再同乘以 φ 作分部积分得

$$\int_0^T y_n(t)\varphi''+cy_n(t)\varphi'+\frac{g(t,x_n)}{\left\|x_n\right\|_{C_T^2}}\varphi\mathrm{d}t=\int_0^T\frac{h_n(t)}{\left\|x_n\right\|_{C_T^2}}\varphi\mathrm{d}t\ . \tag{12}$$

由条件知 $\dfrac{g(t,x_n)}{\left\|x_n\right\|_{C_T^2}}$ 有界，故在 $L^\infty[0,T]$ 中是弱*紧的．则存在函数列，仍记为 x_n，使得

$$\frac{g(t,x_n)}{\left\|x_n\right\|_{C_T^2}}\xrightarrow{w^*}\beta(t)\ .$$

在式(12)中取极限，设 $y_n(t)\to y(t)$，则有

$$\int_0^T y(t)\varphi''+cy(t)\varphi'+\beta(t)\varphi\mathrm{d}t=0\ .$$

易见，$\beta(t)$ 满足 $\left\|k-\beta(t)\right\|_\infty\leqslant a<\sqrt{C_{\min}(k)}$，$y(t)$ 是方程

$$y''(t)+cy'(t)+\beta(t)=0$$

的 T–周期解，故由引理 1 知，$y(t)\equiv0$，显然与 $\left\|y(t)\right\|_{C_T^2}=1$ 矛盾．故 $G^{-1}(E)$ 为 C_T^2 中的有界集．

(2) $G^{-1}(E)$ 为 C_T^2 中的列紧集．

由 E 为紧集，故 E 在 C_T 中有界．即 $\forall h(t)\in E$，存在 $M>0$，使得 $\left\|h(t)\right\|_{C_T}<M$．而由第一步结论知：存在 $L>0$，使得

$$\left\|x(t)\right\|_{C_T^2}<L\ ,\text{对 }\forall x(t)\in G^{-1}(E)\text{ 成立}\ .$$

由周期边值条件和 Rolle 定理知，存在 $t_{0,h}\in[0,T]$ 使得 $x'(t_{0,h})=0$．对(10)从 $t_{0,h}$ 到 t 积分有

$$\int_{t_{0,h}}^t x''+cx'+g(t,x)\mathrm{d}t=\int_{t_{0,h}}^t h(t)\mathrm{d}t\ ,$$

$$x'(t)+c[x(t)-x(t_0)]+\int_{t_{0,h}}^t g(t,x)\mathrm{d}t=\int_{t_{0,h}}^t h(t)\mathrm{d}t\ .$$

由 $x(t)$ 一致有界，即 $\forall x(t)\in G^{-1}(E)$，$\left\|x(t)\right\|_{C_T^2}<L$，和 $\forall x(t)\in G^{-1}(E)$，$g(t,x(t))$ 是 t 的 T–周期函数可知，对 $\forall x(t)\in G^{-1}(E)$，有

$$\int_{t_{0,h}}^t g(t,x)\mathrm{d}t=\int_0^{t-t_{0,h}-nT}g(t,x(t))\mathrm{d}t<MT\ ,$$

其中，$n\in\mathbf{Z}$ 使得 $0<t-t_{0,h}-nT<T$，$M=\max\limits_{[0,T]\times[-L,L]}g(t,x)$．故 $\int_{t_{0,h}}^t g(t,x)\mathrm{d}t$ 是一致有界的．再由 $x(t)$ 和 $h(t)$ 的一致有界性知，$x'(t)$ 是一致有界的．从而由 $x''(t)=h(t)-cx'-g(t,x)$ 知 $x''(t)$ 是一致有界的．

下面说明 $x(t)$ 直到二阶导数是等度连续的.

由 $\left|x(t)-x(t')\right|=\left|x'(\tau)(t-t')\right|$ 和 $\left|x'(t)\right|$ 的一致有界性知 $\{x(t)\in G^{-1}(E)\}$ 等度连续. 同理可证 $x'(t)$ 是等度连续的,而由 $x''(t)=h(t)-cx'-g(t,x)$ 知 $x''(t)$ 也是等度连续的.

综上所述,由 Arzela-Ascoli 定理知 $G^{-1}(E)$ 为 C_T^2 中的列紧集. 证毕.

下面即本文的主要结论:

定理 2　考虑非线性方程:

$$x''+cx'+g(t,x)=h(t)\,,\qquad(13)$$
$$x(0)=x(T)\,,\ x'(0)=x'(T)\,,$$

其中, $c>0$ 是常数, $h(t)$ 是连续 T–周期函数, $g(t,x)\in C^1(\mathbf{R}\times\mathbf{R})$ 是关于 t 的 T–周期函数,关于 x 连续,且满足:存在常数 $a>0$,使得

$$\left\|k-g'_x(t,x)\right\|_\infty<a<\sqrt{C_{\min}(k)}\,,\qquad(14)$$

$$C_{\min}(k)=\min_{n\in\mathbf{Z}}\left\{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^4n^4+(c^2-2k)\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2n^2+k^2\right\}.$$

则方程(13)存在全局唯一的 T–周期解.

证明　(1)存在性.

注意到 $g(t,0)=0$. 考虑下列同伦方程:

$$\phi_\lambda(x)=x''+cx'+\lambda g(t,x)+(1-\lambda)px=\lambda h(t)\,,\qquad(15)$$

其中, $\lambda\in[0,1]$,常数 p 满足 $\left|k-p\right|<\sqrt{C_{\min}(k)}$.

下面证明:存在实数 $R>0$,使得方程(15)对所有的 $\lambda\in[0,1]$ 在 C_T 中的球的边界 ∂B_R 上无解.

事实上,与引理 2 的证明类似,假设不存在这样的 R,设函数列 x_n 满足 $\left\|x_n\right\|\to+\infty$, $\lambda_n\in[0,1]$. 记 $z_n(t)=\dfrac{x_n}{\left\|x_n\right\|_{C_T^2}}$,设 $\varphi\in C_T^2$,将式两边同除以 $\left\|x_n\right\|_{C_T^2}$,再同乘以 φ 作分部积分得

$$\int_0^T z_n(t)\varphi''+cz_n(t)\varphi'+\frac{\left[\lambda_n g(t,x_n)+(1-\lambda_n)px_n\right]}{\left\|x_n\right\|_{C_T^2}}\varphi\,\mathrm{d}t=\lambda_n\int_0^T\frac{h_n(t)}{\left\|x_n\right\|_{C_T^2}}\varphi\,\mathrm{d}t\,.\qquad(16)$$

由定理条件和 p 满足的条件知, $\left\{\dfrac{\lambda_n g(t,x_n)+(1-\lambda_n)px_n}{\left\|x_n\right\|_{C_T^2}}\right\}$ 是有界的,故在 $L^\infty[0,T]$ 中是弱*紧的. 则存在函数列,仍记为 x_n,和 $\lambda_n\to\lambda$,使得

$$\frac{g(t,x_n)}{x_n}\xrightarrow{w^*}\beta(t)\,.$$

在式(16)中取极限,设 $z_n(t)\to z(t)$,则有

$$\int_0^T z(t)\varphi''+cz(t)\varphi'+w(t)\varphi\,\mathrm{d}t=0\,,$$

其中, $w(t)=\lambda\beta(t)+(1-\lambda)p$. 由假设易见 $w(t)\leqslant\lambda a+(1-\lambda)p<\sqrt{C_{\min}(k)}$,故而满足引理 1 中的条件,又 $z(t)$ 是一个 T–周期解,则由引理 1 知 $z(t)\equiv0$,与 $\left\|z(t)\right\|_{C_T^2}=1$ 矛盾.

最后,当 $\lambda=0$ 时,对常系数齐次线性方程

$$\phi_0(x)=x''+cx'+px=0\,,$$

有

$$\deg(\phi_0,B_R,0)=\operatorname{sgn}\begin{vmatrix}0&1\\-p&-c\end{vmatrix}=1\,.$$

由拓扑度的同伦不变性[4]有

$$\deg(\phi_1,B_R,0)=\deg(\phi_0,B_R,0)=1\,.$$

这样便完成了存在性的证明,证毕.

（2）全局唯一性．

下面利用全局隐函数定理来证明全局唯一性．由引理 2 知，式（11）定义的算子 G 为 C^1 固有映射．另外，对 $\forall x \in C_T^2$，算子 G 的 Frechet 导数为

$$DG(v)=v''+cv'+g'_x(t,x)v\,.$$

由定理条件和引理 1 知，$DG(v)=0$ 仅有平凡解 $v(t)\equiv 0$．从而由 Fredholm 定理知，对 $\forall h\in C_T$，$DG(v)=h$ 只有唯一的 T–周期解，即 $DG:C_T^2\to C_T$ 是线性同胚，再由局部隐函数定理知，G 为局部同胚映射．又 C_T 和 C_T^2 均为弧连通，且 C_T 为单连通．由全局隐函数定理知，G 为全局同胚映射．则对 $\forall h\in C_T$，方程（13）有唯一的 T–周期解．证毕．

分析 Lazer 和 McKenna 的定理 1[1]的证明过程可知，如果不考虑定理 2 中的常数 a 的限制，它的条件是定理 2 的条件的特殊情形．事实上，定理 1[1]可重新表述如下：

定理 3[1]　设 $c\in\mathbf{R}$，$g(t,x)$ 对 $\forall(t,\xi)\in\mathbf{R}^2$ 上有定义且连续，且 g 关于 ξ 的偏导数为分段连续，g 关于 t 是 T–周期的，$T>0$．如果存在常数 a 和 b，使得

$$a\leqslant g'_x(t,\xi)\leqslant b\,,$$

对 $\forall(t,\xi)\in\mathbf{R}^2$ 成立，且

$$\frac{b-a}{2}<\left|\frac{4\pi^2n^2}{T^2}-\frac{2\pi inc}{T}-\frac{a+b}{2}\right|,\ \ \forall n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots,\tag{17}$$

则（1）存在唯一的 T–周期解．

式（17）的左边为 $\left\|\gamma-g'_x(t,\xi)\right\|_\infty$，右边为

$$\left|\frac{4\pi^2n^2}{T^2}-\frac{2\pi inc}{T}-\gamma\right|=\sqrt{\left[\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2n^2-\gamma\right]^2+\left(\frac{2\pi nc}{T}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^4n^4-2\gamma\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2n^2+\gamma^2+\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2c^2n^2}=$$

$$\sqrt{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^4n^4+(c^2-2\gamma)\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2n^2+\gamma^2}=\sqrt{C\left(\frac{a+b}{2}\,n\right)}\,,$$

则式（17）化为 $\left\|\gamma-g'_x(t,\xi)\right\|_\infty\leqslant\sqrt{C\left(\frac{a+b}{2},\ n\right)}$，而（17）对 $\forall n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$ 成立，则如果

$$\left\|\frac{a+b}{2}-g'_x(t,\xi)\right\|_\infty<\min_{n\in Z}\sqrt{C\left(\frac{a+b}{2},\ n\right)}=\sqrt{C_{\min}\left(\frac{a+b}{2}\right)}\,,\tag{18}$$

定理 1[1]成立，而（18）正好是定理 2 中条件当 $k=\dfrac{a+b}{2}$ 时的情形，故定理 1[1]与定理 2 中的条件很相似．而定理 2 由条件（14）直接给出了存在唯一性，且形式上更加方便．

［参考文献］

［1］ LAZER A C，MCKENNA P J. On the existence of stable periodic solutions of differential equations of Duffing type［J］. Proc Amer Math Soc，1990，110：125-133.

［2］ LOUD W S. Periodic solutions of nonlinear differential equations of Duffing type［C］//Proceedings of the U.S.-Japan seminar on differential and functional equations. New York：Benjamin，1967：199-224.

［3］ DOLPH C L. Nonlinear integral equations of the Hammerstein type［J］. Trans Amer Math Soc，1949，66：289-307.

［4］ 郭大钧．非线性泛函分析［M］. 济南：山东科学技术出版社，2001.

［责任编辑：陆炳新］