第39卷第3期 南京师大学报(自然科学版) Vol. 39 No. 3
2016年9月 JOURNAL OF NANJING NORMAL UNIVERSITY(Natural Science Edition) Sept,2016

doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2016.03.004

以严格凸范数为费用函数时的Kantorovich问题解的分类

陈 平

(江苏第二师范学院数学与信息技术学院,江苏 南京 210013)

[摘要] 回答了费用函数为严格凸范数时的 Kantorovich 问题解的分类问题.首先,利用范数的严格凸性,我们得到了最优计划在传输线上的性质定理.其次,我们应用变分法的直接方法证明了第二变分问题解的存在性,该问题的解集是全体最优计划构成的集合的子集合.最后,本文利用第二变分问题中被积函数的凹凸性,对最优计划进行选择,达到分类的目的,证明了可以根据传输线上的单调性这一分类准则对最优计划进行分类.

[关键词] 严格凸范数,最优计划,Kantorovich 问题

[中图分类号]O174.12 [文献标志码]A [文章编号]1001-4616(2016)03-0022-04

Classification of Solutions of Kantorovich Problems with Strictly Convex Norms

Chen Ping

(School of Mathematics and Information Technology,Jiangsu Second Normal University,Nanjing 210013,China)

Abstract:The paper proposes a classification of solutions of Kantorovich problems with strictly convex norms. We prove a basic property theorem of any optimal plan on transport rays based on strict convexity of the norm. Then we show existence of solutions of the secondary variational problem,whose admissible set is a subset of the collection of all optimal transport plans for a given strictly convex norm. At last,we select different optimal transport plans by solving the secondary variational problem with different integrand functions which are either strictly convex or strictly concave. Furthermore,we prove that those selected optimal transport plans are either ray increasing or ray decreasing,that is we classify optimal transport plans according to ray monotonicity.

Key words:strictly convex norm,optimal transport plans,classification,Kantorovich problem

最优质量运输问题,简称最优运输问题,粗略来讲是指:运输前后质量不发生变化,如何在保证费用最低的情况下,实施运输方案.用数学语言描述即需回答如下 Monge 问题:

$$\min_{T_{\#}\mu=\nu}\int_{\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n} c(\boldsymbol{x},T\boldsymbol{x})\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) \tag{1}$$

以及 Kantorovich 问题:$\min\limits_{\gamma\in\Pi(\mu,\nu)}\int_{\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n} c(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathrm{d}\gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$. Kantorovich 问题也被称为 Monge 问题的松弛问题. Monge 问题的解称为最优映射,该问题最早于 1781 年由 Monge 提出.事实上,在 1781 年被提出的原始 Monge 问题中,费用函数 $c(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$ 为欧氏距离.在现代传输理论中,求解最优映射的上述问题(1)统称为 Monge 问题.本文将考虑 Kantorovich 问题的解的分类.以下对 Monge 问题以及 Kantorovich 问题中出现的符号进行说明. μ 和 ν 为运输空间 $\mathbf{R}^n$ 上的概率测度,$c(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$:$\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 称为费用函数,$T_{\#}\mu=\nu$ 称为质量守恒条件(见[1,2]),$\Pi(\mu,\nu)$ 是指以 μ 和 ν 为边际测度的全体乘积空间 $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$ 的概率测度,称为传输

收稿日期:2015-12-11.

基金项目:国家自然科学基金天元基金项目(11526099)、江苏省高校自然科学基金(15KJB110003)、江苏第二师范学院博士专项基金(JSNU2015BZ05).

通讯联系人:陈平,博士,讲师,研究方向:偏微分方程与几何分析. E-mail:chenping200507@126.com

计划集合(见定义 1).

最优运输的主要问题之一是回答最优映射的存在唯一性 . 各种费用函数,以及所对应的运输问题可参阅文献[3,4]. 文献[4]从应用与偏微分方程角度介绍最优运输理论,我们前期利用密度定理(density theory)对几个最优运输问题给出最优映射存在性的统一性证明,见文献[5]. 原始 Monge 问题的解存在但一般不唯一,关于存在性的证明也是近几十年才得以解决,其方法较多,可参阅文献[4]. 其中利用变分逼近、密度定理、求解第二变分问题等一系列方法还可以用来处理以一般范数为费用函数时的运输问题,用该方法处理具有凸约束最优运输问题解的存在性可见文献[6,7]. 费用函数为欧氏距离时的 Kantorovich 问题的解,即最优计划,还被用来定义传输密度(transport density)(见文献[8]中的式(1.2)). 传输密度的正则性一直是国内外专家学者关注的问题 . 文献[1]指出不同的最优计划对应于唯一的传输密度,文献[8]利用在传输线上具有单调性的最优计划证明了传输密度的 L^p 正则性 . 因此选择一些特殊的最优计划来研究传输密度的相关性质是一个重要的思路 . 本文的研究内容属于最优计划的分类问题,我们期望寻求合适的分类准则对最优计划进行分类,希望为下一步的工作做准备,即根据不同类型的最优计划探讨传输密度的正则性 .

1　预备知识

设 μ 和 ν 为 $\mathbf{R}^n$ 上的概率测度,记为 $\mu,\nu\in P(\mathbf{R}^n)$.

定义 1[4,8]　集合 $\pi(\mu,\nu)=\{\gamma\in P(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n):\pi^1{}_{\#}\gamma=\mu,\pi^2{}_{\#}\gamma=\nu\}$ 中的元素称为 μ 和 ν 之间的传输计划 . 这里 $\pi^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x},\ \pi^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=y$,这些运输计划也被称为以 μ 和 ν 为边际运输测度 .

运输计划组成的集合是非空的,事实上,乘积测度 $\mu\times\nu$ 是属于 $\Pi(\mu,\nu)$ 的,见文献[1].

定义 2[4]　设 $c(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 为费用函数,称集合 $S\subset\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$ 为 $c(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ -循环单调的,简称 c -循环单调,如果对任意 $k\in\mathbf{N}$,以及任意 $(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_1),\cdots,(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n)\in S$,有下式成立: $\sum_{i=1}^{k}c(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{y}_i)\leqslant\sum_{i=1}^{k}c(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{y}_{\sigma(i)})$,其中 σ 表示 $(1,2,\cdots,k)$ 的任意置换 .

引理 1[3]　如果费用函数 $c(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 是下半连续的,且最优费用 $\min_{T_{\#}\mu=\nu}\int_{\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n}c(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathrm{d}\gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 是有限的,则运输计划 γ 的最优性表明 γ 集中在 c—循环单调集合 $\Gamma\subset\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$ 上 .

定义 3[1]　对于给定的集合 $\Gamma\subset\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$,则对任意 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\Gamma$,如果 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$,称开线段 $]\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}[$ 为传输线 .

2　最优计划的分类

在本节中,我们考虑费用函数为严格凸范数时的 Kantorovich 问题:

$$\min_{\gamma\in\Pi(\mu,\nu)}\int_{\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|\mathrm{d}\gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\ ,\tag{2}$$

其中 $\|\cdot\|$ 为欧式空间上的严格凸范数 . 用 $Q(\mu,\nu)$ 表示 Kantorovich 问题(2)的全体解,即最优计划构成的集合 . 我们将对 $Q(\mu,\nu)$ 进行分类,分类准则为传输线上的单调性 .

关于严格凸范数的定义以及判定的充要条件可见文献[9].

首先,我们给出费用函数为严格凸范数时,最优计划的一个性质定理 .

定理 1　假设存在 $\pi\in\Pi(\mu,\nu)$ 使得 $\int_{\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|\mathrm{d}\pi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})<+\infty$,并设 $\gamma\in Q(\mu,\nu)$,则 γ 集中在一个具有 $\|\cdot\|$ 循环单调性的集合 Γ 上,并且 Γ 具有如下性质:对满足 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}'\neq\boldsymbol{y}'$ 的任意两对不同点对 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}')\in\Gamma$,如果 $\boldsymbol{x}'\in]\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}[$,则四点 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}'$ 共线,并且其排列方式要么为 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}'$ 要么为 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}',\boldsymbol{y}$.

证明　由引理 1 可知, γ 集中在一个具有 $\|\cdot\|$ 循环单调性的集合 Γ 上,只需证明 Γ 中的点对还具有上述性质即可 . 由文献[3]中的定理 5.2 可知存在 Kantorovich 位势函数 $u\in Lip_1(\Omega,\|\cdot\|)$,定理 5.2 还表明如果 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}')\in\Gamma$,则 $u(\boldsymbol{x})=u(\boldsymbol{y})+\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|,u(\boldsymbol{x}')=u(\boldsymbol{y}')+\|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'\|$. 由假设条件 $\boldsymbol{x}'\in]\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}[$ 可知 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\|+\|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}\|$ 以及 $u(\boldsymbol{x})=u(\boldsymbol{y})+\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\|+\|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}\|=[u(\boldsymbol{y})+\|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}\|]+\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\|\geqslant u(\boldsymbol{x}')+\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\|$, 最后一个不等式成立是

因为 $u\in Lip_1(\Omega,\|\cdot\|)$. 另一方面由 $u\in Lip_1(\Omega,\|\cdot\|)$ 可得 $u(\boldsymbol{x})\leqslant u(\boldsymbol{x}')+\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\|$, 因此有 $u(\boldsymbol{x})=u(\boldsymbol{x}')+\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\|=u(\boldsymbol{y}')+\|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'\|+\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\|\geqslant u(\boldsymbol{y}')+\|\boldsymbol{y}'-\boldsymbol{x}\|$. 此外再次利用 $u\in Lip_1(\Omega,\|\cdot\|)$ 可得 $u(\boldsymbol{x})\leqslant u(\boldsymbol{y}')+\|\boldsymbol{y}'-\boldsymbol{x}\|$. 因此 $u(\boldsymbol{x})=u(\boldsymbol{y}')+\|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'\|+\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\|=u(\boldsymbol{y}')+\|\boldsymbol{y}'-\boldsymbol{x}\|$, 即 $\|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'\|+\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\|=\|\boldsymbol{y}'-\boldsymbol{x}\|$, 由 $\|\cdot\|$ 的严格凸性, 以及 $\|\boldsymbol{y}'-\boldsymbol{x}\|=\|\boldsymbol{y}'-\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}\|=\|\boldsymbol{y}'-\boldsymbol{x}'\|+\|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}\|$ 可知 $\boldsymbol{y}'-\boldsymbol{x}'=\lambda(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})$, 其中 $\lambda>0$, 该式表明 $\boldsymbol{x}'\in]\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}'[$. 又因为 $\boldsymbol{x}'\in]\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}[$, 从而四点共线,并且排列顺序只能为上述两种情形,进而命题得证.

注　上述证明过程可知,如果范数 $\|\cdot\|$ 不具有严格凸性,则定理1不成立.

我们给出传输线上的单调性定义. 在传输线上具有单调性质(ray-monotonicity)的定义可以参阅文献[10],可以看到该定义事实上是一种本文中所定义的单调增加性质. 以下,我们给出在传输线上单调增加和单调递减的定义.

定义4　称最优计划 $\gamma\in Q(\mu,\nu)$ 在传输线(见定义3)上具有单调增加性,如果 γ 集中在集合 Γ 上,并且有如下性质成立:对满足 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}'\neq\boldsymbol{y}'$ 的任意两个点对 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}')\in\Gamma$, 如果 $\boldsymbol{x}'\in]\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}[$, 则四点 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}'$ 共线并依此顺序排列. 反之,若对于满足上述性质的点对 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}')\in\Gamma$, 四点 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}'$ 共线并依顺序 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}',\boldsymbol{y}$ 排列. 则称优计划 $\gamma\in Q(\mu,\nu)$ 在传输线上具有单调递减性.

为了进行分类,我们还需要考虑如下问题,其被称为第二变分问题:

$$\min_{\gamma\in Q(\mu,\nu)}\int_{\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n}\phi(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)\mathrm{d}\gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),$$

其中 $\phi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 为连续函数. 在文献[11]中,取 $\phi(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2$, 在文献[7]中,当 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 满足凸约束时,第二变分问题的被积函数也为 $\phi(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2$. 更多关于第二变分问题的介绍可参阅上述文献[7,11]以及[4,8]. 我们将证明函数 $\phi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 的凹凸性将用来选择不同的最优计划,进而可以对最优计划进行分类. 我们给出第二变分问题解的存在性定理,该结论可有变分法的直接方法证.

定理2　假设存在 $\pi\in\Pi(\mu,\nu)$ 使得 $\int_{\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|\mathrm{d}\pi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})<+\infty$, 则第二变分问题存在解.

证明　由假设条件以及文献[3]中的定理5.10可知集合 $Q(\mu,\nu)$ 非空. 又因为 $\phi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 为连续函数,所以泛函 $L(\gamma)=\int_{\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n}\phi(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)\mathrm{d}\gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 也是下半连续性的. 此外,由于 $Q(\mu,\nu)$ 是弱紧集 $\Pi(\mu,\nu)$ 的闭子集,因此利用变分法的直接方法可知集第二变分问题的解存在.

定理3　设 $\phi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 为有下界的连续函数,具有严格凹性,则第二变分问题的任意解 γ 集中在 $\|\cdot\|$ 循环单调性的集合 Γ 上,并且 γ 在传输线上具有单调递减性质.

证明　因为 γ 是第二变分问题的解,所以 $\gamma\in Q(\mu,\nu)$. 从而,由定理1可知,对满足 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}'\neq\boldsymbol{y}'$ 的任意两个点对 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}')\in\Gamma$, 如果 $\boldsymbol{x}'\in]\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}[$, 则四点 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}'$ 共线,并且其排列方式要么为 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}'$ 要么为 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}',\boldsymbol{y}$.

要证 γ 在传输线上具有单调递减性质,根据定义4,只需证明四点只能依顺序 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}',\boldsymbol{y}$ 排列成一条直线. 以下用反证法证明. 假设四点排列成 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}'$. 令 $|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|=a$, $|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}|=b$, $|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}'|=c$. 则由 γ 是第二变分问题的解以及 ϕ−循环单调性(更详细的推导过程可以参阅文献[7])可知:

$$\phi(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)+\phi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|)\leqslant\phi(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}'|)+\phi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}|),$$

即:

$$\phi(a+b)+\phi(b+c)\leqslant\phi(b)+\phi(a+b+c).$$

进一步可得:

$$\phi(b+c)-\phi(b)\leqslant\phi(a+b+c)-\phi(a+b).$$

令 $g(x)=\phi(x+c)-\phi(x)$, 其中 c 为任意给定的正数. 上述不等式表明 $g(x)$ 是单调递增函数,此外 $g(x)$ 几乎处处可微,因此我们有 $g'(x)=\phi'(x+c)-\phi'(x)\geqslant 0$ 或者 $\phi'(x+c)\geqslant\phi'(x)$. 由于 $c>0$ 是给定的,因此上述不等式表明 $\phi'(x)$ 是单调递增的. 另一方面由于 $\phi(x)$ 是严格凹函数,因此 $\phi'(x)$ 是单调递减的,从而得到一对矛盾,因此假设不成立,即,四点依顺序 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}',\boldsymbol{y}$ 排列成一条直线.

在上述的性质中,如果 $\phi(x)$ 是严格凸函数,则对第二变分问题的任意解 γ 具有单调递减性质. 见如

下定理 .

定理 4　设 $\phi: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 为有下界的连续函数,具有严格凸性,则第二变分问题的任意解 γ 集中在 $\|\cdot\|$ 循环单调性的集合 Γ 上,并且 γ 在传输线上具有单调递增性质 .

证明　证明过程同于定理 3. 在这里,我们仅列出与定理 3 证明不同之处 . 以下用反证法证明四点只能依顺序 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}'$ 排列成一条直线 . 假设四点排列成 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}',\boldsymbol{y}$. 令 $|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|=a$, $|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}|=b$, $|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}'|=c$. 则由 γ 是第二变分问题的解以及 $\phi-$ 循环单调性(更详细的推导过程可以参阅文献[7])可知:

$$\phi(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)+\phi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|)\leqslant\phi(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}'|)+\phi(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}|) ,$$

即:

$$\phi(a+b+c)+\phi(b)\leqslant\phi(a+b)+\phi(b+c) ,$$

进一步可得:

$$\phi(a+b+c)-\phi(b+c)\leqslant\phi(a+b)-\phi(b).$$

令 $g(x)=\phi(x+a)-\phi(x)$,其中 a 为任意给定的正数 . 上述不等式表明 $g(x)$ 是单调递减函数,此外 $g(x)$ 几乎处处可微,因此我们有 $g'(x)=\phi'(x+a)-\phi'(x)\leqslant 0$ 或者 $\phi'(x+a)\leqslant\phi'(x)$. 由于 $a>0$ 是给定的,因此上述不等式表明 $\phi'(x)$ 是单调递减的 . 另一方面由于 $\phi(x)$ 是严格凹凸函数,因此 $\phi'(x)$ 是单调递增的,从而得到一对矛盾,因此假设不成立,即,四点依顺序 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}'$ 排列成一条直线 .

由定理 3,定理 4 我们可得如下分类定理 .

定理 5　Kantorovich 问题(2)的解可以分成三类:第一类在传输线上具有单调递减性质,第二类在传输线上具有单调增加性质,第三类其他 .

证明　由定理 3 选用具有严格凹性的函数作为第二变分问题的被积函数,则可以选择出第一类在传输线上具有单调递减性质,同理由定理 4 选择出第二类在传输线上具有单调递减性质 . 剩余的最优映射归为第三类 .

为更好地解释之中分类法则,我们给出如下例子 . 在该例子中,我们给出了三种类型的最优计划 .

例 1　设 $\mu=\dfrac{\delta_{u_1}+\delta_{u_2}+\delta_{u_3}}{3}$, $\nu=\dfrac{\delta_{u_4}+\delta_{u_5}+\delta_{u_6}}{3}$,其中 $u_i=i$ 为 $\mathbf{R}$ 上的点,费用函数为欧氏距离,可以证明任意的传输计划 $\gamma\in\Pi(\mu,\nu)$ 均为最优计划 . 事实上共有 6 种最优计划:

$$\gamma_1=\{(u_1,u_6),(u_2,u_5),(u_3,u_4)\} , \gamma_2=\{(u_1,u_4),(u_2,u_5),(u_3,u_6)\} ,$$
$$\gamma_3=\{(u_1,u_4),(u_2,u_6),(u_3,u_5)\} , \gamma_4=\{(u_1,u_6),(u_2,u_4),(u_3,u_5)\} ,$$
$$\gamma_5=\{(u_1,u_5),(u_2,u_4),(u_3,u_6)\} , \gamma_6=\{(u_1,u_5),(u_2,u_6),(u_3,u_4)\} .$$

它们产生的传输费用均为 3. 我们将这 6 种最优计划分成三类,第一类在传输线上具有单调递减性质,此类最优计划仅有一个,为 $\gamma_1=\{(u_1,u_6),(u_2,u_5),(u_3,u_4)\}$;第二类在传输线上具有单调递增性质,此类最优计划也仅有一个,为 $\gamma_2=\{(u_1,u_4),(u_2,u_5),(u_3,u_6)\}$;第三类为其它的四种最优映射 .

注　注意到欧氏范数显然是严格凸范数,所以在文献[2,3,8]等用到的第二变分问题实际上是本文所考虑的被积函数 $\varphi(|\cdot|)$ 取 $|\cdot|^2$ 一个特殊情形 . 此外文献[11]指出,以 $\varphi(|\cdot|)=|\cdot|^2$ 为被积函数,以欧式距离费用函数时的最优计划全体为容许集合的第二变分问题的解存在且唯一 . 所以一个自然的问题是对于任意的 $\phi(|\cdot|)$,容许集合为以一般范数为费用函数时的最优计划全体时,第二变分问题的解是否唯一 . 第二个问题是如果 $\phi(|\cdot|)$ 推广称更一般 $\phi(\|\cdot\|)$,则是否可以得到相同的分类结果 . 这都将是后续可以进一步考虑的问题 .

[参考文献]

[1]　AMBROSIO L,PRATELLI A. Existence and stability results in the L1 theory of optimal transportation[M]//Optimal transportation and applications. Berlin Heidelberg:Springer,2003:123-160.

[2]　陈平 . 次黎曼流形上的极值分解[J]. 安徽师范大学学报(自然科学版),2015,38(6):533-536.

[3]　VILLANI C. Optimal transportation,old and new[M]. Berlin Heidelberg:Springer,2008.

(下转第 32 页)

$$\hat{E}[|x(t)-y(t)|^2]\leqslant 3L\int_{t_0}^{t_1}G(s,\hat{E}[|x(s)-y(s)|^2])\mathrm{d}s\ .$$

所以由(H2),对于 $\forall t\in[t_0,t_1]$,

$$\hat{E}[|x(t)-y(t)|^2]=0\ .$$

这就说明了解的唯一性 .

[参考文献]

[1] PENG S. Filtration consistent nonlinear expectations and evaluations of contingent claims[J]. Acta Math Appl Sin Engl Ser, 2004,20(2):1-24.

[2] PENG S. Nonlinear expectations and nonlinear Markov chains[J]. Chinese Ann Math,2005,26B(2):159-184.

[3] PENG S. Survey on normal distributions, central limit theorem, Brownian motion and the related stochastic calculus under sublinear expectations[J]. Sci China Ser A,2009,52(7):1 391-1 411.

[4] PENG S. Nonlinear expectations and stochastic calculus under uncertainty[EB/OL]. 2010. Arxiv:1002.4546v1.

[5] PENG S. Backward stochastic differential equation, nonlinear expectation and their applications[C]//Proceedings of the International Congress of Mathematicians Hyderabad, India, 2010.

[6] GAO F. Pathwise properties and homomorphic folws for stochastic differential equations driven by G-Brownian motion[J]. Stochastic process Appl,2009,119:3 356-3 382.

[7] REN Y, HU L. A note on the stochastic differential equations driven by G-Brownian motion[J]. Statistics and probability letters,2011,81:580-585.

[8] DENIS L, HU M, PENG S. Function spaces and capacity related to a sublinear expectation: application to G-Brownian motion paths[J]. Potential Anal,2011,34(2):139-161.

[9] LI X, PENG S. Stopping times and related Ito calculus with G-Brownian motion[J]. Stochastic process Appl, 2009, 121: 1 492-1 508.

[10] LIN Y. Stochastic differential equations driven by G-Brownian motion with reflecting boundary[J]. Electron J Porbab, 2013,18(9):1-23.

[11] WALTER W. Ordinary Differential Equations[M]. New York:Springer-Verlag,2003.

[责任编辑:陆炳新]

(上接第25页)

[4] SANTAMBROGIO F. Optimal transport for applied mathematicians[M]. Birkauser, NY:Springer,2015.

[5] 陈平 . 几个最优映射存在唯一性定理的统一证明[J]. 南京师大学报(自然科学版),2015,38(4):82-85.

[6] CHEN P, JIANG F D, YANG X P. Two dimensional optimal transportation problem for a distance cost with a convex constraint[J]. ESAIM:Control, Optimisation and Calculus of Variations,2013,19(4):1 064-1 075.

[7] CHEN P, JIANG F D, Yang X P. Optimal transportation in Rn for a distance cost with a convex constraint[J]. Zeitschrift füer angewandte mathematik und physik,2015,66(3):587-606.

[8] SANTAMBROGIO F. Absolute continuity and summability of optimal transfort densities: simpler proofs and new estimates [J]. Calculus of variations and partial differential equations,2009,36(3):343-354.

[9] 张恭庆,郭懋正 . 泛函分析讲义(上册)[M]. 北京:北京大学出版社,1990.

[10] FELDMAN M, MCCANN R J. Uniqueness and transport density in Monge's mass transportation problem[J]. Calculus of variations,2002,15:81-113.

[11] CHAMPION T, DE PASCALE L. The monge problem in Rd[J]. Duke mathematical journal,2011,157(3):551-572.

[责任编辑:陆炳新]