第39卷第3期 南京师大学报(自然科学版) Vol. 39 No. 3
2016年9月 JOURNAL OF NANJING NORMAL UNIVERSITY(Natural Science Edition) Sept,2016

doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2016.03.005

局部非利普希茨条件下G-随机微分方程的解的逼近

王丙均[1,2],袁明霞[3],张 慧[2]

(1.南京师范大学数学科学学院,江苏 南京 210046)
(2.金陵科技学院公共基础课部,江苏 南京 211169)
(3.南京大学金陵学院基础部,江苏 南京 210089)

[摘要] 考虑了一类由 G 布朗运动驱动的随机微分方程,在其参数满足局部非利普希茨条件下,采用逐步逼近的方法,得到了方程的局部解的存在性和唯一性.

[关键词] 局部非利普希茨,微分方程,G 布朗运动
[中图分类号]O175.29;O211.6 [文献标志码]A [文章编号]1001-4616(2016)03-0026-07

Successive Approximation to Solutions of G-Stochastic Differential Equations with Local Non-lipschitz Conditions

Wang Bingjun[1,2],Yuan Mingxia[3],Zhang Hui[2]

(1.School of Mathematical Science,Nanjing Normal University,Nanjing 210046,China)
(2.Department of Public Basic Courses,Jinling Institute of Technology,Nanjing 211169,China)
(3.Jinling College,Nanjing University,Nanjing 210089,China)

Abstract:This paper consider a class of stochastic differential equations driven by G-Brownian motion with local non-lipschitz conditions. The existence and uniqueness of the local solutions are gain.

Key words:local non-lipschitz,differential equation,G-Brownian motion

受到金融中风险度量、套期保值等不确定问题的启发,彭[1-3]系统地建立了非线性期望理论.作为典型的且比较重要的一类,彭[4,5]着重介绍了 G 期望理论.随后,在 G 期望理论的框架下,G 布朗运动及其伊藤型随机积分等概念和性质得到了相应的研究.在这个基础上,文献[4,6]在利普希茨条件下研究了由 G 布朗运动驱动的随机微分方程的解的存在唯一性.然而利普希茨条件的要求比较苛刻.文献[7]在全局的卡拉泰奥多里条件下通过迭代逼近的方法,研究了 G 布朗运动驱动的随机微分方程的解的存在唯一性.但是作为更一般的情况,局部的利普希茨条件下的 G-随机微分方程的解的存在性和唯一性仍然值得研究.

本文在局部非利普希茨条件下研究如下 G 随机微分方程:

$$dx(t)=f(t,x(t))dt+g(t,x(t))d\langle B\rangle_t+h(t,x(t))dB(t),\quad t\in[t_0,T],\tag{1}$$

初始条件为 $x(t_0)=x_0\in L_G^2(\Omega_{t_0})$,其中 $f(t,x),g(t,x),h(t,x)\in M_G^2(0,T)$,$B(t)$ 为 G 布朗运动,$\langle B\rangle_t$ 是其二次变差过程.

1 预备知识

在本部分,我们介绍 G-期望,G-布朗运动,G-随机积分等概念和性质,更详细的内容可以参考文献[2,4,8,9,10].

定义 1 设 Ω 是一个给定的集合,H 是由定义在 Ω 上的实值函数构成的线性空间,且满足对

收稿日期:2015-08-26.
基金项目:江苏省自然科学基金(BK20140106).
通讯联系人:王丙均,博士研究生,讲师,研究方向:随机偏微分方程.E-mail:wbj586@163.com

$\forall\varphi\in C_{b,Lip}(\mathbf{R}^d)$,若 $X_i\in\boldsymbol{H}, i=1,2,\cdots,d$,则 $\varphi(X_1,X_2,\cdots,X_d)\in\boldsymbol{H}$,其中 $C_{b,Lip}(\mathbf{R}^d)$ 是有界实值利普希茨连续函数构成的空间.实值泛函 $E:\boldsymbol{H}\to\mathbf{R}$ 称为是次线性期望,如果它满足如下性质:对 $\forall X,Y\in\boldsymbol{H}$,

(1)单调性:若 $X\geqslant Y$,则 $E[X]\geqslant E[Y]$.

(2)常数保值性:$E[C]=C$,其中 $C\in\mathbf{R}$.

(3)次可加性:$E[X+Y]\leqslant E[X]+E[Y]$.

(4)$E[\lambda X]=\lambda E[X]$,其中 $\lambda\geqslant 0$.

则称 $(\Omega,\boldsymbol{H},E)$ 为次线性期望空间,$X\in\boldsymbol{H}$ 称为是 $(\Omega,\boldsymbol{H},E)$ 中的随机变量.称 $\boldsymbol{Y}=(Y_1,\cdots,Y_d)$ 为 $(\Omega,\boldsymbol{H},E)$ 中的 d 维随机向量.

定义 2 称次线性期望空间 $(\Omega,\boldsymbol{H},E)$ 中的 n 维向量 $\boldsymbol{Y}=(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$ 与 m 维向量 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_m)$ 独立,如果对 $\forall\varphi\in C_{b,Lip}(\mathbf{R}^{m\times n})$,有

$$E[\varphi(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})]=E[E[\varphi(x,\boldsymbol{Y})]_{x=\boldsymbol{X}}].$$

定义 3 设 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 分别是定义在 $(\Omega_1,\boldsymbol{H}_1,E_1)$ 和 $(\Omega_2,\boldsymbol{H}_2,E_2)$ 中的两个 n 维向量,称他们是同分布的,如果

$$E_1[\varphi(\boldsymbol{X})]=E_2[\varphi(\boldsymbol{Y})],$$

记作 $\boldsymbol{X}\overset{d}{=}\boldsymbol{Y}$.$\bar{\boldsymbol{X}}$ 称为是 $\boldsymbol{X}$ 的独立的修正,如果 $\bar{\boldsymbol{X}}$ 独立于 $\boldsymbol{X}$ 且与 $\boldsymbol{X}$ 同分布.

定义 4 称 $(\Omega,\boldsymbol{H},E)$ 上的 d 维向量 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_d)$ 服从 G 正态分布,若对 $\forall a,b\geqslant 0$,有

$$a\boldsymbol{X}+b\bar{\boldsymbol{X}}\overset{d}{=}\sqrt{a^2+b^2}\,\boldsymbol{X},$$

其中 $\bar{\boldsymbol{X}}$ 是 $\boldsymbol{X}$ 的独立的修正,$G(\boldsymbol{A})=\frac{1}{2}E[(\boldsymbol{AX},\boldsymbol{X})]:\boldsymbol{S}_d\to\mathbf{R}$,$\boldsymbol{S}_d$ 是 $d\times d$ 的对称矩阵构成的集合.特别的,当 $d=1$ 时,则 $\boldsymbol{A}=a$ 为常数,$G(a)=\frac{1}{2}(\bar{\sigma}^2a^+-\underline{\sigma}^2a^-)$,其中 $\underline{\sigma}^2:-E[-\boldsymbol{X}^2]\leqslant E[\boldsymbol{X}^2]:=\bar{\sigma}^2$.为简单起见,本文取 $d=1$.

定义 5 次线性期望空间 $(\Omega,\boldsymbol{H},E)$ 中的过程 $(B(t)\in\boldsymbol{H})_{t\geqslant 0}$ 称为是 G 布朗运动,如果它满足如下性质:

(1)$B(0)=0$,

(2)对任意的 $s,t\geqslant 0$,增量 $B(t+s)-B(t)\overset{d}{=}\sqrt{s}Z$ 且独立于 $(B(t_1),\cdots,B(t_n))$,$0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_n\leqslant t$,其中 Z 服从 G 正态分布.

可以通过如下方式构造 G 布朗运动.取 $\Omega=C_0(\mathbf{R}^+)$ 为具有实值连续路径的 $(w_t)_{t\in\mathbf{R}^+}$ 构成的距离空间,且 $w_0=0$,其距离定义为

$$\rho(w_t^1-w_t^2):=\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i}[\max_{t\in[0,i]}(\left|w_t^1-w_t^2\right|\wedge 1)].$$

记 $B_w(t)=w_t, t\in[0,+\infty)$.令

$$Lip(\Omega)=\left\{\varphi(w_{t_1},\cdots,w_{t_n}):\forall n\geqslant 1,t_1,\cdots,t_n\in[0,+\infty),\forall\varphi\in C_{b,Lip}(\mathbf{R}^n)\right\}.$$

取 $\boldsymbol{H}=Lip(\Omega)$ 作为随机变量构成的线性空间.接下来,在 $(\Omega,\boldsymbol{H})$ 上构造次线性期望 $\hat{E}$.对每个 $\boldsymbol{H}$ 中的随机变量

$$\xi=\varphi(B(t_1),B(t_2)-B(t_1),\cdots,B(t_n)-B(t_{n-1})),\quad t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_n,$$

记 $\hat{E}[\xi]:=\bar{E}[\varphi(X_1\sqrt{t_1},X_2\sqrt{t_2-t_1},\cdots,X_n\sqrt{t_n-t_{n-1}})], t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_n$,其中 $\left\{X_i\right\}_{i=1}^n$ 是次线性期望空间 $(\bar{\Omega},\bar{\boldsymbol{H}},\bar{E})$ 上的随机变量序列,对每个 $i, X_i\overset{d}{=}X_1, X_{i+1}$ 独立于 $(X_1,\cdots,X_i)$,而 X_1 服从 G 正态分布.容易验证,通过上述方式构造的泛函 $\hat{E}$ 是 (Ω,H) 上的次线性期望,且过程 $B_w(t)=w_t, t\in[0,+\infty)$ 是 $(\Omega,\boldsymbol{H},\hat{E})$ 上的 G 布朗运动.在接下来的讨论中,我们用此次线性期望空间及 G 布朗运动.记 $L_G^p(\Omega)$ 为 $Lip(\Omega)$ 在范数 $\|X\|_p=(\hat{E}[\left|X^p\right|])^{\frac{1}{p}}$ 下的完备化空间.

记 $B(\Omega)$ 为 Ω 的伯雷尔 σ 代数.文献[4]证明了存在一族定义在 $(\Omega,\boldsymbol{B}(\Omega))$ 上的弱紧的概率测度序列 $\boldsymbol{P}$ 使得

$$\hat{E}[X]=\sup_{P\in\boldsymbol{P}}E_P[X],\ \forall X\in L_G^1(\Omega),$$

其中 E_P 是关于概率测度 P 的线性期望.

现在,我们介绍自然肖凯容量,

$$c(A):=\sup_{P\in\mathcal{P}}P(A),\ \ A\in\mathcal{B}(\Omega).$$

定义 6 集合 $A\in\mathcal{B}(\Omega)$ 称为是极集,如果 $c(A)=0$. 一个性质称为是拟成立的(q.s.),如果它在除了一个极集外都成立.

定义 7 定义在 Ω 上的实值函数称为是拟连续的,如果对 $\forall\varepsilon>0$,存在一个开子集 O,$c(O)<\varepsilon$,使得 $X|_{O^c}$ 是连续的.我们称 $X:\Omega\to\mathbf{R}$ 有一个拟连续的修正,如果存在一个拟连续的函数 $Y:\Omega\to\mathbf{R}$ 使得 $X=Y$,q.s..

对每个 $t\in[0,\infty)$,我们介绍下列空间:

$$\Omega_t:=\{w(\cdot\wedge t):w\in\Omega\},\ F_t:=\mathcal{B}(\Omega_t),$$

$L^0(\Omega):\mathcal{B}(\Omega)$ 可测实值函数构成的空间;$L^0(\Omega_t):F_t$ 可测实值函数构成的空间,$B_b(\Omega):L^0(\Omega)$ 中的有界的元素,$B_b(\Omega_t):=B_b(\Omega)\bigcap L^0(\Omega_t)$,$C_b(\Omega):B_b(\Omega)$ 中的连续的元素,$C_b(\Omega_t):=C_b(\Omega)\bigcap L^0(\Omega_t)$.

记 $L_b(\Omega)$ 是 $B_b(\Omega)$ 的完备化空间,$L_c(\Omega)$ 是 $C_b(\Omega)$ 的完备化空间,文献[4]证明了 $L_c(\Omega)\subset L_b(\Omega)$,且 $L_b^p(\Omega)$ 和 $L_c^p(\Omega)$ 有如下表示:

$$L_b^p(\Omega)=\left\{X\in L^0(\Omega)\Big|\lim_{N\to\infty}\hat{E}[\left|X^p\right|I_{\{|X|>N\}}]=0\right\},$$

$$L_c^p(\Omega)=\left\{X\in L_b^p(\Omega)\Big|X\text{有一个拟连续的修正}\right\},$$

并且 $L_c^p(\Omega)=L_G^p(\Omega),L_b^p(\Omega_t)=L_b^p(\Omega)\bigcap L^0(\Omega_t),\ \ L_G^p(\Omega_t)=L_G^p(\Omega)\bigcap L^0(\Omega_t),\ \ p>q\geqslant1$ 时,有 $L_G^p(\Omega)\subset L_G^q(\Omega_t)$.

引理 1[4] 设 $p,q>1,\ \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1,X\in L_G^p(\Omega),Y\in L_G^q(\Omega)$,则 $XY\in L_G^1(\Omega)$,且

$$\hat{E}[|XY|]\leqslant(\hat{E}[|X|^p])^{\frac{1}{p}}(\hat{E}[|X|^q])^{\frac{1}{q}}.$$

接下来,我们介绍关于 G 布朗运动的伊藤积分.设 $\pi_t=t_0,t_1,\cdots,t_N$ 是 $[0,T]$ 的一个分割,考虑如下简单过程:$\eta_t(w)=\sum_{k=0}^{N-1}\xi_k(w)I_{[t_k,t_{k+1})}(t)$,其中 $\xi_k\in L_G^p(\Omega_{t_k}),k=0,1,\cdots,N-1$.所有这样的简单过程构成的集合记为 $M_G^{p,0}(0,T)$,其在范数

$$\|\eta\|_{M_G^p}=[\int_0^T E[|\eta|^p]\mathrm{d}t]^{\frac{1}{p}}$$

下完备的空间记为 $M_G^p(0,T)$,且有 $M_G^p(0,T)\subset M_G^q(0,T),p\geqslant q$.

定义 8 对 $\eta\in M_G^{p,0}(0,T)$,定义其博赫纳积分为

$$\int_0^t\eta_t(w)\mathrm{d}t:=\sum_{k=0}^{N-1}\xi_k(w)(t_{k+1}-t_k).$$

引理 2[4] 对 $\eta\in M_G^p(0,T)$,有

$$\hat{E}[\int_0^T|\eta(t)|^p\mathrm{d}t]\leqslant\int_0^T[\hat{E}|\eta(t)|^p]\mathrm{d}t.$$

定义 9 对 $\eta_w(t)=\sum_{k=0}^{N-1}\xi_k(w)I_{[t_k,t_{k+1})}\in M_G^{2,0}(0,T)$,定义其伊藤积分为

$$\int_0^t\eta(s)\mathrm{d}B(s):=\sum_{k=0}^{N-1}\xi_k(w)(B(t_{k+1})-B(t_k)).$$

映射 $I:M_G^{2,0}(0,T)\to L_G^2(\Omega_T)$ 可连续延拓到 $I:M_G^2(0,T)\to L_G^2(\Omega_T)$.对 $\eta\in M_G^2(0,T)$,伊藤积分定义为

$$I(\eta):=\int_0^T\eta(t)\mathrm{d}B(t).$$

和经典的布朗运动不同,G 布朗运动 $B(t)$ 的二次变差不是一个常数,而是 $L_G^2(\Omega_t)$ 中的一个过程,且有如下表示:

$$\langle B\rangle_t:=\lim_{\mu(\pi_t^N)\to0}\sum_{k=0}^{N-1}(B(t_{k+1}^N)-B(t_k^N))^2=(B(t))^2-2\int_0^t B(s)\mathrm{d}B(s).$$

定义 10 对 $\eta(t)\in M_G^{1,0}(0,T)$，定义映射 $Q:M_G^{1,0}(0,T)\to L_G^1(\Omega_T)$：

$$Q(\eta)=\int_0^T\eta(t)\mathrm{d}\langle B\rangle_t:=\sum_{k=0}^{N-1}\xi_k(w)(\langle B\rangle_{t_{k+1}}-\langle B\rangle_{t_k}),$$

Q 可以被连续地延拓到 $M_G^1(0,T)\to L_G^1(\Omega_T)$，仍记此映射为 $Q(\eta)=\int_0^T\eta(t)\mathrm{d}\langle B\rangle_t$.

我们列出关于 G 布朗运动的伊藤积分的一些性质：

引理 3[4] 对 $\eta\in M_G^2(0,T)$，有

$$\hat{E}[\int_0^T\eta(s)\mathrm{d}B(s)]=0,$$

$$\hat{E}[(\int_0^T\eta(s)\mathrm{d}B(s))^2]=\hat{E}[\int_0^T\eta^2(s)\mathrm{d}\langle B\rangle_s],$$

$$\underline{\sigma}^2\hat{E}[\int_0^T|\eta(s)|^2\mathrm{d}s]\leqslant\hat{E}[(\int_0^T\eta(s)\mathrm{d}B(s))^2]\leqslant\bar{\sigma}^2\hat{E}[\int_0^T|\eta(s)|^2]\mathrm{d}s.$$

引理 4[6] 对 $\eta\in M_G^p(0,T),\ p\geqslant 2$，令 $X(t)=\int_0^t\eta(s)\mathrm{d}B(s)$，则存在常数 C 和 $X(t)$ 的一个连续修正 $\bar{X}(t)$ 使得下式成立：

$$\hat{E}[\sup_{s\leqslant u\leqslant t}|\bar{X}(u)-\bar{X}(s)|^p]\leqslant C_p\bar{\sigma}^{\frac{p}{2}}\hat{E}[(\int_s^t|\eta(u)|^2\mathrm{d}u)^{\frac{p}{2}}].$$

引理 5[6] 若 $\eta\in M_G^p(0,T),\ p\geqslant 1$，则

$$\hat{E}[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\int_0^t\eta(s)\mathrm{d}\langle B\rangle_s\right|^p]\leqslant\bar{\sigma}^{2p}T^{p-1}\int_0^T\hat{E}[|\eta(s)|^p]\mathrm{d}s.$$

2 主要结论

为了证明方程（1）的解的存在唯一性，做出如下假设：

（H1） 存在函数 $H(t,u):[t_0,\infty]\times\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$，对于固定的 $u\geqslant 0$，$H(t,u)$ 关于 $t\geqslant t_0$ 是局部可积的；对于固定的 $t\geqslant t_0$，$H(t,u)$ 关于 u 是连续非降的．函数 $f(t,x),\ g(t,x),\ h(t,x)$ 满足如下条件：对于 $\forall t\in[t_0,T]$，$X\in B(x_0,\rho)$，

$$\hat{E}[|f(t,X)|^2]+\hat{E}[|g(t,X)|^2]+\hat{E}[|h(t,X)|^2]\leqslant H(t,\hat{E}[|X|^2]),$$

其中 $x_0=X(t_0)\in L_G^2(\Omega)$，$B(X,\rho)$ 是以 X 为中心，ρ 为半径的闭球．

（H2） （a）存在定义在 $[t_0,T]\times[0,4\rho]$ 的函数 $G(t,u)\geqslant 0$，对于固定的 $u\geqslant 0$，$G(t,u)$ 关于 $t\geqslant t_0$ 是局部可积的；对于固定的 $t\in[t_0,T]$，$G(t,u)$ 关于 $u\in[0,4\rho]$ 是连续非降的；$G(t,0)=0,\forall t\in[t_0,T]$．另外，对于 $\forall t\in[t_0,T],\ X,Y\in B(x_0,\rho)$，下述不等式成立：

$$\hat{E}[|f(t,X)-f(t,Y)|^2]+\hat{E}[|g(t,X)-g(t,Y)|^2]+\hat{E}[|h(t,X)-h(t,Y)|^2]\leqslant G(t,\hat{E}[|X-Y|^2]).$$

（b）对于任意的常数 $\gamma>0$，若对于 $\forall t\in[t_0,T]$，非负函数 $\phi(t)$ 满足

$$\phi(t)\leqslant\gamma\int_{t_0}^tG(s,\phi(s))\mathrm{d}s,$$

则 $\phi(t)=0$．

引理 6[11] 对于方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\gamma H(t,u),\tag{2}$$

其中 $u(t_0)=u_0,\ u_0\geqslant 0$．若 $H(t,u)$ 满足（H1），则对于任意的 $\gamma>0$，微分方程（2）存在一个局部解．

我们采用迭代的方法．对于 $n=1,2,3,\cdots$，定义

$$\begin{aligned}&x_n(t)=x_0+\int_{t_0}^tf(s,x_{n-1}(s))\mathrm{d}s+\int_{t_0}^tg(s,x_{n-1}(s))\mathrm{d}\langle B\rangle_s+\int_{t_0}^th(s,x_{n-1}(s))\mathrm{d}B(s),\\&x_0(t)=x_0.\end{aligned}\tag{3}$$

定理 1 设 $x_n(t)$ 是（3）所定义的过程，$f(t,x),\ g(t,x),\ h(t,x)$ 满足假设（H1–H2）．则存在 $t_1\in[t_0,T]$，使得对于 $\forall t\in[t_0,t_1]$，$\{\hat{E}[|x_n(t)|^2]\}$ 是一致有界的．

证明　设 $u(t)$ 是方程(2)的局部解,即存在 $T_0\in[t_0,T]$,使得对于 $\forall t\in[t_0,T_0]$,

$$u(t)=\gamma\int_{t_0}^{t}H(s,u(s))\mathrm{d}s+u_0\,. \tag{4}$$

取 $u_0\in\mathbf{R}^+$ 使得 $u_0>4\hat{E}[x_0^2]$. 由(3)可以得到

$$\left|x_1(t)\right|^2\leqslant 4x_0^2+4\sup_{t_0\leqslant r\leqslant t}\left|\int_{t_0}^{t}f(s,x_0)\mathrm{d}s\right|^2+4\sup_{t_0\leqslant r\leqslant t}\left|\int_{t_0}^{t}g(s,x_0)\mathrm{d}\langle B\rangle_s\right|^2+4\sup_{t_0\leqslant r\leqslant t}\left|\int_{t_0}^{t}h(s,x_0)\mathrm{d}B(s)\right|^2.$$

由 Hölder 不等式,引理 4,引理 5,对于 $\forall t\in[t_0,T_0]$, 有

$$\hat{E}[\left|x_1(t)\right|^2]\leqslant 4\hat{E}[x_0^2]+4T\int_{t_0}^{t}\hat{E}[\left|f(s,x_0)\right|^2]\mathrm{d}s+4\bar{\sigma}^4T\int_{t_0}^{t}\hat{E}[\left|g(s,x_0)\right|^2]\mathrm{d}s+4C_2\bar{\sigma}\int_{t_0}^{t}\hat{E}[\left|h(s,x_0)\right|^2]\mathrm{d}s\,. \tag{5}$$

由于函数 $u(t)$ 在 $[t_0,T_0]$ 上连续,则

$$p_0:=\sup_{t\in[t_0,T_0]}u(t)<\infty\,, \tag{6}$$

且由(H1), $H(t,u(t))$ 关于 $u(t)$ 是单调非降的,故对于 $t\in[t_0,T_0]$, $H(t,u(t))\leqslant H(t,p_0)$ 恒成立 .

记 $L=T+\bar{\sigma}^4T+C_2\bar{\sigma}=\gamma$, $\rho=4\hat{E}[x_0^2]\vee 3L\int_{t_0}^{T_0}H(s,p_0)\mathrm{d}s$,故由(4),(5)和(H1),对于 $t\in[t_0,T_0]$,有

$$u(t)-\hat{E}[\left|x_1(t)\right|^2]\geqslant(u_0-4\hat{E}[x_0^2])+4L\int_{t_0}^{t}[H(s,u(s))-H(s,\hat{E}[\left|x_0^2\right|])]\mathrm{d}s>0\,, \tag{7}$$

这里用到了 $u(s)>u_0\geqslant 4\hat{E}[x_0^2]\geqslant\hat{E}[x_0^2]$, $s\geqslant t_0$,从而 $u(t)>E\left[\left|x_1(t)\right|\right]^2$. 由假设(H1), $H(t,u(t))$ 对于固定的 $t\in[t_0,\infty)$ 关于 u 是连续、单调非降的,故存在 $t_1\in(t_0,T_0)$,使得对于 $\forall t\in[t_0,t_1]$,下式成立:

$$\begin{aligned}\hat{E}[\left|x_1(t)-x_0\right|^2]\leqslant 3\hat{E}[\sup_{t_0\leqslant r\leqslant t}\left|\int_{t_0}^{r}f(s,x_0)\mathrm{d}s\right|^2]+3\hat{E}[\sup_{t_0\leqslant r\leqslant t}\left|\int_{t_0}^{r}g(s,x_0)\mathrm{d}\langle B\rangle_s\right|^2]+3\hat{E}[\sup_{t_0\leqslant r\leqslant t}\left|\int_{t_0}^{r}h(s,x_0)\mathrm{d}B(s)\right|^2]\leqslant\\ 3L\int_{t_0}^{t}H(s,\hat{E}[x_0^2])\mathrm{d}s\leqslant 3L\int_{t_0}^{t_1}H(s,p_0)\mathrm{d}s\leqslant\rho.\end{aligned} \tag{8}$$

假设 $n=m$ 时,对于 $\forall t\in[t_0,t_1]$,下列不等式成立

$$\hat{E}[\left|x_m(t)\right|^2]<u(t)\,, \tag{9}$$

$$\hat{E}[\left|x_m(t)-x_0\right|^2]\leqslant\rho\,. \tag{10}$$

则类似于(5),由(H1),

$$\hat{E}[\left|x_{m+1}(t)\right|^2]\leqslant 4\hat{E}[x_0^2]+4L\int_{t_0}^{t}H(s,\hat{E}[\left|x_m(s)\right|^2])\mathrm{d}s\,. \tag{11}$$

再由(4),可得

$$u(t)-\hat{E}[\left|x_{m+1}(t)\right|^2]\geqslant(u_0-4\hat{E}[x_0^2])+4L\int_{t_0}^{t}[H(s,u(s))-H(s,\hat{E}[\left|x_m(s)\right|^2])]\mathrm{d}s\,. \tag{12}$$

利用假设(9),(H1)和 $u_0>4\hat{E}[x_0^2]$,对于 $\forall t\in[t_0,t_1]$,易得

$$u(t)-\hat{E}[\left|x_{m+1}(t)\right|^2]>4L\int_{t_0}^{t}[H(s,u(s))-H(s,\hat{E}[\left|x_m(s)\right|^2])]\mathrm{d}s\geqslant 0\,. \tag{13}$$

另外,对于 $\forall t\in[t_0,t_1]$,由 Hölder 不等式,引理 4,引理 5 和(H1)有

$$\hat{E}[\left|x_{m+1}(t)-x_0\right|^2]\leqslant 3L\int_{t_0}^{t}H(s,\hat{E}[\left|x_{m+1}(s)\right|^2])\mathrm{d}s\leqslant 3L\int_{t_0}^{t}H(s,p_0)\mathrm{d}s\leqslant\rho\,.$$

由数学归纳法,易得 $\hat{E}[\left|x_n(s)\right|^2]<u(t),\hat{E}[\left|x_n(t)-x_0\right|^2]\leqslant\rho$.

由于 $u(t)$ 在 $[t_0,t_1]$ 上连续,故存在常数 $M>0$,使得对于 $\forall t\in[t_0,t_1]$,有 $\hat{E}[\left|x_n(s)\right|^2]<M$ 且 $x_n(t)\in B(x_0,\rho)$, $x_n(t)\in L_G^2(\Omega_t)$.

定理 2　由(3)定义的随机过程序列 $\{x_n(t)\}_{n\geqslant 0}$ 在区间 $[t_0,t_1]$ 上一致收敛于(1)的解 .

证明　在 $[t_0,t_1]$ 上定义函数:

$$a_{mn}(t)=\hat{E}[\left|x_m(t)-x_n(t)\right|^2],\quad a_k(t)=\sup_k\{a_{mn}(t)|m\geqslant n\geqslant k\}\,, \tag{14}$$

其中 t_1 为定理 1 中所得到的 . 由定理 1,对于 $t\in[t_0,t_1]$,序列 $\left\{\hat{E}[\left|x_n(t)\right|^2]\right\}$ 一致有界,再由(6)和(13),可以得到

$$a_{mn}(t)\leqslant 2\hat{E}[|x_m(t)|^2]+2\hat{E}[|x_n(t)|^2]\leqslant 4\sup_{t\in[t_0,t_1]}u(t)\leqslant 4p_0 .$$

对于 $s,t\in[t_0,t_1]$ 和所有的整数 $m,n\geqslant 1$，有

$$|x_m(t)-x_n(t)|^2-|x_m(s)-x_n(s)|^2\leqslant[|x_m(t)-x_n(t)|+|x_m(s)-x_n(s)|][|x_m(t)-x_m(s)|+|x_n(t)-x_n(s)|].$$

所以，由引理 1，定义 1，得

$$|a_{mn}(t)-a_{mn}(s)|^2=[\hat{E}[|x_m(t)-x_n(t)|^2]-\hat{E}[|x_m(s)-x_n(s)|^2]]^2\leqslant[\hat{E}[|x_m(t)-x_n(t)|^2-|x_m(s)-x_n(s)|^2]]^2\leqslant$$
$$4[\hat{E}[|x_m(t)-x_n(t)|^2]+\hat{E}[|x_m(s)-x_n(s)|^2]][\hat{E}[|x_m(t)-x_m(s)|^2]+\hat{E}[|x_n(t)-x_n(s)|^2]]\leqslant$$
$$32p_0[\hat{E}[|x_m(t)-x_m(s)|^2]+\hat{E}[|x_n(t)-x_n(s)|^2]].$$

另外，

$$\hat{E}[|x_m(t)-x_m(s)|^2]\leqslant 3L\int_s^t H(s,\hat{E}[|x_{m-1}(r)|^2])\mathrm{d}r\leqslant 3L\int_s^t H(s,u(r))\mathrm{d}r\leqslant 3L|M(t)-M(s)| ,$$

其中 $M(t)=\int_{t_0}^t H(s,u(s))\mathrm{d}s$，$u(t)$ 是（2）的局部解．同理可得

$$\hat{E}[|x_n(t)-x_n(s)|^2]\leqslant 3L|M(t)-M(s)| .$$

从而存在一个正数 Q，使得

$$|a_{mn}(t)-a_{mn}(s)|\leqslant Q|M(t)-M(s)|^{\frac{1}{2}} . \tag{15}$$

对于 $m\geqslant n\geqslant 0,\ s,t\in[t_0,t_1]$，

$$a_k(t)=\sup_{m\geqslant n\geqslant k}\{a_{mn}(t)\}\leqslant 4\sup_{t\in[t_0,t_1]}u(t)<4p_0 .$$

利用不等式（15），对于任意的整数 $k\geqslant 0$ 和 $s,t\in[t_0,t_1]$，

$$|a_k(t)-a_k(s)|=\left|\sup_{m\geqslant n\geqslant k}\{a_{mn}(t)\}-\sup_{m\geqslant n\geqslant k}\{a_{mn}(s)\}\right|\leqslant\left|\sup_{m\geqslant n\geqslant k}\{a_{mn}(t)-a_{mn}(s)\}\right|\leqslant\sup_{m\geqslant n\geqslant k}|a_{mn}(t)-a_{mn}(s)|\leqslant Q|M(t)-M(s)|^{\frac{1}{2}} ,$$

即 $\{a_k(t)\}$ 是相对紧的序列，从而存在一个子列 $\{a_{k'}(t)\}$ 和一个定义在 $[t_0,t_1]$ 的连续函数 $a(t)$，使得 $\lim_{k'\to\infty}a_{k'}(t)=a(t)$．进一步，对于 $m\geqslant n\geqslant k'+1$，由（H2），

$$a_{mn}(t)=\hat{E}[|x_m(t)-x_n(t)|^2]\leqslant 3T\int_{t_0}^t\hat{E}[|f(s,x_{m-1}(s))-f(s,x_{n-1}(s))|^2]\mathrm{d}s+3\bar{\sigma}^4T\hat{E}[|g(s,x_{m-1}(s))-g(s,x_{n-1}(s))|^2]\mathrm{d}s+$$
$$3C_2\bar{\sigma}\int_{t_0}^t\hat{E}[|h(s,x_{m-1}(s))-h(s,x_{n-1}(s))|^2]\mathrm{d}s\leqslant 3L\int_{t_0}^t G(s,\hat{E}[|x_{m-1}(s)-x_{n-1}(s)|^2])\mathrm{d}s\leqslant 3L\int_{t_0}^t G(s,a_{m-1,n-1}(s))\mathrm{d}s\leqslant \tag{16}$$
$$3L\int_{t_0}^t G(s,a_{k'}(s))\mathrm{d}s.$$

故

$$a_{k'+1}(t)\leqslant 3L\int_{t_0}^t G(s,a_{k'}(s))\mathrm{d}s.$$

令 $k'\to\infty$，由（H2），勒贝格控制收敛定理，对于 $t\in[t_0,t_1]$，

$$a(t)\leqslant 3L\int_{t_0}^t G(s,a(s))\mathrm{d}s ,$$

故有 $a(t)=0$．即 $\{x_n(t)\}$ 是 Banach 空间 $L_G^2(\Omega_t)$ 中的一个柯西列，从而存在一个随机过程 $x(t)$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\hat{E}[|x_n(t)-x(t)|^2]=0 . \tag{17}$$

类似于（16），由（17）和（H2），当 $k'\to\infty$ 时，有

$$\hat{E}\left[\left|x_n(t)-[x_0+\int_{t_0}^t f(s,x(s))\mathrm{d}s+\int_{t_0}^t g(s,x(s))\mathrm{d}\langle B\rangle_s+\int_{t_0}^t h(s,x(s))\mathrm{d}B(s)]\right|^2\right]\leqslant 3T\int_{t_0}^t\hat{E}[|f(r,x_{n-1}(r))-f(r,x(r))|^2]\mathrm{d}s+$$
$$3T\bar{\sigma}^4\int_{t_0}^t\hat{E}[|h(r,x_{n-1}(r))-h(r,x(r))|^2]\mathrm{d}s+3C_2\bar{\sigma}\int_{t_0}^t\hat{E}[|h(r,x_{n-1}(r))-h(r,x(r))|^2]\mathrm{d}s\leqslant 3L\int_{t_0}^t G(s,\hat{E}[|x_{m-1}(s)-x(s)|^2])\mathrm{d}s\to 0,$$

从而对于 $t\in[t_0,t_1]$，$\mathrm{q.s.}\ w\in\Omega$，有

$$x(t)=x_0+\int_0^t f(s,x(s))\mathrm{d}s+\int_{t_0}^t g(s,x(s))\mathrm{d}\langle B\rangle_s+\int_{t_0}^t h(s,x(s)))\mathrm{d}B(s).$$

即 $x(t)$ 是随机偏微分方程（1）在 $[t_0,t_1]$ 上的解．

最后我们证明这个温和解是唯一的．假设 $x(t),y(t)$ 为两个解，且 $x(t_0)=y(t_0)=x_0$，则有

$$\hat{E}[|x(t)-y(t)|^2]\leqslant 3L\int_{t_0}^{t_1}G(s,\hat{E}[|x(s)-y(s)|^2])\mathrm{d}s\ .$$

所以由(H2),对于 $\forall t\in[t_0,t_1]$,

$$\hat{E}[|x(t)-y(t)|^2]=0\ .$$

这就说明了解的唯一性 .

[参考文献]

[1] PENG S. Filtration consistent nonlinear expectations and evaluations of contingent claims[J]. Acta Math Appl Sin Engl Ser, 2004,20(2):1-24.

[2] PENG S. Nonlinear expectations and nonlinear Markov chains[J]. Chinese Ann Math,2005,26B(2):159-184.

[3] PENG S. Survey on normal distributions, central limit theorem, Brownian motion and the related stochastic calculus under sublinear expectations[J]. Sci China Ser A,2009,52(7):1 391-1 411.

[4] PENG S. Nonlinear expectations and stochastic calculus under uncertainty[EB/OL]. 2010. Arxiv:1002.4546v1.

[5] PENG S. Backward stochastic differential equation, nonlinear expectation and their applications[C]//Proceedings of the International Congress of Mathematicians Hyderabad, India, 2010.

[6] GAO F. Pathwise properties and homomorphic folws for stochastic differential equations driven by G-Brownian motion[J]. Stochastic process Appl,2009,119:3 356-3 382.

[7] REN Y, HU L. A note on the stochastic differential equations driven by G-Brownian motion[J]. Statistics and probability letters,2011,81:580-585.

[8] DENIS L, HU M, PENG S. Function spaces and capacity related to a sublinear expectation: application to G-Brownian motion paths[J]. Potential Anal,2011,34(2):139-161.

[9] LI X, PENG S. Stopping times and related Ito calculus with G-Brownian motion[J]. Stochastic process Appl, 2009, 121: 1 492-1 508.

[10] LIN Y. Stochastic differential equations driven by G- Brownian motion with reflecting boundary[J]. Electron J Porbab, 2013,18(9):1-23.

[11] WALTER W. Ordinary Differential Equations[M]. New York: Springer-Verlag, 2003.

[责任编辑:陆炳新]

(上接第25页)

[4] SANTAMBROGIO F. Optimal transport for applied mathematicians[M]. Birkauser, NY: Springer, 2015.

[5] 陈平 . 几个最优映射存在唯一性定理的统一证明[J]. 南京师大学报(自然科学版),2015,38(4):82-85.

[6] CHEN P, JIANG F D, YANG X P. Two dimensional optimal transportation problem for a distance cost with a convex constraint[J]. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations,2013,19(4):1 064-1 075.

[7] CHEN P, JIANG F D, Yang X P. Optimal transportation in Rn for a distance cost with a convex constraint[J]. Zeitschrift füer angewandte mathematik und physik,2015,66(3):587-606.

[8] SANTAMBROGIO F. Absolute continuity and summability of optimal transfort densities: simpler proofs and new estimates [J]. Calculus of variations and partial differential equations,2009,36(3):343-354.

[9] 张恭庆,郭懋正 . 泛函分析讲义(上册)[M]. 北京:北京大学出版社,1990.

[10] FELDMAN M, MCCANN R J. Uniqueness and transport density in Monge's mass transportation problem[J]. Calculus of variations,2002,15:81-113.

[11] CHAMPION T, DE PASCALE L. The monge problem in Rd[J]. Duke mathematical journal,2011,157(3):551-572.

[责任编辑:陆炳新]