doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2016.04.001

3 类图完美匹配数目的计算公式

唐保祥[1],任 韩[2]

(1.天水师范学院数学与统计学院,甘肃 天水 741001)
(2.华东师范大学数学系,上海 200062)

[**摘要**] 图的完美对集计数问题已经被证实是 NP—难问题,因此要得到一般图的完美对集的数目是非常困难的. 该问题在蛋白质结构预测、量子化学、晶体物理学和计算机科学中都有重要的应用,对此问题的研究具有非常重要的理论价值和现实意义. 本文用划分、求和、再递推的方法分别给出了图 $2-nT_2$,$1-nDT_2$ 和 $3-nDT_4$ 的完美匹配数目的计算公式,所给出的方法可以计算出许多类图的所有完美匹配的数目.

[**关键词**] 完美匹配,梯子,线性递推式,特征方程
[**中图分类号**]O157.5 [**文献标志码**]A [**文章编号**]1001-4616(2016)04-0001-04

Counting Formulas of the Number of Perfect Matchings of the Three Types of Graphs

Tang Baoxiang[1],Ren Han[2]

(1.School of Mathematics and Statistics,Tianshui Normal University,Tianshui 741001,China)
(2.Department of Mathematics,East China Normal University,Shanghai 200062,China)

Abstract:Perfect matching counting problems graph has been proven to be NP-hard,so to get the number of perfectly matched general graph is very difficult. The issue has important applications in protein structure prediction,quantum chemistry,crystal physics and computer science. Research on this issue has very important theoretical and practical significance. The counting formula of the perfect matching for graphs $2-nT_2$,$1-nDT_2$ and $3-nDT_4$ is made by applying differentiation,summation and re-recursion in this paper. By the method presented in this paper,the number of all perfect matchings of many graphs can be calculated.

Key words:perfect matching,ladder,linear recurrence relation,characteristic equation

图的完美匹配计数理论的研究成果已经在多个领域得到应用,由于得到应用领域的支持,并与其它理论课题发生密切联系,受到众多学者的关注[1-11]. 本文给出了 3 类图完美匹配数目的计算公式,所给方法为得到一般有完美匹配图的所有完美匹配数目提供了借鉴.

定义 1 若图 G 的两个完美匹配 M_1 和 M_2 中有一条边不同,则称 M_1 和 M_2 是 G 的两个不同的完美匹配.

定义 2 两条长为 n 的路为 $P_1=u_1u_2\cdots u_{n+1}$,$P_2=v_1v_2\cdots v_{n+1}$,分别连接路 P_1 与 P_2 的顶点 u_i 与 $v_i(i=1,2,\cdots,n+1)$所得到的图,称为长为 n 的梯子,记为 T_n.

1 结果及其证明

定理 1 长为 2 的梯子 T_2^i 的顶点集为 $V(T_2^i)=\{u_{i1},u_{i2},u_{i3},v_{i1},v_{i2},v_{i3}\}(i=1,2,\cdots,n)$,分别连接图 T_2^i 与 T_2^{i+1} 的顶点 v_{i2}与 $u_{i+1,2}$,v_{i3}与 $u_{i+1,3}(i=1,2,\cdots,n-1)$,得到的图记为 $2-nT_2$,如图 1 所示. $f(n)$表示图 $2-nT_2$ 的完美匹配的数目,则

收稿日期:2016-02-18.
基金项目:国家自然科学基金(11171114).
通讯联系人:唐保祥,教授,研究方向:图论和组合数学. E-mail:tbx0618@sina.com

$$f(n)=\frac{1}{4}[(2+\sqrt{2})^{n+1}+(2-\sqrt{2})^{n+1}].$$

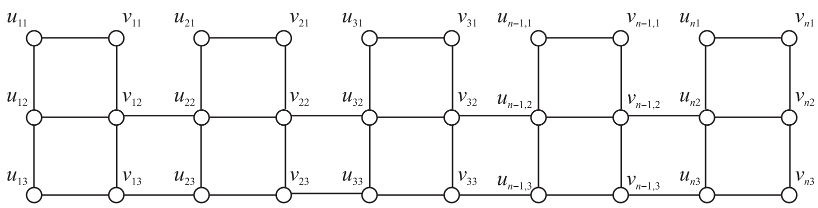

图 1　$2-nT_2$ 图

Fig. 1　Figure of $2-nT_2$

证明　为了求 $f(n)$,先定义一个图 G,并求其完美匹配的数目. 将长为 1 的路 u_1u_2 的端点 u_1 和 u_2 分别与图 $2-nT_2$ 的顶点 u_{12} 和 u_{13} 各连接一条边 u_1u_{12} 和 u_2u_{13} 得到的图记为 G,如图 2 所示. 易知图 G 有完美匹配,$g(n)$ 表示图 G 的完美匹配的数目.

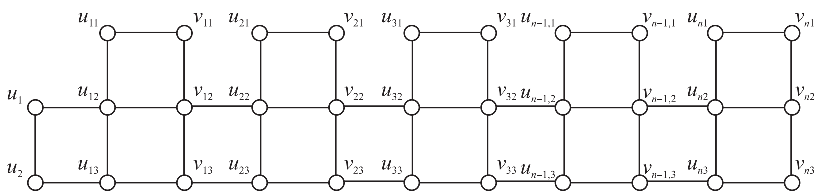

图 2　G 图

Fig. 2　Figure of G

先求 $g(n)$. 设图 G 的完美匹配的集合为 M',G 含边 u_1u_2,或 u_1u_{12} 的完美匹配集合分别记为 M'_1,M'_2,则 $M'_1\cap M'_2=\phi$,$M'=M'_1\cup M'_2$,$g(n)=|M'|=|M'_1|+|M'_2|$.

求 $|M'_1|$. 因为 $u_1u_2\in M'_1$,所以由 $f(n)$ 的定义知,$|M'_1|=f(n)$.

求 $|M'_2|$. 因为 M'_2 含边 u_1u_{12},u_2u_{13},$u_{11}v_{11}$,所以由 $g(n)$ 的定义知,$|M'_2|=g(n-1)$.

因此,

$$g(n)=f(n)+g(n-1). \tag{1}$$

再求 $f(n)$. 易知图 $2-nT_2$ 有完美匹配. 设图 $2-nT_2$ 的完美匹配集合为 M,图 $2-nT_2$ 含边 $u_{11}v_{11}$,或 $u_{11}u_{12}$ 的完美匹配集合分别记为 M_1,M_2,则 $M_i\subseteq M(i=1,2)$,$M_1\cap M_2=\phi$. 故 $M=M_1\cup M_2$,$f(n)=|M|=|M_1|+|M_2|$.

求 $|M_1|$.

情形 1　设 M_{11} 是含边 $u_{11}v_{11}$,$u_{12}v_{12}$,$u_{13}v_{13}$ 的完美匹配,由 $f(n)$ 的定义知,$|M_{11}|=f(n-1)$.

情形 2　设 M_{12} 是含边 $u_{11}v_{11}$,$u_{12}u_{13}$ 的完美匹配,由 $g(n)$ 的定义知,$|M_{12}|=g(n-1)$.

易知 $M_1=\bigcup\limits_{i=1}^{2}M_{1i}$,$M_{11}\cap M_{12}=\phi$,故 $|M_1|=f(n-1)+g(n-1)$.

求 $|M_2|$.

情形 1　因为 M_{21} 含边 $u_{11}u_{12}$,$v_{11}v_{12}$,$u_{13}v_{13}$,所以由 $f(n)$ 的定义知,$|M_2|=f(n-1)$.

综上所述,

$$f(n)=2f(n-1)+g(n-1). \tag{2}$$

把式(1)代入式(2),得

$$f(n)=3f(n-1)+g(n-2), \tag{3}$$

由式(2),得

$$f(n-1)=2f(n-2)+g(n-2), \tag{4}$$

式(3)-式(4),得

$$f(n)=4f(n-1)-2f(n-2), \tag{5}$$

式(5)的特征方程 $x^2-4x+2=0$ 的根为 $x=2\pm\sqrt{2}$.

易知 $f(1)=3$,$g(1)=4$. 故由式(2),得 $f(2)=10$. 故递推式(5)的通解为

$$f(n)=\frac{1}{4}[(2+\sqrt{2})^{n+1}+(2-\sqrt{2})^{n+1}].$$

证毕.

多数存在完美匹配的 2 边连通图的完美匹配数是边数的指数函数[1—11]. 下面定理给出了两类 2 边连通图，其完美匹配数是边数的多项式函数.

定理 2 n 个长为 2 的梯子 T_2^i 的顶点集 $V(T_2^i)=\{u_{i-1,1},u_{i-1,2},u_{i-1,3},u_{i2},u_{i3},u_{i4}\}$.

第 i 个梯子 T_2^i 与第 $i+1$ 个梯子 T_2^{i+1} 有共同的顶点 $u_{i2},u_{i3}(i=1,2,\cdots,n-1)$. 这 n 个梯子形成的图记为 $1-nDT_2$，如图 3 所示. $\sigma(n)$表示图 $1-nDT_2$ 的完美匹配的数目，则 $\sigma(n)=2n+1$.

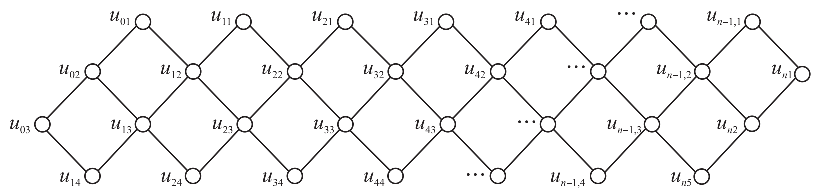

图 3 $1-nDT_2$ 图

Fig. 3 Figure of $1-nDT_2$

证明 图 $1-nDT_2$ 显然存在完美匹配，设 图 $1-nDT_2$ 的完美匹配的集合为 M. 图 $1-nDT_2$ 含边 $u_{03}u_{02}$，$u_{03}u_{14}$的完美匹配的集合分别记为 M_1,M_2，则 $M_1\cap M_2=\phi$，$M=M_1\cup M_2$，$\sigma(n)=|M|=|M_1|+|M_2|$.

图 $1-nT_2$ 的完美匹配可划分如下 3 种情形：

情形 1 图 $1-nT_2$ 包含边 $u_{03}u_{02}$，$u_{14}u_{13}$的完美匹配数为 1.

情形 2 图 $1-nT_2$ 包含边 $u_{03}u_{14}$，$u_{02}u_{13}$的完美匹配数为 1.

情形 3 由 $\sigma(n)$的定义，图 $1-nDT_2$ 包含边 $u_{03}u_{14}$，$u_{02}u_{01}$的完美匹配数为 $\sigma(n-1)$.

所以，得递推关系式

$$\sigma(n)=\sigma(n-1)+2, \tag{6}$$

易知 $\sigma(1)=3$，故由式(6)得 $\sigma(n)=2n+1$.

证毕.

定理 3 n 个长为 4 的梯子 T_4^i 的顶点集 $V(T_4^i)=\{u_{i-1,1},u_{i-1,2},u_{i-1,3},u_{i-1,4},u_{i-1,5},u_{i2},u_{i3},u_{i4},u_{i5},u_{i6}\}$，第 i 个梯子 T_4^i 与第 $i+1$ 个梯子 T_4^{i+1} 有共同的顶点 $u_{i2},u_{i3},u_{i4},u_{i5}(i=1,2,\cdots,n-1)$. 这 n 个梯子形成的图记为 $3-nDT_4$，如图 4 所示. $\tau(n)$表示图 $3-nDT_4$ 的完美匹配的数目，则 $\tau(n)=2n(n+3)$.

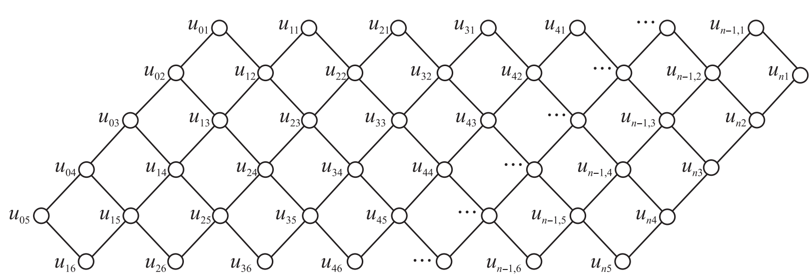

图 4 $3-nDT_4$ 图

Fig. 4 Figure of $3-nDT_4$

证明 图 $3-nDT_4$ 显然存在完美匹配，设图 $3-nDT_4$ 的完美匹配的集合为 M. 图 $3-nDT_4$ 含边 $u_{05}u_{04}$，$u_{05}u_{16}$的完美匹配的集合分别记为 M_1,M_2，则 $M_1\cap M_2=\phi$，$M=M_1\cup M_2$，$\tau(n)=|M|=|M_1|+|M_2|$.

图 $3-nDT_4$ 的完美匹配可划分如下 4 种情形：

情形 1 因为 M_1 包含边 $u_{05}u_{04}$，所以必有 $u_{i6}u_{i5}\in M_1(i=1,2,\cdots,n-1)$，$u_{n5}u_{n4}\in M_1$，所以由定理 2 知，$|M_1|=2n+1$.

情形 2 M_2 的包含边 $u_{05}u_{16}$，$u_{04}u_{15}$的完美匹配记为 M_{21}，则必有 $u_{i6}u_{i5}\in M_{21}(i=1,2,\cdots,n-1)$，$u_{n5}u_{n4}\in M_{21}$，所以由定理 2 知，$|M_{21}|=2n+1$.

情形 3　M_2 的包含边 $u_{05}u_{16}$,$u_{04}u_{03}$,$u_{02}u_{01}$ 的完美匹配记为 M_{22},由 $\tau(n)$ 的定义知,$|M_{22}|=\tau(n-1)$.

情形 4　M_2 的包含边 $u_{05}u_{16}$,$u_{04}u_{03}$,$u_{02}u_{13}$ 的完美匹配记为 M_{23},则必有 $u_{i-1,1}u_{i2}\in M_{23}(i=1,2,\cdots,n-1)$,$u_{n-1}u_{n1}\in M_{23}$;$u_{i4}u_{i3}\in M_{23}(i=2,3,\cdots,n-1)$,$u_{n3}u_{n2}\in M_{23}$;$u_{i6}u_{i5}\in M_{23}(i=3,4,\cdots,n-1)$,$u_{n5}u_{n4}\in M_{23}$. 故 $|M_{23}|=2$.

易知 $M_2=\bigcup\limits_{i=1}^{3}M_{2i}$,$M_{2i}\cap M_{2j}=\phi(1\leqslant i<j\leqslant 3)$,故 $|M_2|=\tau(n-1)+2n+3$.

综上所述,$\tau(n)=\tau(n-1)+4(n+1)$. 易知 $\tau(1)=8$,所以 $\tau(n)=2n(n+3)$. 证毕.

[参考文献]

[1] LOVÁSZ L,PLUMMER M. Matching theory[M]. New York:North-Holland Press,1986.

[2] ZHANG H P. The connectivity of Z-transformation graphs of perfect matchings of polyominoes[J]. Discrete mathematics, 1996,158:257-272.

[3] 林泓,林晓霞.若干四角系统完美匹配数的计算[J]. 福州大学学报(自然科学版),2005,33(6):704-710.

[4] YAN W G,ZHANG F J. Enumeration of perfect matchings of a type of Cartesian products of graphs[J]. Discrete applied mathematics,2006,154:145-157.

[5] 唐保祥,任韩. 4 类图完美匹配数目的递推求法[J]. 数学杂志,2015,353(2):626-634.

[6] 唐保祥,任韩. 3 类特殊图完美对集数的计算[J]. 南开大学学报(自然科学版),2014,47(5):11-16.

[7] 唐保祥,任韩. 4 类图完美匹配的计数[J]. 武汉大学学报(理学版),2012,58(5):441-446.

[8] 唐保祥,李刚,任韩. 3 类图完美匹配的数目[J]. 浙江大学学报(理学版),2011,38(4):16-19.

[9] 唐保祥,任韩. 5 类特殊图完美的计数[J]. 山西大学学报(自然科学版),2013,36(1):18-24.

[10] 唐保祥,任韩. 两类 3 正则图中的完美匹配数[J]. 中山大学学报(自然科学版),2014,53(5):54-58.

[11] 唐保祥,任韩. 3 类图完美匹配的计数[J]. 南京师大学报(自然科学版),2012,35(1):16-21.

[责任编辑:陆炳新]