doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2016.04.002

von Neumann 代数上保持投影的映射

费秀海[1,2],张建华[2]

(1.滇西科技师范学院数学系,云南 临沧 677000)
(2.陕西师范大学数学与信息科学学院,陕西 西安 710062)

[**摘要**]　设 $\mathscr{A}$ 是复 Hilbert 空间 H 上的一个 von Neumann 代数,$P(\mathscr{A})$ 表示 $\mathscr{A}$ 中投影的全体. 本文证明了连续满射 $\Phi:\mathscr{A}\to\mathscr{A}$ 如果满足 $A+\lambda B\in P(\mathscr{A})\Leftrightarrow\Phi(A)+\lambda\Phi(B)\in P(\mathscr{A})$,$\forall A,B\in\mathscr{A}$ 和 $\lambda\in C$,则 Φ 是 $\mathscr{A}$ 上的一个 Jordan 同构.

[**关键词**]　von Neumann 代数,投影,Jordan 同构

[**中图分类号**]O177.1　[**文献标志码**]A　[**文章编号**]1001-4616(2016)04-0005-03

Maps Preserving Projections on von Neumann Algebras

Fei Xiuhai[1,2],Zhang Jianhua[2]

(1.Department of Mathematics,Dianxi Science and Technology Normal University,Lincang 677000,China)
(2. College of Mathematics and Information Science,Shaanxi Normal University,Xi'an 710062,China)

Abstract:Let $\mathscr{A}$ be a von Neumann algebra over complex Hilbert space H,and $P(\mathscr{A})$ denote all projections of $\mathscr{A}$. In this paper,we prove that a continuous surjective mapping $\Phi:\mathscr{A}\to\mathscr{A}$ if satisfies $A+\lambda B\in P(\mathscr{A})\Leftrightarrow\Phi(A)+\lambda\Phi(B)\in P(\mathscr{A})$, $\forall A,B\in\mathscr{A}$ and $\forall\lambda\in C$,then Φ is a Jordan isomorphism on $\mathscr{A}$.

Key words:von Neumann algebra,projection,Jordan isomorphism

1　预备知识

设 H 是复数域 C 上的一个无限维 Hilbert 空间,$B(H)$ 为 H 上有界线性算子的全体,$\mathscr{A}$ 表示 H 上的一个 von Neumann 代数,$P(\mathscr{A})$ 表示 $\mathscr{A}$ 中投影的全体,即 $P(\mathscr{A})=\{P\in A:P^2=P=P^*\}$. 若 $P,Q\in P(\mathscr{A})$ 且 $PQ=QP=0$,则称 P 与 Q 是相互正交的投影. 设 $\Phi:\mathscr{A}\to\mathscr{A}$ 是一个线性双射,用 $A\circ B=AB+BA$ 表示 A 与 B 的 Jordan 积,若对任意的 $A,B\in\mathscr{A}$,有 $\Phi(A\circ B)=\Phi(A)\circ\Phi(B)$,则称 Φ 是 $\mathscr{A}$ 上的一个 Jordan 同构;若对任意的 $A,B\in\mathscr{A}$ 和 $\lambda\in C$,有 $A+\lambda B\in P(\mathscr{A})\Leftrightarrow\Phi(A)+\lambda\Phi(B)\in P(\mathscr{A})$,则称 Φ 为 $\mathscr{A}$ 上双边保持算子组合投影性的映射.

假设 Φ 是从一个代数到另一个代数的线性映射,如果 Φ 保持了代数里面某些元素的某种特性,则称 Φ 是一个线性保持映射. 算子空间上的线性保持问题一直受到众多学者的长期关注,并已取得了许多成果. 如:文献[1]矩阵代数上保幂零;文献[2-5]保交换性;文献[6-7]保秩;文献[8-10]保幂等性;文献[11]保 Jodran 积;文献[12]保零积;在文献[13]给出了 $B(H)$ 上满射 Φ 双边保持算子组合投影性的充要条件. 受以上文献启示,本文证明了 $B(H)$ 中的 von Neumann 代数 $\mathscr{A}$ 上双边保持算子组合投影性的连续满射 Φ 是 $\mathscr{A}$ 上的一个 Jordan 同构.

2　主要结果及其证明

定理 1　设 A 是复 Hilbert 空间 H 上的一个 von Neumann 代数,$P(\mathscr{A})$ 表示 $\mathscr{A}$ 中投影的全体,Φ 是 $\mathscr{A}$ 上的一个连续满射,若对任意的 $A,B\in\mathscr{A}$ 和 $\lambda\in C$,满足

收稿日期:2016-05-29.
基金项目:国家自然科学基金(11471199)、陕西省自然科学基础研究计划资助项目(2014JQ1015).
通讯联系人:费秀海,博士生,研究方向:算子代数与算子理论. E-mail:xiuhaifei@snnu.edu.cn

$$A+\lambda B\in P(\mathscr{A})\Leftrightarrow\Phi(A)+\lambda\Phi(B)\in P(\mathscr{A}),\tag{1}$$

则 Φ 是 $\mathscr{A}$ 上的一个 Jordan 同构.

分以下几个步骤证明定理. 在证明过程中总假设 $\Phi:\mathscr{A}\to\mathscr{A}$ 是满足式(1)的连续满射.

步骤 1　$\Phi(0)=0$ 且 $\Phi(I)=I$.

证明　令 $A=B=0$ 和 $\lambda=1$ 并代入式(1),有 $2\Phi^2(0)=\Phi(0)$;再令 $A=0$ 和 $\lambda=0$ 并代入式(1),有 $\Phi^2(0)=\Phi(0)$,所以 $\Phi(0)=0$. 因为 Φ 是满射,从而存在 $X\in\mathscr{A}$ 使得 $\Phi(X)=I$,又因 $\Phi(I)$ 是一个投影,所以 $\Phi(X)-\Phi(I)$ 是投影,由式(1)可知 $X-I$ 也是投影,所以 $X=I$,从而 $\Phi(I)=I$.

步骤 2　Φ 是单射且 $\Phi(\lambda A)=\lambda\Phi(A)$, $\forall A\in\mathscr{A}$, $\forall\lambda\in C$.

证明　设 $A,B\in\mathscr{A}$ 使得 $\Phi(A)=\Phi(B)$,则 $\Phi(A)-\Phi(B)$ 和 $\Phi(B)-\Phi(A)$ 都是投影,从而 $A-B$ 和 $B-A$ 也都是投影,因此 $A=B$,所以 Φ 是单射. 对任意的 $A\in\mathscr{A}$ 与 $\lambda\in C$,设 $\Phi(X)=\lambda\Phi(A)$,则 $X-\lambda A$ 与 $\lambda A-X$ 都是投影,因此 $X=\lambda$,所以 $\Phi(\lambda A)=\lambda\Phi(A)$.

步骤 3　设 $P,Q\in P(\mathscr{A})$,如果 $P+Q=PQ+QP$,则 $P=Q$.

证明　若 $P,Q\in P(\mathscr{A})$ 且 $P+Q=PQ+QP$,则 $(P-Q)^2=P-PQ-QP+Q=0$,又因为 $P-Q$ 是自伴元,所以有 $P=Q$.

步骤 4　对任意的 $P,Q\in P(\mathscr{A})$, $\Phi(P)\perp\Phi(Q)\Leftrightarrow P\perp Q$.

证明　对任意的 $P,Q\in P(\mathscr{A})$,则

$$P\perp Q\Leftrightarrow P+Q\in P(\mathscr{A})\Leftrightarrow\Phi(P)+\Phi(Q)\in P(\mathscr{A})\Leftrightarrow\Phi(P)\perp\Phi(Q).$$

步骤 5　对任意的 $P,Q\in P(\mathscr{A})$,若 $P\perp Q$,则 $\Phi(P+Q)=\Phi(P)+\Phi(Q)$.

证明　设 $P,Q\in P(\mathscr{A})$ 且 $P\perp Q$,则由步骤 4 可知 $\Phi(P)+\Phi(Q)\in P(\mathscr{A})$,且由 Φ 的满射性,不妨设 $\Phi(P)+\Phi(Q)=\Phi(X)$,其中 $X\in P(\mathscr{A})$,则 $X-P,X-Q\in P(A)$,从而可得

$$PX+XP=2P,QX+XQ=2Q.$$

因此

$$PXP=P,QXQ=Q,PXQ=0,QXP=0.\tag{2}$$

又因为$(P+Q)^{\perp}\perp P$ 且$(P+Q)^{\perp}\perp Q$,则由步骤 4 可知 $\Phi((P+Q)^{\perp})$ 与 $\Phi(P)$ 和 $\Phi(Q)$ 正交,所以 $\Phi((P+Q)^{\perp})\perp(\Phi(P)+\Phi(Q))$,即 $\Phi((P+Q)^{\perp})\perp\Phi(X)$,因而再由步骤 4 可得$(P+Q)^{\perp}\perp X$. 从而

$$(P+Q)X(P+Q)^{\perp}=(P+Q)^{\perp}X(P+Q)=(P+Q)^{\perp}X(P+Q)^{\perp}=0.\tag{3}$$

所以由式(2)和式(3)可得 $P+Q=X$,因此 $\Phi(P+Q)=\Phi(P)+\Phi(Q)$.

步骤 6　对任意的 $P,Q\in P(\mathscr{A})$,若 $P\perp Q$,则 $\Phi(P-Q)=\Phi(P)-\Phi(Q)$.

证明　设$\frac{1}{2}(P+Q)-\frac{1}{2}(P-Q)=Q\in P(\mathscr{A})$,由于 Φ 是满射且 $\Phi(P)-\Phi(P-Q)\in P(\mathscr{A})$,从而可令 $\Phi(A)=\Phi(P)-\Phi(P-Q)$,其中 $A\in P(\mathscr{A})$,则有

$$\frac{1}{2}\Phi(P+Q)-\frac{1}{2}\Phi(P-Q)=\frac{1}{2}\Phi(P)+\frac{1}{2}\Phi(Q)+\frac{1}{2}\Phi(A)-\frac{1}{2}\Phi(P)=\frac{1}{2}\Phi(Q)+\frac{1}{2}\Phi(A)\in P(\mathscr{A}),$$

因此$\frac{1}{2}Q+\frac{1}{2}A\in P(\mathscr{A})$,所以 $Q+A=QA+AQ$,由步骤 3 可得 $Q=A$. 所以 $\Phi(P-Q)=\Phi(P)-\Phi(Q)$.

定理的证明　先证 Φ 是线性.

设 $\Omega_m=\left\{\sum_{i=1}^{m}\lambda_iP_i:\lambda_i\in C,P_i\in P(\mathscr{A}),P_i\perp P_j,\forall i\neq j\right\}$, $m\in\mathbf{N}^+$. 下面用数学归纳法证明对任意的正整数 m,有

$$\Phi\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_iP_i\right)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\Phi(P_i).\tag{4}$$

当 $m=1$ 时,则由步骤 2 得 $\Phi(\lambda_1P_1)=\lambda_1\Phi(P_1)$. 现假设当 $m=k$ 时式(4)成立,下证当 $m=k+1$ 时式(4)成立. 如果 $\lambda_1=0$,则由归纳假设知式(4)成立. 如果 $\lambda_1\neq0$,则不失一般性,令 $\lambda_1=1$,此时如果 $\lambda_{k+1}=0$,式(4)自然成立,所以设 $\lambda_{k+1}\neq0$. 现令

$$\Phi\left(P_1+\sum_{i=2}^{k+1}\lambda_iP_i\right)-\Phi\left(\sum_{i=2}^{k+1}\lambda_iP_i\right)=\Phi(A),\tag{5}$$

和

$$\frac{1}{\lambda_{k+1}}\Phi\left(P_1 + \sum_{i=2}^{k+1}\lambda_i P_i\right) - \frac{1}{\lambda_{k+1}}\Phi\left(P_1 + \sum_{i=2}^{k}\lambda_i P_i\right) = \Phi(B), \tag{6}$$

则 $\Phi(A), \Phi(B) \in P(\mathscr{A})$,所以 $A, B \in P(\mathscr{A})$. 由式(5)和式(6)可得

$$\Phi(A) - \Phi(P_1) = \lambda_{k+1}(\Phi(B) - \Phi(P_{k+1})), \tag{7}$$

且由式(6)可得

$$\Phi\left(P_1 + \sum_{i=2}^{k+1}\lambda_i P_i\right) - \Phi(P_1) - \sum_{i=2}^{k}\Phi(\lambda_i P_i) = \lambda_{k+1}\Phi(B).$$

从而

$$\Phi\left(P_1 + \sum_{i=2}^{k+1}\lambda_i P_i\right) - \Phi\left(\sum_{i=2}^{k}\lambda_i P_i + \lambda_{k+1}B\right) = \Phi(P_1) \in P(\mathscr{A}),$$

所以

$$P_1 + \lambda_{k+1}P_{k+1} - \lambda_{k+1}B \in P(\mathscr{A}).$$

因此,由式(7)可得

$$\Phi(P_1) + \lambda_{k+1}\Phi(P_{k+1}) - \lambda_{k+1}\Phi(B) = \Phi(P_1) + \Phi(P_1) - \Phi(A) \in P(\mathscr{A}),$$

从而

$$\Phi(P_1) + \Phi(A) = \Phi(P_1)\Phi(A) + \Phi(A)\Phi(P_1).$$

由步骤 3 得 $\Phi(P_1) = \Phi(A)$,又由于 Φ 是单射,所以 $P_1 = A$,进而由式(5)可得

$$\Phi\left(P_1 + \sum_{i=2}^{k+1}\lambda_i P_i\right) = \Phi(P_1) + \Phi\left(\sum_{i=2}^{k+1}\lambda_i P_i\right).$$

因此由数学归纳法可得对任意的 $m \in \mathbf{N}^+$,式(4)总成立,进而由谱分解定理知两两彼此正交的投影的线性张在 $\mathscr{A}$ 中稠密,又因为 Φ 是连续,所以 Φ 在 $\mathscr{A}$ 上是线性映射.

再证 Φ 在 $\mathscr{A}$ 上保 Jordan 积.

对任意的自伴算子 $T \in \mathscr{A}$,则 $T = \lim\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i P_i\right)$, $(P_i \perp P_j, i \neq j)$,由于 Φ 是线性和连续的,从而由步骤 4 有

$$\Phi(T^2) = \lim\Phi\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^2 P_i\right) = \lim\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^2\Phi(P_i) = \lim\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\Phi(P_i)\right)^2 = \left(\lim\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\Phi(P_i)\right)^2 = \Phi^2(T),$$

进而 Φ 在 $\mathscr{A}$ 上对自伴算子保 Jordan 积.

又因为对任意的 $A, B \in \mathscr{A}$,则可将其分解为 $A = A_1 + iA_2$, $B = B_1 + iB_2$,其中 A_1, A_2, B_1, B_2 是 $\mathscr{A}$ 中的自伴算子,从而可得

$$\Phi(A \circ B) = \Phi(A_1 \circ B_1) + i\Phi(A_1 \circ B_2) + i\Phi(A_2 \circ B_1) - \Phi(A_2 \circ B_2) = \Phi(A) \circ \Phi(B).$$

因此 Φ 在 $\mathscr{A}$ 上是线性双射且保 Jordan 积,所以 Φ 是 $\mathscr{A}$ 上的 Jordan 同构.

证毕.

[参考文献]

[1] BOTTA P, PIERCE S, WATKINS W. Linear transformations that preserve the nilpotent matrices[J]. Pacfic J Math, 1983, 104:39-46.

[2] BENKOVIC D. Commuting traces and commutativity preserving maps on triangular algebras[J]. J Algebra, 2004, 280(2): 797-824.

[3] FOSNER A. Commutativity preserving maps on Mn(R)[J]. Glasnik mathematicki, 2009, 44:127-140.

[4] 焦美艳. Von Neumann 代数套子代数上保因子交换性的线性映射[J]. 数学学报(中文版), 2014, 57(2):409-416.

[5] OMLADIC M J. On operators preserving commutativity[J]. J Funct Anal, 1986, 66(1):105-122.

[6] LIM M H. Rank and tensor rank preservers[J]. Linear and multilinear algebra, 1992, 33(1):7-21.

(下转第 13 页)

[2] KIRBY S,GEIST E L,LEE W H K,et al. Tsunami Source Characterization for Western Pacific Subduction Zones:A preliminary report[R]. 2006,http://walrus. wr.usgs.gov/tsunami/work-shop/.

[3] 叶琳,于福江,吴玮. 我国海啸灾害及预警现状与建议[J]. 海洋预报,2005,22(增刊):147-157.

[4] LIU P L F, WANG X, ANDREW J S. Tsunami hazard and forecast study in south china sea[J]. Journal of Aaian earth sciences,2009,36:2-12.

[5] FIELD E, DAWSON T, FELZER K, et al. Uniform California Earthquake Rupture Forecast, Version 2 (UCERF 2)[J]. Bulletin of the seismological society of America,2009,99(4):2 053-2 107.

[6] LIU P L F,WOO S B,CHO Y S. Computer programs for tsunami propagation and inundation[R]. 1998,http://ceeserver.cee.cornell.edu/pllgroup/comcot.htm.

[7] WANG X,LIU P L F. A numerical investigation of Boumerdes—Zem-mouri(Algeria)earthquake and tsunami[J]. Computer modeling in engineering&science,2007,10(6):171-183.

[8] BRUNE J N. Seismic moment, Seismicity, and Rate of Slip along Major Fault Zones[J]. Journal of geophysical research, 1968,73(2):777-784.

[9] HANKS T C. Kanamori H. A moment-magnitude moment scale[J]. J Geophys Res,1979,84:2 348-2 350.

[10] NAKAMURA S. On Statistical Tsunami Risk of the Philippines[J]. South East Asian studies,1978,15(4):581-590.

[11] DUONG N A,KIMATA F,MEILANO I,et al. Assessment of Bathymetry Effects on Tsunami Propagation in Viet Nam[J]. Advances in natural science,2009,10(4):457-468.

[12] ACHARYA H K,吴振寰. 菲律宾断层的地震滑动及其构造意义[J]. 地震地质译丛,1981(3):16-18.

[13] HECK N H. List of seismic sea waves[J]. Bull Seism Soc Am,1947,4:269-279.

[14] BAUTISTA B C,BAUTISTA M L P,OLIKE K,et al. A new insight on the geometry of subducting slabs in northern Luzon, Philippines[J]. Tectonophysics,2001,339:279-310.

[责任编辑:陆炳新]

(上接第 7 页)

[7] WEI S,HOU S. Rank preserving linear maps on nest algebra[J]. J Operator Theory,1998,39:207-217.

[8] DOLINAR G. Maps on B(H)preserving idempotents[J]. Linear and multilinear algebra,2004,52(5):335-347.

[9] CUIJ L,HOU J C. Linear maps preserving idempotence on nest algebras[J]. 数学学报(英文版),2004,20(5):807-820.

[10] DOLINAR G. Maps on matrix algebras preserving idempotents[J]. Linear Algebra Appl,2003,371:287-300.

[11] 张晓慧,张建华. 套代数上 Jordan 同构的刻画[J]. 数学学报(中文版),2013,56(4):553-560.

[12] ZHANG J H,YANG A L. Linear maps preserving zero products on nest subalgebras of von Neumann algebras[J]. Linear Algebra Appl,2006,412(2):348-361.

[13] 李小梅,张建华. B(H)上保投影的映射[J]. 数学进展,2014,43(3):425-428.

[责任编辑:陆炳新]