doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2017.01.001

数值求解二维 Sine-Gordon 方程的 C^0P_1 时间递进方法

盛华山

(上海交通大学数学科学学院,上海 200240)

[摘要] 提出了基于局部线性化的连续分片线性(以下简称 C^0P_1)时间递进方法[1]求解二维 sine-Gordon 方程的数值方法. 首先在时间方向采用连续分片线性有限元离散,通过对 sine-Gordon 方程中各项分别采用显式或隐式线性化插值,导出时间半离散格式. 再在空间方向利用有限元方法[2]离散得到全离散格式. 若干数值试验证明了该方法的有效性.

[关键词] 时间递进方法,sine-Gordon 方程,线性化插值,全离散格式

[中图分类号]O24 [文献标志码]A [文章编号]1001-4616(2017)01-0001-05

A C^0P_1 Time Stepping Method for Solving 2D Sine-Gordon Equations

Sheng Huashan

(School of Mathematical Sciences,Shanghai Jiao Tong University,Shanghai 200240,China)

Abstract:This paper proposes a continuous piecewise linear(called C^0P_1 for short) time stepping method[1] combined with local linearization for solving 2D sine-Gordon equations. First of all, the sine-Gordon equations are discretized in time direction by a linear continuous Galerkin method combined with the explicit or implicit local linearization, leading to a semi-discrete scheme. Furthermore, a full-discrete scheme is obtained by spatial discretization with the finite element method[2]. Several numerical experiments are given to perform the effectiveness of the method.

Key words:time stepping method, sine-Gordon equations, linear interpolation, full-discrete scheme

sine-Gordon 方程是一类典型的非线性双曲型偏微分方程,广泛应用在物理学及工程问题中. 它最初是由 Edmond Bour[3]在研究常负曲率曲面的过程中提出,随后该方程又因其可用于描述孤立子解而备受瞩目. 对于该方程,有 Lamb 方法[4],tanh 方法[5]等分析或者给出其理论解析解;另一方面,数值求解 sine-Gordon 方程的离散格式也不断被提出,其中包括 Christiansen 和 Lomdahl 提出的基于广义蛙跳格式[6]得到的方法,郭本瑜等提出的新型差分方法[7],以及近年来受广泛关注的无网格(meshless)方法[8-9]等.

我们考虑二维情形的齐次或非齐次瞬态非线性 sine-Gordon 方程初边值问题:给定最终求解时刻 $T>0$,求 $u(\boldsymbol{x},t)$满足

$$\begin{cases} u_{tt}(\boldsymbol{x},t)-\Delta u(\boldsymbol{x},t)+\sin(u(\boldsymbol{x},t))=f(\boldsymbol{x},t), & \boldsymbol{x} \text{ in } \Omega, 0<t<T,\\ \nabla \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}=0, & \boldsymbol{x} \text{ on } \partial\Omega, 0<t<T,\\ u(\boldsymbol{x},0)=u_0, & \boldsymbol{x} \text{ in } \Omega,\\ u_t(\boldsymbol{x},0)=v_0, & \boldsymbol{x} \text{ in } \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

式中,Ω 为二维求解区域,$\boldsymbol{n}$ 为区域边界的单位外法方向,f 为外源项,u_0,v_0 为初始值. 在方程(1)中我们给出了 Neumann 边界条件,对于其他边界条件可类似处理.

收稿日期:2016-09-18.

基金项目:国家自然科学基金面上项目(11571237).

通讯联系人:盛华山,博士生,研究方向:科学计算. E-mail:shs3701001@sjtu.edu.cn

在本文中,我们将在时间方向使用基于半隐插值线性化的 C^0P_1 时间递进方法,以及空间方向使用 P_1 协调元离散,进而构造出 sine-Gordon 方程的时空全离散求解格式并进行数值模拟.

1 C^0P_1 时间递进方法及插值线性化

为简化记号,我们先考虑如下一般情形的抽象非线性二阶发展方程:给定最终求解时刻 $T>0$,求 u:$[0,T]\to V$,满足

$$\begin{cases} u''(t)+F(t,u(t))=0,0<t<T, \\ u(0)=u_0, \\ u'(0)=v_0, \end{cases} \tag{2}$$

式中,$(\cdot)'$和$(\cdot)''$分别表示时间方向的一阶和二阶导数,V 为一 Hilbert 空间,而映射 F:$[0,T]\times V\to V$ 为一非线性算子. 下文始终假设问题(2)之解存在唯一.

使用标准的 C^0P_1 时间递进方法[1]对问题(2)实施时间方向半离散. 首先将求解时间区间 $I:=(0,T)$ 进行子区间剖分,相应的节点为

$$0=t_0<t_1<\cdots<t_N=T,$$

而得子区间 $J_n=(t_{n-1},t_n]$(记 $k_n=t_n-t_{n-1}$),$1\leqslant n\leqslant N$. 定义如下函数空间

$$v_1=\{v:\bar{I}\to V;v\in C(\bar{I}),v|_{J_n}(t)=\sum_{j=0}^{1}t^j w_j,w_j\in V,1\leqslant n\leqslant N\},$$

并记 $V_1(J_n)$为空间 V_1 限制在第 n 个子区间 J_n 上所得空间. 抽象方程(2)的 C^0P_1 时间递进方法给定如下:求 $U\in V_1$,使得

$$\begin{cases} \int_{J_n}(\langle U'',w'\rangle+\langle F(t,U),w'\rangle)\mathrm{d}t+\langle \dot{U}_+^{n-1}-\dot{U}_-^{n-1},\dot{w}_+^{n-1}\rangle=0, \\ U^0=u_0,\dot{U}_+^0=v_0,\forall w\in V_1(J_n),1\leqslant n\leqslant N, \end{cases} \tag{3}$$

式中,内积为 L^2 空间的标准内积:$<a,b>:=\int_\Omega ab\mathrm{d}\Omega,\forall a,b\in L^2(\Omega)$,并记

$$w^{n-1}:=w(t_{n-1}),\dot{w}_\pm^{n-1}:=\lim_{s\to 0^+}w'(t_{n-1}\pm s).$$

由数值解所在空间 $U\in V_1$ 的假设条件,$U|_{J_n}$可由子区间左端时刻函数值 U^{n-1},以及右端导数值 $\dot{U}_-^n$唯一确定,即对任意 $t\in J_n$

$$\begin{cases} U(t)=U^{n-1}+(t-t_{n-1})\dot{U}_-^n, \\ U'(t)=\dot{U}_-^n. \end{cases} \tag{4}$$

注意到(3)中非线性项 $F(t,U)$在时间方向通常无法积分求出显式表达式.

下面我们将采用时间方向插值线性化的 $\mathscr{I}_E F(t,U(t))$或 $\mathscr{I}_I F(t,U(t))$代替(3)中非线性项. 其中局部线性化算子 $\mathscr{I}_E$ 和 $\mathscr{I}_I$ 分别使用左端和右端的导数值再加左端的函数值插值为关于时间 t 的线性函数,其示意图如图 1.

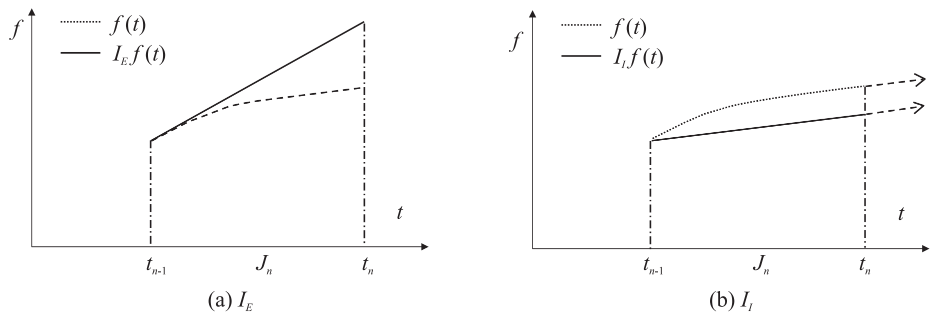

图 1　局部插值线性化(显式和隐式)示意图

Fig. 1　Diagrams of the local interpolation(explicit and implicit)

注意到非线性项 $F(t,U(t))$ 在时间节点处并不连续,因此不妨在每个区间 J_n 可简记

$$F_+^{n-1}=F(t_{n-1},U^{n-1},\dot{U}_+^{n-1})=F(t_{n-1},U^{n-1},\dot{U}_-^{n}). \tag{5}$$

使用链式法则得到非线性项关于 t 的全导数在区间 J_n 上 t_n 处的左极限和 t_{n-1} 处的右极限:

$$\dot{F}_-^n=\frac{\partial F}{\partial t}\bigg|_{t_-^n}+\frac{\partial F}{\partial U}\bigg|_{t_-^n}\dot{U}_-^n,\ \dot{F}_+^{n-1}=\frac{\partial F}{\partial t}\bigg|_{t^{n-1}+}+\frac{\partial F}{\partial U}\bigg|_{t^{n-1}+}\dot{U}_-^n. \tag{6}$$

由算子 $\mathscr{T}_E$ 和 $\mathscr{T}_I$ 的定义,在区间 J_n 上对 $F(t,U(t))$ 项有如下显式和隐式插值线性化结果:

$$\mathscr{T}_E F(t,U(t))=F_+^{n-1}+(t-t_{n-1})\dot{F}_+^{n-1},\ \mathscr{T}_I F(t,U(t))=F_+^{n-1}+(t-t_{n-1})\dot{F}_-^{n}. \tag{7}$$

将上述线性化结果代入到时间递进方法(3)中,则可将该式中时间方向积分直接求出.

2 Sine-Gordon 方程的离散

我们将 sine-Gordon 方程(1)与一般形式的抽象问题(2)对比,不难得知

$$F(t,u)=-\Delta u+\sin(u)-f(t),$$

相应的 Hilbert 空间为 $V=H^1(\Omega)$. 根据图 1 中两种线性化方法的特点,不妨将 F 分裂为:

$$F(t,u)=F_E(t,u)+F_I(t,u),\text{其中 } F_E(t,u)=\sin(u),F_I(t,u)=-\Delta u-f(t).$$

在 C^0P_1 时间递进方法(2)的每个求解区间 $J_n(1\leqslant n\leqslant N)$ 中,对 F 项采用如下半隐插值:

$$F(t,U)\approx\mathscr{T}_E F_E(t,U)+\mathscr{T}_I F_I(t,U). \tag{8}$$

此外,结合式 F 的表达式显然有

$$\frac{\partial}{\partial t}F_E(t,U)=0,\ \frac{\partial}{\partial U}F_E(t,U)=\cos(U),\ \frac{\partial}{\partial t}F_I(t,U)=-f'(t),\ \frac{\partial}{\partial U}F_I(t,U)=-\Delta, \tag{9}$$

联合式(4)-(7),以及(8),(9)并代入 C^0P_1 时间递进方法求解式(3),同时对时间方向积分,得到求解 sine-Gordon 方程的如下时间半离散格式:找 $\{\dot{U}_-^n\}_1^N\in H^1(\Omega)$,使得

$$\begin{cases}\left\langle\left(I+\frac{1}{2}k_n^2\cos(U^{n-1})\right)\dot{U}_-^n,v\right\rangle+\left\langle\frac{1}{2}k_n^2\nabla\dot{U}_-^n,\nabla v\right\rangle=\\ \qquad\langle\dot{U}_-^{n-1}-k_n\sin(U^{n-1}),v\rangle-\langle k_n\nabla U^{n-1},\nabla v\rangle+\left\langle k_nf(t_{n-1})+\frac{1}{2}k_n^2f'(t_n),v\right\rangle,\\ U^0=u_0,\dot{U}_-^0=v_0,\qquad\qquad\forall v\in H^1(\Omega),1\leqslant n\leqslant N.\end{cases} \tag{10}$$

假设已经求得区间 J_{n-1} 上的数值解 $U(t)$,即此时已知 U^{n-1} 和 $\dot{U}_-^{n-1}$,则利用变分方程(10)在下个区间 J_n 上可计算得 $\dot{U}_-^n$,再利用性质(4)即可得到整个区间上的 $U(t)$. 在每个时间区间上依次递进下去,便可得到所有区间上的数值解 $U(t)$.

实际上半离散方程(10)在每个时间步内为线性的偏微分方程. 进一步,为了得到可计算的全离散格式,我们还需要对(10)在空间方向上离散. 假设 T_h 为求解区域 Ω 的一组三角网格剖分,并且在 T_h 上定义 P_1 协调有限元空间

$$V_h:=\{v\mid v\in C(\Omega),v|_K\in P_1(K),\forall K\in T_h\},$$

式中,$P_1(K)$ 为限制在单元 K 上不超过 1 次的多项式空间. 紧接着考虑在 $H^1(\Omega)$ 的子空间 V_h 上求解方程(10),假设 $\varphi_i(x)$,$i=1,\cdots N_p$ 为网格 T_h 对应有限元空间 V_h 的一组基函数,N_p 为有限元空间的自由度. 在这组基函数的表示下,有限元空间上变分方程(10)可以描述为如下矩阵形式:

$$\left(\boldsymbol{M}+\frac{1}{2}k_n^2(\boldsymbol{K}+\boldsymbol{E}^{n-1})\right)\dot{\boldsymbol{U}}_-^n=\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{U}}_-^{n-1}-k_n(\boldsymbol{M}\sin(\boldsymbol{U}^{n-1})-\boldsymbol{K}\boldsymbol{U}^{n-1})+k_n\boldsymbol{F}_1^n+\frac{1}{2}k_n^2\boldsymbol{F}_2^n, \tag{11}$$

式中,质量矩阵 $\boldsymbol{M}$,刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$,区间 J_n 上的右端载荷向量 $\boldsymbol{F}_1^n$ 以及 $\boldsymbol{F}_2^n$ 的定义为:

$$[\boldsymbol{M}]_{ij}=\langle\varphi_j,\varphi_i\rangle=\int_\Omega\varphi_j\varphi_i\mathrm{d}\Omega,\ [\boldsymbol{K}]_{ij}=\langle\nabla\varphi_j,\nabla\varphi_i\rangle=\int_\Omega\nabla\varphi_j\cdot\nabla\varphi_i\mathrm{d}\Omega,$$

$$\{\boldsymbol{F}_1^n\}_i=\langle f(t_{n-1}),\varphi_i\rangle=\int_\Omega f(t_{n-1})\varphi_i\mathrm{d}\Omega,\ \{\boldsymbol{F}_2^n\}_i=\langle f'(t_n),\varphi_i\rangle=\int_\Omega f'(t_n)\varphi_i\mathrm{d}\Omega,$$

以及式中 $\boldsymbol{E}^{n-1}:=\boldsymbol{M}\mathrm{diag}(\cos(\boldsymbol{U}^{n-1}))$. 此外初始条件 u_0,v_0 也可以得到对应于网格 T_h 的向量表示:$\boldsymbol{U}^0$ 以及 $\dot{\boldsymbol{U}}_-^0$. 事实上求解式(11)即为 C^0P_1 时间递进方法求解二维 sine-Gordon 方程的时空全离散计算格式.

我们将上述全离散求解的过程整理为算法 1.

算法 1　sine-Gordon 方程的全离散 C^0P_1 时间递进方法

初始化:给定 u_0,v_0 及其对应网格 T_h 对应的向量表达,给定时间剖分 $\{k_n\}$,置 $n=1$;

while　$n<N$

　step 1:结合已有 $\boldsymbol{U}^{n-1}$,$\dot{\boldsymbol{U}}_-^{n-1}$ 以及全离散格式(11)求得 $\dot{\boldsymbol{U}}_-^n$

　step 2:结合(4)得到区间 J_n 上的解 $\boldsymbol{U}(t)$,以及 $\boldsymbol{U}^n$

　step 3:置 $n=n+1$,转 while 判定

end while

3　数值实验

在这一节中,我们首先通过构造一个已知真解的非齐次二维 sine-Gordon 方程算例来验证本文算法的收敛性. 假设取定二维 sine-Gordon 方程(1)中求解区域 $\Omega=(0,1)\times(0,1)$,求解时间 $T=1$ 以及给定右端 $f(x,t)$ 使得该方程的真解为 $u(x,t)=\sin(\pi x)\sin(\pi y)\sin(\pi t)$,此外初始条件 u_0,v_0,以及相应的 Neumann 边界条件均可由真解得到. 将求解区域划分为一致的三角网格,尺寸为 h. 该算例中我们将时间剖分步长取为和空间步长相等即 $k_n=h$. 在不同的步长下,我们使用算法 1 求得该问题的数值解. 为对比数值解的逼近程度,我们定义如下时空范数:

$$\| e \|_{L^\infty(0,T)}:=\operatorname*{esssup}_{0\leqslant t\leqslant T}\| e \|:=\operatorname*{esssup}_{0\leqslant t\leqslant T}\left(\int_\Omega |e|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

计算结果以及相应的误差在表 1 中给出.

表 1　误差 $E:=\|u(t)-U(t)\|_{L^\infty(0,T)}$ 以及 $Ed:=\|u'(t)-\dot{U}(t)\|_{L^\infty(0,T)}$

Table 1　Errors $E:=\|u(t)-U(t)\|_{L^\infty(0,T)}$ and $Ed:=\|u'(t)-\dot{U}(t)\|_{L^\infty(0,T)}$

Mesh $h=k_n$	1/20	1/30	1/40	1/50	1/60	1/70
E	2.681e-02	1.711 e-02	1.292 e-02	1.064 e-02	9.035 e-03	7.849 e-03
Order	—	1.107 20	0.976 02	0.871 86	0.896 40	0.913 02
Ed	1.993e-01	1.366 e-01	1.038 e-01	8.374 e-02	7.019 e-02	6.042 e-02
Order	—	0.932 29	0.952 99	0.963 96	0.968 48	0.972 57

由表 1 可以看出,求解 sine-Gordon 方程 C^0P_1 时间递进方法的全离散格式(算法 1),其函数和导数的收敛阶均为 1 阶.

接下来我们考虑二维齐次 Neumann 边界 sine-Gordon 方程的环形孤立子[8]传播. 假设求解时间范围 $T=7$,以及求解区域 $\Omega=(-30,-10)\times(-30,-10)$. 此外假设初值

$$u_0(\boldsymbol{x})=4\arctan\exp[(4-\sqrt{(x+3)^2+(y+3)^2})/0.436],$$

$$v_0(\boldsymbol{x})=4.13\ \mathrm{sech}[(4-\sqrt{(x+3)^2+(y+3)^2})/0.436].$$

空间方向采用 $h=20/64$ 的一致三角网格,时间方向采用步长 $k_n=10^{-2}$ 的均匀剖分. 然后使用 C^0P_1 时间递进方法(算法 1)求解,并利用对称性给出整个对称区间的逼近解. 我们在图 2 中给出 $t=2,3,4,5,7$ 时刻的数值解.

从图 2 中可以看出,初始时刻 $\sin(\boldsymbol{U}/2)$ 表现为 4 个相互独立的环形孤立子,随着时间演化,$t>3$ 之后环形逐渐相交,同时圆环的半径也不断增大,$t>5$ 之后圆环相互碰撞融合,直到 $t=7$ 演化为较大的环形并向外传播. 数值结果很好地模拟了 sine-Gordon 方程孤立子的传播性质,并且与文献[8]中的模拟结果一致.

致谢:对导师黄建国教授对本工作的指导表示衷心感谢.

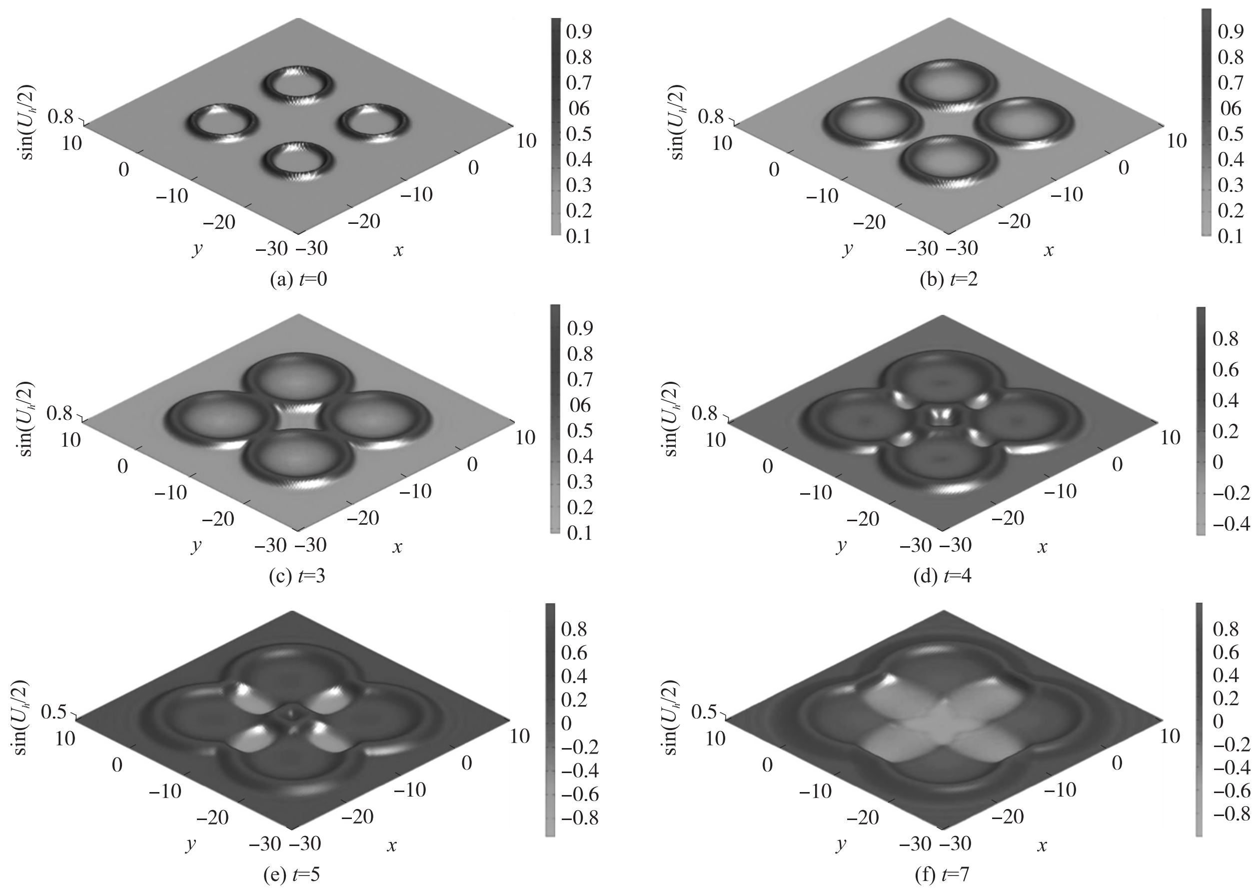

图 2　C^0P_1 时间递进方法所得 sin($U/2$) 以模拟 4 环形孤立子在不同时刻碰撞及演化

Fig. 2　Numerical solution sin($U/2$) by C^0P_1 time stepping method for circular ring solitons

［参考文献］

[1] LAI J,HUANG J. An adaptive linear time stepping algorithm for second-order linear evolution problems[J]. Int J Numer Anal Mod,2015(12):230-253.

[2] BRENNER S,SCOTT L R. The mathematical theory of finite element methods[M]. 3rd. New York:Springer,2008.

[3] BOUR E. Theorie de la deformation des surfaces[J]. J ecole imperiale polytechnique,1862,19:1-48.

[4] ZAGRODZINSKY J. Particular solutions of the sine-Gordon equation in 2+1 dimensions[J]. Phys Lett A,1979,72:284-286.

[5] WAZWAZ A M. Exact solutions for the generalized sine-Gordon and the generalized sinh-Gordon equations[J]. Chaos solitons fractals,2006,28:127-135.

[6] CHRISTIANSEN P,LOMDAHL P. Numerical study of 2+1 dimensional sine-Gordon solitons[J]. Physica D,1981(2):482-494.

[7] GUO B,PASCUAL P,RODRIGUEZ M,et al. Numerical solution of the sine-Gordon equation[J]. Appl Math Comput,1986,18:1-14.

[8] MIRZAEI D,DEHGHAN M. Meshless local Petrov-Galerkin(MLPG) approximation to the two dimensional sine-Gordon equation[J]. J Comput Appl Math,2010,233:2 737-2 754.

[9] Dehghan M,Abbaszadeh M,Mohebbi A. An implicit RBF meshless approach for solving the time fractional nonlinear sine-Gordon and Klein-Gordon equations[J]. Eng Anal Bound Elem,2015,50:412-434.

［责任编辑:陆炳新］