doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2017.03.003

2×3 格子区组填充和覆盖

王成敏[1],王荣荣[2]

(1.泰州学院数理学院,江苏 泰州 225300)
(2.江南大学理学院,江苏 无锡 214122)

[**摘要**] 一个 $r\times c$ 格子区组填充(或覆盖),是一个二元组(X,A),其中 X 为 K_v 的顶点集,A 是 K_v 的一簇与 $K_r\times K_c$ 同构的子图(称为格子区组),满足 K_v 中每一条边至多(或至少)出现在某个子图中一次. 本文研究 2×3 格子区组填充和覆盖的存在性. 一方面,本文解决了最大 2×3 格子区组填充的两个可能例外,从而完全确立了最大 2×3 格子区组填充的存在性;另一方面,本文基本解决了最小 2×3 格子区组覆盖的存在性.

[**关键词**] 完全图,格子区组填充,格子区组覆盖
[**中图分类号**]O157.2 [**文献标志码**]A [**文章编号**]1001-4616(2017)03-0013-08

2×3 Grid-Block Packings and Coverings

Wang Chengmin[1],Wang Rongrong[2]

(1.School of Science,Taizhou University,Taizhou 225300,China)
(2.School of Science,Jiangnan University,Wuxi 214122,China)

Abstract:A $r\times c$ grid-block packing(or covering),is a pair(X,A),where X is the vertice set of K_v,A is a set of subgraphs which are isomorphism to $K_r\times K_c$(called grid-blocks),satisfying each edge of K_v occurs at most(or at least)once in certain subgraph. In this paper,the existence of 2×3 grid-block packing and covering is considered. We first completely determined the existence of maximum 2×3 grid-block packing by removing two possible exceptions. Then we almost completely determined the existence of minimum 2×3 grid-block covering with three possible exceptions.

Key words:complete graph,grid-block packing,grid-block covering

本文中,用 K_v 表示一个有 v 个顶点的完全图. 设 R 和 C 分别为完全图 K_r 和 K_c 的顶点集. 两个图 K_r 和 K_c 的卡氏积表示一个图,记为 $K_r\times K_c$,满足:(1)顶点集为 $R\times C$;(2)任意两个不同的顶点(a_1,b_1)和(a_2,b_2)相邻当且仅当 $a_1=a_2$ 或者 $b_1=b_2$. 用设计理论的语言,图 $K_r\times K_c$ 也称作 $r\times c$ 格子区组[1-2]. 这里涉及到的图论术语可参见文献[3-4]等.

图 H 的一个填充(或覆盖)为二元组(X,A)满足:(1)X 为 H 的顶点集;(2)A 是 H 的一簇子图,满足 H 中每一条边至多(或至少)出现在某个子图中一次. 进一步地,如果 A 中的每个子图均同构于图 G,则称该填充(或覆盖)为 H 的 G-填充(或 G-覆盖).

一个完全图 K_v 的 $K_r\times K_c$-填充(或 $K_r\times K_c$-覆盖),也称为 $r\times c$ 格子区组填充(或覆盖),记作 $\mathrm{GP}(v;K_r\times K_c)$(或 $\mathrm{GC}(v;K_r\times K_c)$). 设 A 是 $\mathrm{GP}(v;K_r\times K_c)$(或 $\mathrm{GC}(v;K_r\times K_c)$)的区组集,$e=(x;y)$是 K_v 的任意一条边,$m(e)$是在 A 中包含边 e 的个数,则重复度为 $1-m(e)$(或 $m(e)-1$)的所有边 e 张成的多重图称为 $\mathrm{GP}(v;K_r\times K_c)$(或 $\mathrm{GC}(v;K_r\times K_c)$)的边剩余(或边多余).

设图 G 为图 H 的子图. 如果在图 H 的一个 G-填充(或 G-覆盖)中,H 中每一条边恰恰出现在某个子图中一次,即边剩余(或边多余)为空集,则称该填充(或覆盖)为 H 的一个 G-分解. 一个完全图 K_v 的 $K_r\times K_c$-分解也称为 $r\times c$ 格子区组设计,记作 $\mathrm{GD}(v;K_r\times K_c)$.

对于一个 $\mathrm{GP}(v;K_r\times K_c)$(或 $\mathrm{GC}(v;K_r\times K_c)$),若没有其他 $\mathrm{GP}(v;K_r\times K_c)$(或 $\mathrm{GC}(v;K_r\times K_c)$)包含有更多

收稿日期:2017-01-16.
基金项目:国家自然科学基金(11471144)、江苏省自然科学基金(BK20171318).
通讯联系人:王成敏,博士,副教授,研究方向:组合设计理论及应用. E-mail:wcm@jiangnan.edu.cn

(或更少)的格子区组,则称这个 GP($v;K_r\times K_c$)(或 GC($v;K_r\times K_c$))是最大(或最小)的,记作 MGP($v;K_r\times K_c$)(或 MGC($v;K_r\times K_c$)). 在一个 MGP($v;K_r\times K_c$)(或 MGC($v;K_r\times K_c$))中,格子区组的个数称作填充数(或覆盖数),记作 PN($v;K_r\times K_c$)(或 CN($v;K_r\times K_c$)).

格子区组设计最早由 Fu H L 和 Hwang F K 引入. 文献[5-6]等讨论了格子区组设计在基因分组测试中的重要应用. 从那以后,格子区组设计的存在性及相关问题吸引了诸多学者的研究兴趣,国内外诸多学者对该问题进行了广泛研究(见[1-2,7-10]等).

引理 1[7]　若 GD($v;K_r\times K_c$)存在,则有 $v-1\equiv0(\bmod\ r+c-2)$ 且 $v(v-1)\equiv0(\bmod\ rc(r+c-2))$.

当 $r=2,c=3$ 时,有

引理 2[7]　若 GD($v;K_2\times K_3$)存在,则有 $v\equiv1(\bmod\ 9)$.

文献[7]证明了这个必要条件也是充分条件,即

引理 3[7]　GD($v;K_2\times K_3$)存在的充分必要条件是 $v\equiv1(\bmod\ 9)$.

然而,当 $v\not\equiv1(\bmod\ 9)$,由引理 2 知 GD($v;K_2\times K_3$)不可能存在. 自然地,需要考虑相应的填充和覆盖问题. 除了两个可能的例外,文献[9]基本确立了 2×3 格子区组填充的存在性. 本文研究 2×3 格子区组覆盖的存在性.

$$记\ U(v;K_2\times K_3)=\begin{cases}\lfloor\frac{v}{6}\lfloor\frac{v-1}{3}\rfloor\rfloor, & v\not\equiv7(\bmod\ 9)\\ \lfloor\frac{v}{6}\lfloor\frac{v-1}{3}\rfloor\rfloor-1, & v\equiv7(\bmod\ 9)\end{cases},\quad L(v;K_2\times K_3)=\lceil\frac{v}{6}\lceil\frac{v-1}{3}\rceil\rceil.$$

不难证明,一个 MGP($v;K_2\times K_3$)至多包含 $U(v;K_2\times K_3)$个格子区组,文献[10]基本解决了 MGP($v;K_2\times K_3$)的存在性.

引理 4[10]　对于任意正整数 $v\geqslant6$ 且 $v\notin\{32,35\}$,一个 MGP($v;K_2\times K_3$)存在,其包含 $U(v;K_2\times K_3)$个区组.

本文解决引理 4 中剩下的两个例外,证明了如下结论.

定理 1　对于任意正整数 $v\geqslant6$,一个 MGP($v;K_2\times K_3$)存在.

本文进一步研究了 MGC($v;K_2\times K_3$)的存在性.

引理 5　对于任意 $v\geqslant1$,有 CN($v;K_2\times K_3$)$\geqslant L(v;K_2\times K_3)$.

证明　设(X,Aa)为一个 MGC($v;K_2\times K_3$). 根据格子区组覆盖的定义知,任意一点 $x\in X$,x 至少出现在 $\lceil\frac{v-1}{3}\rceil$ 个格子区组中,从而 v 个点至少出现在 $v\lceil\frac{v-1}{3}\rceil$ 个格子区组中. 然而,每个格子区组包含 6 个点,因此,

$$\mathrm{CN}(v;K_2\times K_3)\geqslant L(v;K_2\times K_3)=\lceil\frac{v}{6}\lceil\frac{v-1}{3}\rceil\rceil.$$

在下文中,我们将构造 MGC($v;K_2\times K_3$),其均包含 $L(v;K_2\times K_3)$个格子区组. 本文将基本确立 MGC($v;K_2\times K_3$)的存在性.

定理 2　对于任意正整数 $v\geqslant3$ 且 $v\notin\{34,43,52\}$,一个 MGC($v;K_2\times K_3$)存在.

1　预备知识

下面给出设计理论中一些基本概念,并列出一些相关的已知结果,以供后面使用. 这里使用[11-12]作为标准的参考文献.

设 K 是正整数集合. 可分组设计(K-GDD)是满足如下性质的三元集(X,G,A):

(1)X 是一个有限点集;

(2)G 是 X 的一个划分(称为组);

(3)A 是 X 的一簇大小取自于集合 K 的子集(称为区组),满足 X 中的任意不在同一组上的点对恰恰出现在一个区组中.

GDD 的型是指多元集合$\{|G|:G\in G\}$. 通常使用"指数"记号来表示 GDD 的型.一个型为 $g_1^{u_1}g_2^{u_2}\cdots g_s^{u_s}$ 的 GDD 表示该 GDD 包含 u_i 个大小为 g_i 的组,$1\leqslant i\leqslant s$. 当 $K=\{k\}$时,简记 K-GDD 为 k-GDD. 型为 n^k 的

k-GDD 称为横截设计,记作 TD(k,n).

下面给出 $K_r \times K_c$-GDD 的定义,其是研究格子区组填充和覆盖的一类重要的辅助设计.

若图 H 的顶点集 X 可以划分成 u 个非空子集 $G_1, G_2, \cdots, G_u$(称为组或部),使得顶点 $v_i \in G_i$ 和 $v_j \in G_j$ 在 H 中相邻当且仅当 $i \neq j$,则称图 H 为完全 u 部图. 若 $|G_i| = g_i (1 \leqslant i \leqslant u)$,则记该完全 u 部图为 $K_{g_1, g_2, \cdots, g_u}$.

$K_{g_1, g_2, \cdots, g_u}$的一个 $K_r \times K_c$ 分解称为型为 $T = \{g_1, g_2, \cdots, g_u\}$ 的 $K_r \times K_c$-可分组设计,记作 $K_r \times K_c$-GDD. 通常我们使用指数记号来表示 $K_r \times K_c$-GDD 的型 T:型为 $g_1^{u_1} g_2^{u_2} \cdots g_s^{u_s}$ 表示有 u_i 个大小为 g_i 的组,$1 \leqslant i \leqslant s$. 显然,型为 1^v 的 $K_r \times K_c$-GDD 就是 GD($v; K_r \times K_c$).

关于 $K_2 \times K_3$-GDD 的存在性,我们有如下结果.

引理 6[9]　(1)对于任意正整数 $u \geqslant 4$,型为 3^u 的 $K_2 \times K_3$-GDD 存在;

(2)对于任意正整数 $u \geqslant 3$,型为 9^u 的 $K_2 \times K_3$-GDD 存在;

(3)若 $m \in \{0, 9\}$,对于任意的正整数 $u \geqslant 3$,型为 $18^u m^1$ 的 $K_2 \times K_3$-GDD 存在.

进一步地,我们还需要下面的组合构型.

设正整数 v 和 w 满足 $v>w$.一个不完全 $r \times c$ 格子区组覆盖(IGC($(v,w); K_r \times K_c$))为一个三元集(X, H, A),满足如下性质:

(1)X 是一个 v 元点集;

(2)H 是 X 的一个子集(称为洞),且 $|H| = w$;

(3)A 是 X 的一簇 $r \times c$ 格子区组集合,满足 H 中的任一点对不出现在任何一个格子区组中,而 X 中的其余点对至少出现在一个格子区组中.

进一步地,如果一个不完全 $r \times c$ 格子区组覆盖包含尽可能少的格子区组数,则称其为不完全的最小 $r \times c$ 格子区组覆盖,记作 IMGC($(v,w); K_r \times K_c$). 简单计算表明,一个 IMGC($(v,w); K_2 \times K_3$)包含$\lceil \frac{v}{6} \lceil \frac{v-1}{3} \rceil \rceil - \lceil \frac{w}{6} \lceil \frac{w-1}{3} \rceil \rceil$个格子区组. 当 $w=0$ 时,一个 IMGC($(v,w); K_2 \times K_3$)实际上就是一个 MGC($v; K_2 \times K_3$).

2　构造方法

2.1　递归构造

下面我们给出一些递归构造,它们都是设计理论中标准递归方法的变形. 它们的证明类似于[1-2]等中的构造方法.

构造 1　若 IMGC($(v,w); K_r \times K_c$)和 MGC($w; K_r \times K_c$)存在,则 MGC($v; K_r \times K_c$)存在.

构造 2　设正整数 $w \geqslant 0$. 假设存在一个型为 $g_1 g_2 \cdots g_u$ 的 $K_r \times K_c$-GDD. 对于每一个 $i (1 \leqslant i \leqslant u)$,IMGC($(g_i + w, w); K_r \times K_c$)都存在,则 IMGC($(\sum_{i=1}^{u} g_i + w, g_u + w); K_r \times K_c$)和 IMGC($(\sum_{i=1}^{u} g_i + w, w); K_r \times K_c$)都存在. 进一步地,若 MGC($g_u + w; K_r \times K_c$)或 MGC($w; K_r \times K_c$)存在,则 MGC($\sum_{i=1}^{u} g_i + w; K_r \times K_c$)存在.

下面关于 $K_r \times K_c$-GDD 的构造方法在研究格子区组设计时被广泛使用(见[1-2]),实际上这些构造是设计理论中常用递归构造的变形(参见[8-9,11]等).

构造 3　若型为 ${g_1}^{u_1} {g_2}^{u_2} \cdots {g_s}^{u_s}$的 $K_r \times K_c$-GDD 存在,且当 $k = \max\{r, c\}$ 时,TD(k, m)存在,则型为 $(mg_1)^{u_1} (mg_2)^{u_2} \cdots (mg_t)^{u_t}$的 $K_r \times K_c$-GDD 存在.

2.2　直接构造

接下来,我们将直接构造一些小阶数的 IMGC($v; K_2 \times K_3$)和 MGC($v; K_2 \times K_3$),其是利用前面递归构造方法的基础.

由格子区组的定义可知,$K_2 \times K_3$ 的格子区组是一个 2×3 的矩阵,可表示为以下形式

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$

该矩阵中,每一行为一个完全图 K_3,每一列为一个完全图 K_2. 在下文中,为了简洁起见,我们用$\{a,b,c;d,e,f\}$来表示一个 2×3 的格子区组.

首先构造一些小阶数的 IMGC($v;K_2\times K_3$).

引理 7　IMGC($(11,2);K_2\times K_3$)存在.

证明　一个 IMGC($(11,2);K_2\times K_3$)包含 7 个格子区组. 这里取 $Z_9\cup\{x,y\}$ 为点集,$\{x,y\}$ 为洞,两个初始格子区组$\{0,1,2;4,6,x\}$和$\{2,5,6;4,8,y\}$通过+3 mod 9 运算产生 6 个格子区组,这些格子区组与$\{0,3,6;1,4,7\}$构成了所需设计的所有格子区组.

引理 8　IMGC($(9,3);K_2\times K_3$)和 IMGC($(15,3);K_2\times K_3$)存在.

证明　一个 IMGC($(9,3);K_2\times K_3$)包含 4 个格子区组. 取 $Z_9\cup\{x,y,z\}$ 为点集,$\{x,y,z\}$ 为洞,两个初始格子区组$\{x,5,4;0,2,y\}$和$\{0,4,1;3,2,z\}$通过+3 mod 6 运算得到所有格子区组.

一个 IMGC($(15,3);K_2\times K_3$)包含 12 个格子区组. 取 $Z_{12}\cup\{a_0,a_1,a_2\}$ 为点集,$\{a_0,a_1,a_2\}$ 为洞,初始格子区组$\{4,5,10;0,2,a_0\}$通过+1 mod 12 运算得到 IMGC($(15,3);K_2\times K_3$)所有格子区组. 这里 a 的下标按+1 mod 3 进行运算.

引理 9　IMGC($(13,4);K_2\times K_3$)和 IMGC($(22,4);K_2\times K_3$)存在.

证明　一个 IMGC($(13,4);K_2\times K_3$)包含 8 个格子区组. 取 $Z_9\cup\{x,y,z,w\}$ 为点集,$\{x,y,z,w\}$ 为洞,下面给出该设计的所有格子区组:

$\{x,5,8;7,4,y\}\ \{x,0,1;2,3,y\}\ \{z,0,2;1,4,w\}\ \{z,4,6;7,8,w\}$

$\{2,7,6;4,3,x\}\ \{1,7,5;6,0,y\}\ \{1,2,8;3,5,z\}\ \{6,8,3;5,0,w\}$

一个 IMGC($(13,4);K_2\times K_3$)包含 25 个格子区组. 取 $Z_{18}\cup\{x,y,z,w\}$ 为点集,$\{x,y,z,w\}$ 为洞. 下面给出该设计 8 个初始格子区组:

$\{8,16,5;10,1,x\}\ \{16,15,2;3,0,x\}\ \{1,17,6;4,15,y\}\ \{6,11,5;14,7,y\}$

$\{6,4,10;8,17,z\}\ \{2,8,9;6,13,z\}\ \{1,9,13;2,5,w\}\ \{5,13,15;4,12,w\}$

以上初始格子区组通过+6 mod 18 运算得到 24 个格子区组,这些格子区组与$\{0,6,12;9,15,3\}$构成 IMGC($(22,4);K_2\times K_3$)的所有格子区组.

引理 10　IMGC($(14,5);K_2\times K_3$)和 IMGC($(23,5);K_2\times K_3$)存在.

证明　一个 IMGC($(14,5);K_2\times K_3$)包含 10 个格子区组. 取 $Z_9\cup\{a,b,c,d,e\}$ 为点集,$\{a,b,c,d,e\}$ 为洞,3 个初始格子区组$\{a,0,2;1,3,b\}$,$\{c,1,2;0,4,d\}$和$\{2,5,6;4,8,e\}$通过+3 mod 9 运算产生 9 个格子区组,这些格子区组与$\{0,3,6;1,4,7\}$构成了所需设计的所有格子区组.

一个 IMGC($(23,5);K_2\times K_3$)包含 29 个格子区组. 取 $Z_{18}\cup\{a,b,c,d,e\}$ 为点集,$\{a,b,c,d,e\}$ 为洞. 以下 9 个初始格子区组通过+6 mod 18 运算得到 27 个格子区组.

$\{a,10,6;1,9,b\}\ \{11,4,14;3,11,a\}\ \{10,8,14;4,17,b\}\ \{17,7,5;15,6,c\}\ \{0,5,4;7,12,d\}\ \{7,5,11;10,12,e\}\ \{15,0,10;1,2,c\}\ \{0,14,17;8,3,d\}\ \{1,10,3;8,13,e\}$

以上格子区组与$\{0,6,12;1,7,13\}$和$\{2,8,14;3,9,15\}$构成所需设计的所有格子区组.

引理 11　IMGC($(25,7);K_2\times K_3$)存在.

证明　一个 IMGC($(13,4);K_2\times K_3$)应包含 31 个格子区组. 取 $Z_{18}\cup\{x,y,z,a,b,c,d\}$ 为点集,$\{x,y,z,a,b,c,d\}$ 为洞. 下面给出该设计 10 个初始格子区组:

$\{x,5,16;12,2,y\}\ \{x,7,15;8,6,z\}\ \{a,14,9;4,8,b\}\ \{c,5,0;15,4,d\}\ \{17,1,7;11,15,y\}\ \{4,6,17;13,16,z\}$
$\{2,3,6;7,11,a\}\ \{2,9,11;1,6,b\}\ \{10,15,16;2,13,c\}\ \{6,10,13;5,8,d\}$

以上初始格子区组通过+6 mod 18 运算得到 30 个格子区组. 这些格子区组与$\{0,6,12;9,15,3\}$构成 IMGC($(25,7);K_2\times K_3$)的所有格子区组.

引理 12　IMGC($(26,8);K_2\times K_3$)存在.

证明　一个 IMGC($(26,8);K_2\times K_3$)包含 35 个格子区组. 取 $Z_{18}\cup\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ 为点集,$\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ 为洞. 下面给出 11 个初始格子区组:

$\{a,6,1;8,10,b\}\ \{c,8,7;9,11,d\}\ \{e,13,12;14,1,f\}\ \{g,3,11;1,9,h\}\ \{a,16,3;11,12,b\}\ \{c,5,6;4,2,d\}$
$\{e,5,9;16,11,f\}\ \{g,2,12;10,14,h\}\ \{17,1,12;2,11,10\}\ \{0,3,10;11,4,7\}\ \{0,14,15;2,9,13\}$

以上初始格子区组通过+6 mod 18 运算得到了 33 个格子区组. 这些格子区组与{0,6,12;9,15,3}和{1,7,13;10,16,4}组成了所需设计的所有格子区组.

下面构造一些小阶数的 MGC(v;K_2×K_3).

引理 13 对任意正整数 v∈{11,20},MGC(v;K_2×K_3)存在.

证明 当 v=11 时,取 Z_{10}∪{x}为点集,以下 4 个初始格子区组通过+5 mod 10 运算得到 MGC(11;K_2×K_3)的所有格子区组.

{0,1,2;1,3,x}{0,3,5;5,4,x}{0,4,6;7,2,1}{1,4,9;8,7,3}

当 v=20 时,取 Z_{20}为点集,以下 6 个初始格子区组通过+5 mod 20 运算得到 MGC(20;K_2×K_3)所有格子区组.

{3,15,19;12,3,13}{4,11,8;3,7,6}{8,13,10;2,4,7}
{13,6,1;0,9,19}{14,19,7;0,11,1}{0,2,12;5,15,1}

引理 14 对于任意正整数 v∈{3,6,12},MGC(v;K_2×K_3)存在.

证明 当 v=3 时,MGC(3;K_2×K_3)包含一个格子区组. 取 Z_3 为点集,一个格子区组为{0,1,2;1,2,0}.

当 v=6 时,MGC(6;K_2×K_3)包含 2 个格子区组. 取 Z_6 为点集,两个格子区组为{0,1,2;3,4,5}和{0,1,5;4,3,2}.

当 v=12 时,MGC(6;K_2×K_3)包含 8 个格子区组. 取 Z_{12}为点集,两个初始格子区组{3,4,9;6,10,8}和{1,2,5;4,6,11}通过+3 mod 12 运算得到所有的格子区组.

引理 15 对每一个 v∈{4,13,22},MGC(v;K_2×K_3)存在.

证明 当 v=4 时,取 Z_3 为点集. MGC(4;K_2×K_3)包含一个格子区组,取为{0,1,2;2,3,0}.

当 v∈{13,22}时,IMGC((13,4);K_2×K_3)和 IMGC((22,4);K_2×K_3)存在由引理 9 给出. 应用构造 1,填入 MGC(4;K_2×K_3)可得 MGC(13;K_2×K_3)和 MGC(22;K_2×K_3).

引理 16 对每一个 v∈{5,14,23},MGC(v;K_2×K_3)存在.

证明 当 v=5 时,取 Z_5 为点集. MGC(5;K_2×K_3)包含两个格子区组. 取格子区组为{0,1,2;2,3,4}和{0,1,2;3,4,0}.

当 v∈{14,23}时,由引理 10 知 IMGC((14,5);K_2×K_3)和 IMGC((23,5);K_2×K_3)存在. 应用构造 1,填入一个 MGC(5;K_2×K_3)可得 MGC(14;K_2×K_3)和 MGC(23;K_2×K_3).

引理 17 对每一个 v∈{7,16,25},MGC(v;K_2×K_3)存在.

证明 当 v=7 时,取 Z_7 为点集. MGC(7;K_2×K_3)包含 3 个格子区组. 取格子区组为{0,1,2;3,4,5},{0,5,6;4,1,3}和{1,5,3;6,4,2}.

当 v=16 时,取 Z_{15}∪{x}为点集,4 个初始格子区组{0,2,4;3,1,5},{0,6,9;7,1,13},{3,9,11;7,14,x}和{4,7,11;3,10,x}通过+5 mod 15 运算得到 12 个格子区组. 这些格子区组与{0,5,10;1,6,11}和{2,7,12;3,8,13}构成 MGC(16;K_2×K_3)的所有格子区组.

当 v=25 时,由引理 11 知 IMGC((25,7);K_2×K_3)存在. 应用构造 1,填入一个 MGC(7;K_2×K_3)可得 MGC(25;K_2×K_3).

引理 18 对每一个 v∈{8,17,26,35,44,53},MGC(v;K_2×K_3)存在.

证明 当 v∈{8,26,44}时,取 Z_v 为点集,初始格子区组通过+2 mod 8 运算得到 MGC(v;K_2×K_3)所有的格子区组. 下面对每一个 v∈{17,35,53},给出初始格子区组:

v=8:{0,1,2;4,5,7}

v=26:{0,1,2;1,14,5}{0,4,9;6,14,3}{0,7,14;11,19,9}

v=44:{0,1,2;3,5,8}{0,1,7;4,9,16}{0,8,17;10,26,39}{0,11,24;21,32,2}{0,15,25;27,39,9}

当 v∈{17,35,53}时,取 Z_v 为点集. 初始格子区组通过+1 mod v 运算得到 MGC(v;K_2×K_3)所有的格子区组.下面对每一个 v∈{17,35,53},给出初始格子区组:

v=17:{0,1,2;3,7,12}

v=35:{0,1,2;3,7,12}{0,7,8;14,29,2}

v=53:{0,1,2;3,7,12}{0,7,15;11,23,40}{0,13,31;21,40,1}

3　主要结果

3.1　最大 2×3 格子区组填充的存在性

文献[9]基本解决了最大 2×3 格子填充的存在性,但是遗留了两个可能的例外. 下面我们直接构造出 MGP$(32;K_2\times K_3)$和 MGP$(35;K_2\times K_3)$,从而完全确立了最大 2×3 格子填充的存在性.

引理 19　一个 MGP$(32;K_2\times K_3)$存在.

证明　MGP$(32;K_2\times K_3)$应包含 $U(32;K_2\times K_3)=\lfloor\frac{32}{6}\lfloor\frac{32-1}{3}\rfloor\rfloor=53$ 个格子区组.

首先我们构造一个型为 $2^9 14^1$ 的 $K_2\times K_3$-GDD. 取 $Z_9\times Z_2\cup H_{14}$作为点集,$\{\{i\}\cup Z_2\mid 0\leqslant i<9\}\cup\{H_{14}\}$作为组集,其中 $H_{14}=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\xi,\eta,\theta,\mu,\nu,\rho,\tau,\phi,\varphi,\chi\}$. 所需的初始格子区组分为两部分,记为Ⅰ和Ⅱ. 部分Ⅰ中的格子区组通过(+3 mod 9,−)得到 12 个格子区组,记为Ⅲ. 对部分Ⅱ和Ⅲ的所有 22 个格子区组通过(−,+1 mod 2)作用得到型为 $2^9 14^1$ 的 $K_2\times K_3$-GDD 的所有 44 个格子区组. 下面列出部分Ⅰ和Ⅱ的格子区组. 这里$(a,b)\in Z_9\times Z_2$ 简写为 a_b.

Ⅰ:$\{\alpha,4_1,5_1;6_1,7_1,\xi\}$ $\{\beta,4_0,2_1;3_0,7_1,\eta\}$ $\{\gamma,8_0,4_0;6_1,2_0,\theta\}$ $\{\delta,6_0,4_1;2_0,3_0,\mu\}$

Ⅱ:$\{\nu,2_0,6_0;1_1,8_1,\phi\}$ $\{\rho,5_0,7_0;1_0,3_0,\varphi\}$ $\{\tau,4_0,5_1;1_1,2_0,\chi\}$ $\{\nu,3_0,5_1;0_0,2_1,\phi\}$

$\{\rho,3_0,0_1;4_1,6_1,\varphi\}$ $\{\tau,0_0,6_1;3_1,4_0,\chi\}$ $\{\nu,8_0,4_1;7_0,3_0,\phi\}$ $\{\rho,6_0,8_1;2_0,5_1,\varphi\}$

$\{\tau,2_0,7_1;8_1,0_0,\chi\}$ $\{0_0,1_1,5_0;7_0,6_1,8_1\}$

由引理 4 知,MGP$(14;K_2\times K_3)$存在,其包含 9 个格子区组. 在型为 $2^9 14^1$ 的 $K_2\times K_3$-GDD 长为 14 的组上填入一个 MGP$(14;K_2\times K_3)$可得包含 $U(32;K_2\times K_3)$个格子区组的 MGP$(32;K_2\times K_3)$.

引理 20　一个 MGP$(35;K_2\times K_3)$存在.

证明　MGP$(35;K_2\times K_3)$应包含 PN$(35;K_2\times K_3)=\lfloor\frac{35}{6}\lfloor\frac{35-1}{3}\rfloor\rfloor=64$ 个区组. 取 $Z_{15}\times Z_2\cup(x_0,x_1,x_2,\alpha,\beta)$作为点集. 初始格子区组分为两部分Ⅰ和Ⅱ. 首先,部分Ⅰ的 6 个格子区组通过(+5 mod 15,−)得到 18 个格子区组,记为Ⅲ. 注意 x 的下标按模 3 进行运算.对部分Ⅱ和Ⅲ总共 30 个格子区组通过(−,+1 mod 2)得到 60 个格子区组. 注意这里运算中 x_0,x_1,x_2,α,β 都是固定不变的.

Ⅰ:$\{11_0,4_0,10_0;9_1,3_1,1_0\}$ $\{14_0,7_0,13_0;5_1,8_0,x_0\}$ $\{13_0,11_0,2_0;10_0,14_0,x_0\}$ $\{0_0,7_0,1_1;6_1,4_1,x_0\}$

$\{9_0,6_1,7_1;3_1,11_0,x_0\}$ $\{4_0,5_1,9_0;12_1,0_0,x_0\}$

Ⅱ:$\{7_0,8_1,10_0;13_1,0_0,8_0\}$ $\{4_0,8_1,2_0;8_0,11_1,3_1\}$ $\{2_0,5_0,1_1;6_0,3_1,\alpha\}$ $\{10_0,3_0,12_1;9_0,14_1,\alpha\}$

$\{2_0,14_0,0_0;7_1,4_1,\alpha\}$ $\{0_0,12_0,11_1;2_1,10_0,\alpha\}$ $\{1_0,12_1,8_0;13_0,5_0,\alpha\}$ $\{3_0,7_1,6_0;14_0,12_0,\beta\}$

$\{5_0,13_1,1_0;4_0,9_1,\beta\}$ $\{6_0,13_0,2_1;10_0,3_1,\beta\}$ $\{7_0,11_1,0_1;5_0,7_1,\beta\}$ $\{9_0,12_0,13_1;8_0,11_0,\beta\}$

以上得到的 60 个格子区组和以下 4 个格子区组:

$\{0_0,5_0,10_0;0_1,5_1,10_1\}$ $\{1_0,6_0,11_0;1_1,6_1,11_1\}$ $\{2_0,7_0,12_0;2_1,7_1,12_1\}$ $\{3_0,8_0,13_0;3_1,8_1,13_1\}$

构成了 MGP$(35;K_2\times K_3)$所有 64 个格子区组.

下面我们可以给出定理 1 的证明.

定理 3　对任意的正整数 $v\geqslant 6$,一个 MGP$(v;K_2\times K_3)$存在.

证明　结合引理 4,引理 19 和引理 20 可得结论.

3.2　最小 2×3 格子区组覆盖的存在性

引理 21　对于任意正整数 $v\equiv 0 \pmod 3$,MGC$(v;K_2\times K_3)$存在.

证明　(1)$v\equiv 0 \pmod 6$

MGC$(6;K_2\times K_3)$和 MGC$(12;K_2\times K_3)$由引理 14 给出. 当 $v\geqslant 18$ 时,记 $v=6t$,则 $t\geqslant 3$. 由引理 6 知,当 $t\geqslant 4$ 时,存在型为 3^t 的 $K_2\times K_3$-GDD. 应用构造 3,以 TD(3,2)(见[11])作为输入设计,可得型为 6^t 的 $K_2\times K_3$-GDD. 而型为 6^3 的 $K_2\times K_3$-GDD 由文献[9]给出. 从而对任意 $t\geqslant 3$,存在型为 3^t 的 $K_2\times K_3$-GDD. 应用构造 2,以一个 MGC$(6;K_2\times K_3)$作为输入设计,可得 MGC$(6t;K_2\times K_3)$.

(2) $v\equiv 3(\bmod 6)$

$\mathrm{MGC}(3;K_2\times K_3)$ 由引理 14 给出. $\mathrm{IMGC}((9,3);K_2\times K_3)$ 和 $\mathrm{IMGC}((15,3);K_2\times K_3)$ 由引理 8 给出. 应用构造 1,填入一个 $\mathrm{MGC}(3;K_2\times K_3)$,分别可得 $\mathrm{MGC}(9;K_2\times K_3)$ 和 $\mathrm{MGC}(15;K_2\times K_3)$. 当 $v\geqslant 21$ 时,记 $v=6t+3$,则 $t\geqslant 3$. 由上面知,存在型为 6^t 的 $K_2\times K_3$-GDD. 应用构造 2,以一个 $\mathrm{IMGC}((9,3);K_2\times K_3)$ 作为输入设计,得一个 $\mathrm{IMGC}((6t+3,3);K_2\times K_3)$. 再应用构造 1,填入 $\mathrm{MGC}(3;K_2\times K_3)$,可得 $\mathrm{MGC}(6t+3;K_2\times K_3)$.

引理 22 对于任意正整数 $v\equiv 1(\bmod 3)$,$v\geqslant 4$ 且 $v\notin\{34,43,52\}$,$\mathrm{MGC}(v;K_2\times K_3)$ 存在.

证明 (1) $v\equiv 1(\bmod 9)$

一个 $\mathrm{MGC}(v;K_2\times K_3)$ 就是一个 $\mathrm{GD}(v;K_2\times K_3)$,其存在性由引理 3 给出.

(2) $v\equiv 4(\bmod 9)$

当 $v\in\{4,13,22\}$ 时,$\mathrm{MGC}(v;K_2\times K_3)$ 由引理 15 给出. 当 $v\geqslant 31$ 时,记 $v=9t+4$,则 $t\geqslant 3$. 由引理 6 知,型为 9^t 的 $K_2\times K_3$-GDD 存在. 应用构造 2,以引理 9 给出的 $\mathrm{IMGC}((13,4);K_2\times K_3)$ 作为输入设计,可得 $\mathrm{IMGC}((9t+4,4);K_2\times K_3)$. 应用构造 1,填入 $\mathrm{MGC}(4;K_2\times K_3)$ 可得 $\mathrm{MGC}(9t+4;K_2\times K_3)$.

(3) $v\equiv 7(\bmod 9)$

当 $v\in\{7,16,25\}$ 时,$\mathrm{MGC}(v;K_2\times K_3)$ 由引理 17 给出. 当 $v\geqslant 61$ 时,记 $v=18t+w+7$,$w\in\{0,9\}$,则 $t\geqslant 3$. 由引理 7 知,型为 $18^t w^1$ 的 $K_2\times K_3$-GDD 存在. 应用构造 2,以引理 7 给出的一个 $\mathrm{IMGC}((25,7);K_2\times K_3)$ 作为输入设计,可得一个 $\mathrm{IMGC}((18t+w+7,\ w+7);K_2\times K_3)$. 既然 $\mathrm{MGC}(7;K_2\times K_3)$ 和 $\mathrm{MGC}(16;K_2\times K_3)$ 都存在,应用构造 1,填入 $\mathrm{MGC}(7;K_2\times K_3)$ 或 $\mathrm{MGC}(16;K_2\times K_3)$,可得 $\mathrm{MGC}(18t+w+7;K_2\times K_3)$,这里 $w\in\{0,9\}$.

引理 23 对于任意正整数 $v\equiv 2(\bmod 3)$ 且 $v\geqslant 5$,$\mathrm{MGC}(v;K_2\times K_3)$ 存在.

证明 (1) $v\equiv 2(\bmod 9)$

当 $v=11$ 或 20 时,$\mathrm{MGC}(v;K_2\times K_3)$ 由引理 13 给出. 当 $v\geqslant 29$ 时,记 $v=9t+2$,则 $t\geqslant 3$. 由引理 7 知,型为 9^t 的 $K_2\times K_3$-GDD 存在. 应用构造 2,以引理 7 给出的 $\mathrm{IMGC}((11,2);K_2\times K_3)$ 作为输入设计,可得 $\mathrm{IMGC}((9t+2,11);K_2\times K_3)$. 应用构造 1,填入 $\mathrm{MGC}(11;K_2\times K_3)$ 可得 $\mathrm{MGC}(9t+2;K_2\times K_3)$.

(2) $v\equiv 5(\bmod 9)$

当 $v\in\{5,14,23\}$ 时,$\mathrm{MGC}(v;K_2\times K_3)$ 由引理 16 给出. 当 $v\geqslant 32$ 时,记 $v=9t+5$,则 $t\geqslant 3$. 由引理 6 知,型为 9^t 的 $K_2\times K_3$-GDD 存在. 应用构造 2,以引理 10 给出的 $\mathrm{IMGC}((14,5);K_2\times K_3)$ 作为输入设计,可得 $\mathrm{IMGC}((9t+5,5);K_2\times K_3)$. 应用构造 1,填入一个 $\mathrm{MGC}(5;K_2\times K_3)$ 可得 $\mathrm{MGC}(9t+5;K_2\times K_3)$.

(3) $v\equiv 8(\bmod 9)$

当 $v\in\{8,17,26,35,44,53\}$ 时,$\mathrm{MGC}(v;K_2\times K_3)$ 由引理 18 给出. 当 $v\geqslant 62$ 时,记 $v=18t+w+8$,$w\in\{0,9\}$,则 $t\geqslant 3$. 由引理 6 知,型为 $18^t w^1$ 的 $K_2\times K_3$-GDD 存在. 应用构造 2,以引理 12 给出的 $\mathrm{IMGC}((26,8);K_2\times K_3)$ 作为输入设计,可得 $\mathrm{IMGC}((18t+w+8,w+8);K_2\times K_3)$. 既然 $\mathrm{MGC}(8;K_2\times K_3)$ 和 $\mathrm{MGC}(17;K_2\times K_3)$ 都存在,应用构造 1,填入 $\mathrm{MGC}(8;K_2\times K_3)$ 或 $\mathrm{MGC}(17;K_2\times K_3)$,可得 $\mathrm{MGC}(18t+w+8;K_2\times K_3)$,$w\in\{0,9\}$.

下面我们可以给出定理 2 的证明.

定理 2 对于任意正整数 $v\geqslant 3$ 且 $v\notin\{34,43,52\}$,$\mathrm{MGC}(v;K_2\times K_3)$ 存在.

证明 结合引理 4 和引理 21-23 可得结论.

[参考文献]

[1] LI Y,YIN J,ZHANG R,et al. The decomposition of K_v into $K_2\times K_5$'s[J]. Sci China Ser A,2007,50:1 382-1 388.

[2] ZHANG R,GE G,LING ALAN C H,et al. The existence of $r\times 4$ grid-block designs with $r=3,4$[J]. SIAM J Discrete Math,2009,23:1 045-1 062.

[3] BOLLOBAS B. Graph theory[M]. New York:Spriger-Verlag,1979.

[4] WEST D B. Introduction to graph theory[M]. Upper Saddle River:Prentice-Hall,1996.

[5] HWANG F K. An isomorphic factorization of the complete graph[J]. J graph theory,1995,19:333-337.

[6] DU D Z,HWANG F K. Pooling designs and nonadaptive group testing:important tools for DNA Sequencing[M]. Hackensack,NJ:World Scientic,2006.

[7] CARTER J E. Designs on Cubic Multigraphs[D]. Canada:McMaster University,1989.

[8] MUTOH Y,MORIHARA T,JIMBO M,et al. The existence of 2×4 grid-block designs and their applications[J]. SIAM J discrete Math,2003,16:173-178.

[9] MUTOH Y,JIMBO M,FU H L. A resolvable $r\times c$ grid-block packing and its application to DNA library screening[J]. Taiwanese J Math,2004,8:713-737.

[10] WANG L,LIU H. Maximum 2×3 grid-block packings of K_v[J]. Journal of mathematical research with applications,2014,34:137-146.

[11] COLBOURN C J,DINITZ J H. The CRC hankbook of combinatorial designs[M]. Boca Raton,FL:CRC Press,2007.

[12] BETH T,JUNGNICKEL D,LENZ H. Design theory[M]. Cambidge:Cambidge University Press.

[责任编辑:陆炳新]

(上接第12页)

[9] SHAN C,ZHU H. Nilpotent singularities and dynamics in an SIR type of compartmental model with hospital resources[J]. J differential equations,2016,260:4 339-4 365.

[10] WAN H,CUI J. Rich Dynamics of an epidemic model with saturation recovery[J]. Journal of applied mathematics,2013,Article ID 314958,9 pages.

[11] XIAO Y,TANG S. Dynamics of infection with nonlinear incidence in a simple vaccination model[J]. Nonlinear analysis:real world applications,2010,11:4 154-4 163.

[12] ZHOU T,ZHANG W,LU Q. Bifurcation analysis of an SIS epidemic model with saturated incidence rate and saturated treatment function[J]. J applied mathematics and computation,2014,226:288-305.

[13] VAN DEN DRIESSCHE P,WATMOUGH J. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental model of disease transmission[J]. J Math Biosci,2002,180:29-48.

[14] CASTILLO C C,SONG B. Dynamical models of tuberculosis and their applications[J]. Mathematical biosciences and enginieering,2004(1):361-404.

[责任编辑:陆炳新]