

KdV 方程的高阶保能量算法

蒋朝龙, 孙建强, 何逊峰, 闫静叶

(海南大学信息科学技术学院, 海南海口 570228)

[摘要] KdV 方程被转化为无穷维 Hamilton 系统, 在空间方向上用拟谱算法离散得到了 KdV 方程的有限维 Hamilton 系统. 利用四阶平均向量场(AVF)方法离散 KdV 方程的有限维 Hamilton 系统, 构造了 KdV 方程的高阶保能量格式. 利用构造的高阶保能量格式数值模拟孤立波的演化行为. 数值结果表明, 高阶保能量格式可以精确保持方程的离散能量守恒.

[关键词] AVF 方法, KdV 方程, 保能量算法

[中图分类号] O241 [文献标志码] A [文章编号] 1001-4616(2017)04-0016-05

High Order Energy-Preserving Method for the KdV Equation

Jiang Chaolong, Sun Jianqiang, He Xunfeng, Yan Jingye

(College of Information Science and Technology, Hainan University, Haikou 570228, China)

Abstract: The KdV equation is transformed into an infinite dimensional Hamiltonian system. The finite dimensional Hamiltonian system of the KdV equation is obtained by the pseudo-spectral method in spacial direction. Then, the finite dimensional Hamiltonian system is discretized by the fourth order AVF method. Thus, a high order energy-preserving scheme of the KdV equation is derived. The evolution of the solitary wave is simulated by the high order energy-preserving scheme. Numerical results show that the proposed scheme can preserve the discrete energy of the KdV equation exactly.

Key words: AVF method, KdV equation, energy-preserving method

具有能量守恒的 Hamilton 系统是动力系统的一个重要体系, 一切耗散的和耗散忽略不计的物理过程都可以表示为 Hamilton 系统. 上个世纪 80 年代, 我国著名计算数学家冯康院士及其研究小组提出 Hamilton 系统辛几何算法^[1]. 在辛几何算法的基础上, 国内外学者发展了 Hamilton 系统的多辛几何算法^[2-3]. 然而, 向后误差分析表明对于非线性 Hamilton 系统, 辛和多辛算法只能近似保持系统能量守恒^[4]. 因此, 构造保持 Hamilton 系统能量守恒的数值法对正确模拟具有能量守恒的 Hamilton 系统具有重要的意义.

最近, Quispel 和 McLaren 给出了如下的保能量平均向量场方法(AVF)^[5]

$$\frac{z^{n+1} - z^n}{\tau} = \int_0^1 f((1-\xi)z^n + \xi z^{n+1}) d\xi, \quad z \in \mathbf{R}^{2m}, \quad (1)$$

式中, $f(z) = S \nabla H(z)$, S 是反对称常数矩阵, $H: \mathbf{R}^{2m} \rightarrow \mathbf{R}$ 是 Hamilton 能量函数.

平均向量场方法(1)也被称为平均离散梯度方法^[6], 可以精确保持 Hamilton 系统能量守恒, 在时间方向具有二阶精度, 是一类 B 级数方法^[7]. 基于修正向量场方法的思想, Quispel 和 McLaren 提出了在时间方向上具有四阶精度的高阶平均向量场方法(AVF)^[5]

$$\frac{z^{n+1} - z^n}{\tau} = S \int_0^1 \nabla H((1-\xi)z^n + \xi z^{n+1}) d\xi - \frac{\tau^2}{12} \hat{S} \hat{H} \hat{S} H S \int_0^1 \nabla H((1-\xi)z^n + \xi z^{n+1}) d\xi, \quad (2)$$

收稿日期: 2016-09-16.

基金项目: 国家自然科学基金(11561018)、海南省自然科学基金(20167246).

通讯联系人: 孙建强, 博士, 教授, 研究方向: 微分方程数值解法. E-mail: sunjq123@qq.com

式中, $\hat{H}_{i,j} = \frac{\partial^2 H}{\partial z_i \partial z_j} \left(\frac{z^n + z^{n+1}}{2} \right)$.

Celledoni 等人^[7]首次将二阶平均向量场方法应用在具有能量守恒的偏微分方程的求解中;龚等人^[8]利用平均向量场方法(1)构造了多辛 Hamilton 系统的局部保能量和保动量格式. 下面我们将利用四阶平均向量场方法(2)求解 KdV 方程. KdV 方程广泛存在于非谐晶体,泡沫液混合物,磁流体动力学,离子声波中. 考虑一般的 KdV 方程

$$u_t + cuu_x + \delta^2 u_{xxx} = 0, \quad t > 0, x \in \Omega, \quad (3)$$

初始条件为

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \Omega, \quad (4)$$

和周期边界条件

$$u(x+L, t) = u(x, t), \quad x \in \Omega, \quad (5)$$

式中, $\Omega = [a, b]$, $L = b - a$, c 和 δ 是实数.

KdV 方程具有如下的守恒特性

动量守恒

$$M(t) = -\frac{1}{2} \int_a^b u^2 dx = M(0), \quad (6)$$

能量守恒

$$E(t) = \int_a^b \left(\frac{\delta^2}{2} u_x^2 - \frac{c}{6} u^3 \right) dx = E(0). \quad (7)$$

KdV 方程的数值算法一直是研究的热点,特别是构造 KdV 方程的保结构算法的研究. 赵等人^[9]最早构造了 KdV 方程的多辛 Preissman 格式;王等人^[10-11]研究了数值实现 KdV 方程的多辛 Preissman 格式和它的等价格式并给出了 KdV 方程的一类显示多辛格式;宋等人^[12]研究了 KdV 方程的多辛拟谱格式;Ascher 等人^[13]系统地给出 KdV 方程的多辛 box 格式. 吕等人^[14]给出一类显示多辛拟谱格式;Karasözen 等人^[15]利用二阶平均向量场,构造了 KdV 方程的保能量格式. 本文将利用四阶平均向量场方法构造 KdV 方程的高阶保能量格式.

1 KdV 方程的高阶保能量格式

方程(3)可以被转化为如下的无穷维 Hamilton 系统

$$\frac{du}{dt} = \partial_x \frac{\delta H(u)}{\delta u}, \quad (8)$$

式中, ∂_x 是一阶偏导算子,相应的 Hamilton 函数为

$$H(u) = \int \left(\frac{\delta^2}{2} (u_x)^2 - \frac{cu^3}{6} \right) dx. \quad (9)$$

将 Ω 分为 N 等分, $h = L/N$ 为空间步长, N 是一个正偶数. $x_j = a + hj$, $j = 0, \dots, N-1$ 为空间配置点. 定义

$$S_N = \{g_j(x); j = 0, 1, \dots, N-1\}, \quad (10)$$

为插值空间,其中 $g_j(x)$ 是满足 $g_j(x_i) = \delta_j^i$ 的正交三角多项式,并且 $g_j(x)$ 可以被显式地表示为

$$g_j(x) = \frac{1}{N} \sum_{l=-N/2}^{N/2} \frac{1}{c_l} e^{i \mu_l (x-x_j)}, \quad (11)$$

式中, $c_l = 1$ ($|l| \neq N/2$), $c_{-N/2} = c_{N/2} = 2$, $\mu = \frac{2\pi}{L}$.

对函数 $u(x, t) \in C^0(\Omega)$, 定义插值算 I_N 为

$$I_N u(x, t) = \sum_{l=0}^{N-1} u_l g_l(x), \quad (12)$$

插值算子 I_N 在配置点 x_j 满足

$$I_N u(x_j, t) = \sum_{l=0}^{N-1} u_l g_l(x_j) = u(x_j, t), \quad j = 0, \dots, N-1. \quad (13)$$

令 $U = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1})^T$, 定义 $(D_k)_{i,j} = \frac{d^k g_j(x_i)}{dx^k}$, 称 D_k 为 k 阶谱微分矩阵. 通过计算, 可以得到

$\frac{\partial}{\partial x} I_N u(x, t)$ 和 $\frac{\partial^2}{\partial x^2} I_N u(x, t)$ 在配置点 x_j 的值为

$$\frac{\partial}{\partial x} I_N u(x, t) |_{x=x_j} = \sum_{l=0}^{N-1} u_l \frac{dg_l(x_j)}{dx} = (D_1 U)_j, \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} I_N u(x, t) |_{x=x_j} = \sum_{l=0}^{N-1} u_l \frac{d^2 g_l(x_j)}{dx^2} = (D_2 U)_j, \quad (15)$$

式中, D_1 和 D_2 分别是如下的一阶和二阶谱微分矩阵

$$(D_1)_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{2} \mu (-1)^{i+j} \cot\left(\mu \frac{x_i - x_j}{2}\right) & i \neq j, \\ 0 & i = j, \end{cases}$$

$$(D_2)_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{2} \mu^2 (-1)^{i+j+1} \frac{1}{\sin^2\left(\mu \frac{x_i - x_j}{2}\right)} & i \neq j, \\ -\mu^2 \frac{N^2 + 2}{12} & i = j. \end{cases}$$

令 u_j^n 是 $u(x, t)$ 在网格点 (x_j, t_n) 处的近似. 在空间方向利用拟谱算法离散无限维 Hamilton 系统(8), 得到 KdV 方程的半离散拟谱格式

$$\frac{du_j}{dt} = -\delta^2 (AU)_j - \frac{c}{2} \sum_{l=0}^{N-1} d_{j,l} u_l^2, \quad j=0, 1, \dots, N-1, \quad (16)$$

式中, $A = D_1 D_2$, $d_{i,j}$ 是矩阵 D_1 第 i 行第 j 列元素.

方程(16)可以表示为如下的有限维 Hamilton 系统

$$\frac{dU}{dt} = f(U) = D_1 \nabla H(U), \quad (17)$$

相应的 Hamilton 函数为

$$H(U) = -\frac{\delta^2}{2} U^T D_2 U - \frac{c}{6} \sum_{j=0}^{N-1} (u_j)^3. \quad (18)$$

注意到有限维 Hamilton 系统(17)中 D_1 具有反对称性, 所以 Hamilton 系统(17)具有能量守恒特性. 利用四阶平均向量场方法(2)在时间方向上离散 Hamilton 系统(17)可以得到 KdV 方程的高阶保能量格式

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\tau} = D_1 \int_0^1 \nabla H((1-\xi)U^n + \xi U^{n+1}) d\xi - \frac{1}{12} \tau^2 D_1 \int_0^1 \nabla H((1-\xi)U^n + \xi U^{n+1}) d\xi, \quad (19)$$

式中, $J = D_1 \hat{H} = -\delta^2 A - \frac{c}{2} B$, $\hat{H}_{i,j} = \frac{\partial^2 H}{\partial u_i \partial u_j} \left(\frac{U^{n+1} + U^n}{2} \right)$, $B = D_1 D$, D 是如下的对角矩阵

$$D = \begin{pmatrix} u_0^{n+1} + u_0^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & u_1^{n+1} + u_1^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{N-1}^{n+1} + u_{N-1}^n \end{pmatrix}.$$

方程(19)等价于

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \int_0^1 \left(-\delta^2 (A((1-\xi)U^n + \xi U^{n+1}))_j - \frac{c}{2} \sum_{l=0}^{N-1} d_{j,l} ((1-\xi)u_l^n + \xi u_l^{n+1})^2 \right) d\xi +$$

$$\frac{\tau^2}{12} \sum_{l=0}^{N-1} \left(\delta^2 a_{j,l} + \frac{c}{2} b_{j,l} \right) \sum_{p=0}^{N-1} \left(\delta^2 a_{l,p} + \frac{c}{2} b_{l,p} \right) \times \int_0^1 \left(\delta^2 \sum_{s=0}^{N-1} a_{p,s} ((1-\xi)u_s^n + \xi u_s^{n+1}) + \right.$$

$$\frac{c}{2} \sum_{s=0}^{N-1} d_{p,s} ((1-\xi)u_s^n + \xi u_s^{n+1})^2 \Big) d\xi, \quad (20)$$

式中, a_{ij} 和 b_{ij} 分别是矩阵 A 和 B 的第 i 行第 j 列元素.

消去中间变量 ξ , 方程(20)等价于

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = & -\delta^2 \left(A \left(\frac{U^n + U^{n+1}}{2} \right) \right)_j - \frac{c}{6} \left(\sum_{l=0}^{N-1} d_{j,l} ((u_l^n)^2 + u_l^n u_l^{n+1} + (u_l^{n+1})^2) \right) + \frac{\tau^2}{12} \sum_{l=0}^{N-1} \left(\delta^2 a_{j,l} + \frac{c}{2} b_{j,l} \right) \times \\ & \sum_{p=0}^{N-1} \left(\delta^2 a_{l,p} + \frac{c}{2} b_{l,p} \right) \times \left(\delta^2 \sum_{s=0}^{N-1} \left(a_{p,s} \frac{u_s^n + u_s^{n+1}}{2} \right) + \frac{c}{6} \left(\sum_{s=0}^{N-1} d_{p,s} ((u_s^n)^2 + u_s^n u_s^{n+1} + (u_s^{n+1})^2) \right) \right). \end{aligned} \quad (21)$$

2 数值试验

为了验证 KdV 方程的高阶保能量格式(21)的有效性,我们利用高阶保能量格式数值模拟 KdV 方程单孤立波和多孤立波的演化行为和演化时能量和动量误差变化情况. 定义离散能量和动量误差分别为

$$RE^n = |H(U^n) - H(U^0)|, \quad RM^n = |M(U^n) - M(U^0)|, \quad (22)$$

离散能量和动量函数分别为

$$H(U^n) = h \left[-\frac{\delta^2}{2} (U^n)^T D_2 U^n - \frac{c}{6} \sum_{j=0}^{N-1} (u_j^n)^3 \right], \quad M(U^n) = -\frac{h}{2} \sum_{j=0}^{N-1} (u_j^n)^2,$$

式中, $H(U^0)$, $M(U^0)$ 分别是初始能量和动量, RE^n 和 RM^n 分别是 $t=n\tau$ 时刻的能量和动量误差.

2.1 单孤立波

当 $c=6, \delta=1$ 时, KdV 方程具有单孤立波解. 取初始条件

$$u(x, 0) = \text{sech}^2(x/\sqrt{2}), \quad (23)$$

和周期边界条件. 取空间步长 $h=40/120$ 和时间步长 $\tau=0.001$, 利用构造的高阶保能量格式数值模拟 KdV 方程单孤立波的演化. 图 1 表示 KdV 方程在 $t \in [0, 20]$ 内的数值解. 从图 1 中可以看出孤立波以一定的速度向前传播, 在传播过程中孤立波的振幅和波形可以被很好地保持. 图 2 是孤立波演化过程中的能量和动量误差图. 在图 2 中我们可以观察到构造的高阶保能量格式可以精确保持方程离散能量守恒, 并且动量守恒特性可以被很好地保持.

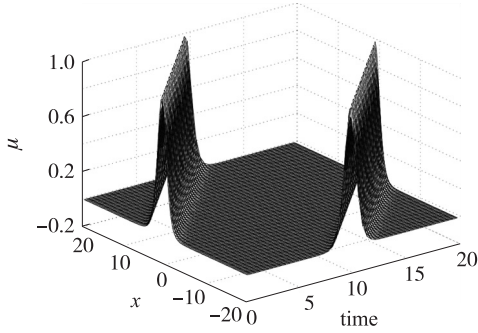


图 1 孤立波在 $t \in [0, 20]$ 内的数值解

Fig. 1 The numerical solution of the solitary at $t \in [0, 20]$

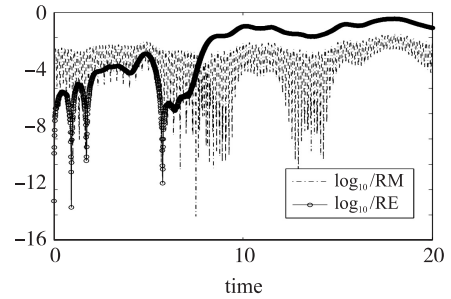


图 2 孤立波 $t \in [0, 20]$ 内的能量和动量误差的变化

Fig. 2 The energy and momentum errors of the solitary at $t \in [0, 20]$

2.2 多孤立波碰撞

取参数 $c=1, \delta=0.022$. 考虑初始条件

$$u(x, 0) = \cos(\pi x), \quad (24)$$

和周期边界条件. 令空间步长 $h=2/82$ 和时间步长 $\tau=0.002$. 利用高阶保能量格式(21)数值模拟 KdV 方程的多孤立波的演化行为. 图 3 表示多孤立波在 $t=0, t=1, t=5$ 时刻的数值解. 从图 3 中可以看出孤立波的振幅和波形被保持得很好. 图 4 表示孤立波在 $t \in [0, 40]$ 内演化时能量和动量误差变化情况. 从图 4 中可以看到构造的高阶保能量格式在多孤立波演化过程中精确保持方程离散能量特性, 并且能近似保持动量守恒特性.

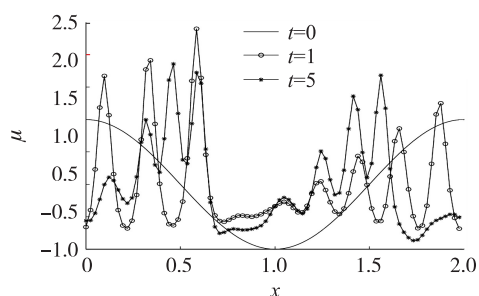


图 3 孤立波在 $t=0, t=1, t=5$ 时刻的数值解
Fig. 3 The numerical solutions of the solitary
at $t=0, t=1, t=5$

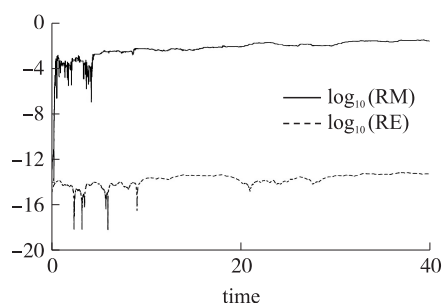


图 4 孤立波在 $t \in [0, 40]$ 内的能量和动量误差的变化
Fig. 4 The energy and momentum errors of the solitary
at $t \in [0, 40]$

3 结论

本文基于四阶 AVF 方法和拟谱方法,构造了 KdV 方程的高阶保能量格式. 利用构造的新格式数值模拟孤立波的演化并分析孤立波演化中能量误差和动量误差的变化. 数值结果表明,构造的高阶保能量格式是有效的,可以精确地保持 KdV 方程的离散能量守恒.

[参考文献]

- [1] FENG K, QIN M Z. Symplectic geometric algorithms for Hamiltonian systems [M]. Heidelberg, Hangzhou: Springer and Zhejiang Science and Technology Publishing House, 2010.
- [2] BRIDGES T J, REICH S. Multi-symplectic integrators; numerical schemes for Hamiltonian PDEs that conserve symplecticity [J]. Physics Letters A, 2001, 284(4): 184-193.
- [3] 秦孟兆, 王雨顺. 偏微分方程中的保结构算法 [M]. 杭州: 浙江科学技术出版社, 2012.
- [4] HAIRER E, LUBICH C, WANNER G. Geometric numerical integration; structure-preserving algorithms for ordinary differential equations [M]. 2nd. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2006.
- [5] QUISPÉL G R W, MCLAREN D I. A new class of energy-preserving numerical integration methods [J]. Journal of physics A: mathematical and theoretical, 2008, 41(4): 045206.
- [6] MCLACHLAN R I, QUISPÉL G R W, ROBIDOUX N. Geometric integration using discrete gradients [J]. Philosophical transactions of the royal society of London A: mathematical, physical and engineering sciences, 1999, 357(1754): 1 021-1 045.
- [7] CELLEDONI E, GRIMM V, MCLACHLAN R I, et al. Preserving energy resp. dissipation in numerical PDEs using the "Average Vector Field" method [J]. Journal of computational physics, 2012, 231(20): 6 770-6 789.
- [8] GONG Y Z, CAI J X, WANG Y S. Some new structure-preserving algorithms for general multi-symplectic formulations of Hamiltonian PDEs [J]. Journal of computational physics, 2014, 279: 80-102.
- [9] ZHAO P F, QIN M Z. Multisymplectic geometry and multisymplectic Preissmann scheme for the KdV equation [J]. Journal of physics A: mathematical and general, 2000, 33(18): 3 613.
- [10] WANG Y S, WANG B, QIN M Z. Numerical implementation of the multisymplectic Preissman scheme and its equivalent schemes [J]. Applied mathematics and computation, 2004, 149(2): 299-326.
- [11] WANG Y S, WANG B, CHEN X. Multisymplectic Euler box scheme for the KdV equation [J]. Chinese physics letters, 2007, 24(2): 312.
- [12] 宋松和, 陈亚铭, 朱华君. KdV 方程的多辛 Fourier 拟谱格式及其孤立波解的数值模拟 [J]. 安徽大学学报(自然科学版), 2010, 34(4): 1-7.
- [13] ASCHER U M, MCLACHLAN R I. Multisymplectic box schemes and the Korteweg-de Vries equation [J]. Applied numerical mathematics, 2004, 48(3): 255-269.
- [14] LÜ Z Q, WANG Y S, SONG Y Z. A new multi-symplectic scheme for the KdV equation [J]. Chinese physics letters, 2011, 28(6): 060205.
- [15] KARASÖZEN B, ŞİMŞEK G. Energy preserving integration of bi-Hamiltonian partial differential equations [J]. Applied mathematics letters, 2013, 26(12): 1 125-1 133.

[责任编辑: 陆炳新]