doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2017.04.007

无穷区间上分数阶微分方程积分边值问题正解的存在性

薛　婷,刘文斌,张　伟

(中国矿业大学数学学院,江苏 徐州 221116)

[**摘要**]　本文讨论了一类无穷区间上分数阶耦合微分方程积分边值问题,通过运用 Krasnoselskii 不动点定理,得到了边值问题至少存在一个正解,并举例验证了本文的结果.

[**关键词**]　无穷区间,分数阶耦合微分方程,Krasnoselskii 不动点定理,正解

[**中图分类号**]O175　[**文献标志码**]A　[**文章编号**]1001-4616(2017)04-0036-11

Existence of Positive Solutions of Fractional Differential Equation with Integral Boundary Conditions on the Infinite Interval

Xue Ting,Liu Wenbin,Zhang Wei

(Department of Mathematics,China University of Mining and Technology,Xuzhou 221116,China)

Abstract:This paper studys a coupled system of fractional differential equations with integral boundary conditions on an infinite interval. By the means of Krasnoselskii fixed point theorem in cones,it shows the boundary value problem has at least one positive solution. Moreover,an example is given to illustrate the main results.

Key words:infinite interval,fractional coupled differential equation,Krasnoselskii fixed point theorem,positive solution

分数阶微分方程在很多领域都有着广泛的应用. 例如:物理、化学、气体力学、电子动学、电子分析化学、生物、控制理论等. 分数阶微分为描述各种各样的材料和工艺的记忆和遗传性质提供了一个极好的工具,这也是分数阶微分方程相对于整数阶微分方程的一个最主要的优势. 目前,分数阶算子已经帮助人们改善了许多在现实世界中物理和可积方面的数学模型[1-7].

2009 年,Xi 等人在文献[8]中讨论了下列二阶微分方程积分边值问题:

$$\begin{aligned}
&u_1''(t)+f_1(t,u_1(t),u_2(t))=0,\quad t\in(0,\infty),\\
&u_2''(t)+f_2(t,u_1(t),u_2(t))=0,\quad t\in(0,\infty),\\
&u_1(0)=u_2(0)=0,\\
&u_1'(\infty)=\int_0^{+\infty}g_1(s)u_1(s)\,\mathrm{d}s,\ u_2'(\infty)=\int_0^{+\infty}g_2(s)u_2(s)\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

式中,$u_i'(\infty)=\lim\limits_{t\to\infty}u_i'(t)$,$i=1,2$.

无穷区间上的非线性分数阶微分方程解的存在性问题已经有很多学者研究[9-16]. 其中,赵向奎和葛渭高[14]运用 Leray-Sachuder 非线性迭代定理的思想研究了下面的分数阶边值问题正解的存在性.

$$\begin{cases}D^{\alpha}u(t)+f(t,u(t))=0, & 1<\alpha\leqslant 2,\\ u(0)=0, & \lim\limits_{t\to+\infty}D^{\alpha-1}u(t)=\beta u(\xi).\end{cases}$$

式中,$t\in J=[0,+\infty)$,$f\in C(J\times\mathbf{R},[0,+\infty))$,$0\leqslant\xi<\infty$ 且 D^{α} 是标准 Riemann-Liouville 分数阶微分. 然而,非

收稿日期:2017-02-17.
基金项目:国家自然科学基金(11271364).
通讯联系人:刘文斌,教授,研究方向:微分方程. E-mail:wblium@163.com

线性分数阶微分方程边值问题和研究还在初期阶段,许多方面的理论需要我们探究,尤其是在无穷区间上,分数阶微分方程积分边值问题的研究相对缺乏.

在本文中,我们研究了一类非线性分数阶耦合微分方程在无穷区间上的边值问题:

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha}u(t)+f_1(t,u(t),v(t))=0,t\in(0,\infty),\alpha\in(1,2] \\ D_{0+}^{\beta}v(t)+f_2(t,u(t),v(t))=0,t\in(0,\infty),\beta\in(1,2] \\ u(0)=v(0)=0, \\ D_{0+}^{\alpha-1}u(\infty)=\int_0^{+\infty}g_1(s)u(s)\mathrm{d}s,D_{0+}^{\beta-1}v(\infty)=\int_0^{+\infty}g_2(s)v(s)\mathrm{d}s. \end{cases} \tag{1}$$

这里 $D_{0^+}^{\alpha-1}u(\infty)=\lim\limits_{t\to+\infty}D_{0^+}^{\alpha-1}u(t)$, $D_{0^+}^{\beta-1}v(\infty)=\lim\limits_{t\to+\infty}D_{0^+}^{\beta-1}v(t)$, $f_i:J\times J\times J\to J$, $J\in[0,+\infty)$ 且 $D_{0^+}^{\alpha}$, $D_{0^+}^{\beta}$ 是标准的 Riemann-Liouville 分数阶微分.

本文的目的是给出积分边值问题(1)正解的存在性. 我们的证明是基于著名的 Krasnoselskii 不动点定理[17]. 即

定理 1　E 是一个 Banach 空间,P 是 E 中的一个锥且 $P\subset E$. 设 Ω_1,Ω_2 是 P 中的有界开子集,$0\in\Omega_1$, $\overline{\Omega}_1\subset\Omega_2$. $A:P\to P$ 是一个全连续算子,使得下面

$$\|A\omega\|\leqslant\|\omega\|,\omega\in\partial\Omega_1,\quad \|A\omega\|\geqslant\|\omega\|,\omega\in\partial\Omega_2,$$

或

$$\|A\omega\|\geqslant\|\omega\|,\omega\in\partial\Omega_1,\quad \|A\omega\|\leqslant\|\omega\|,\omega\in\partial\Omega_2,$$

成立,则 A 在 $\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1$ 有一个不动点.

本文考虑的是无穷区间上的分数阶积分边值问题. 因为区间 $[0,+\infty)$ 是非紧的,所以经典的 Arzela-Ascoli 定理不能直接用来判断紧性,另外,本文讨论的是分数阶耦合方程的边值问题,而二维问题与一维问题在某种程度上有本质不同,为了克服区间紧性的缺失和方程维数变化带来的困难,本文定义新的 Banach 空间和其上的锥,构造了格林函数并分析其性质,在此基础上,运用了 Krasnoselskii 不动点定理证明了积分边值问题(1)正解的存在性.

1　预备知识

为了方便读者阅读,我们先给出一些基本概念.

定义 1[18]　函数 $y:(0,+\infty)\to R$ 的 $\alpha>0$ 阶的 Riemann-Liouville 分数阶定义为

$$I_{0^+}^{\alpha}y(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}y(s)\mathrm{d}s.$$

等式的右端在 $(0,+\infty)$ 有定义.

定义 2[18]　连续函数 $f:(0,+\infty)\to R$ 的 $\alpha>0$ 阶的 Riemann-Liouville 分数阶导数定义为

$$D_{0^+}^{\alpha}f(t)=D^nI_{0^+}^{n-\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n\int_0^t\frac{f(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}s.$$

只要等式的右端在 $(0,+\infty)$ 有定义.

定义 3[8]　我们称 $f_i:J\times J\times J\to J$ 是一个 L^1-Carathéodory 函数,若

(1)对任何的 $(x,y)\in J\times J$, $f_i(\cdot,x,y)$ 可测;

(2)对每个 $t\in J$, $f_i(t,\cdot,\cdot)$ 几乎处处连续;

(3)对每个 $r_1,r_2>0$,存在 $\phi_{r_1,r_2}\in L^{\infty}[0,+\infty)$,对所有的 $x\in[0,r_1]$, $y\in[0,r_2]$,在 $t\in[0,+\infty)$ 几乎处处有

$$0\leqslant f_i(t,(1+t^{\alpha-1})x,(1+t^{\beta-1})y)\leqslant\phi_{r_1,r_2}(t).$$

式中,$\alpha,\beta\in(1,2]$, $J=[0,+\infty)$.

引理 1[14]　假定 $D_{0^+}^{\alpha}u(t)\in C(0,\infty)\cap L(0,\infty)$, $\alpha>0$,则

$$I_{0^+}^{\alpha}D_{0^+}^{\alpha}u(t)=u(t)+c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2}+\cdots+c_nt^{\alpha-n}.$$

式中,$c_i\in\mathbf{R}$, $i=1,2,\cdots,n$, $n=[\alpha]+1$.

在本文中,我们假设下面的条件成立:

$(H1)\, g_i\in L^1[0,+\infty)$是非负的,且$\int_0^{+\infty} g_1(t)t^{\alpha-1}\mathrm{d}t<\Gamma(\alpha)$, $\int_0^{+\infty} g_2(t)t^{\beta-1}\mathrm{d}t<\Gamma(\beta)$.

$(H2)\, f_i$ 是 L^1-Carathéodory 函数,$i=1,2$.

令

$$X_1=\left\{x:J\to\mathbf{R}:x\text{ 连续且}\sup_{t\in J^+}\frac{|x(t)|}{1+t^{\alpha-1}}<+\infty\right\},$$

定义范数为 $\|x\|_1=\sup_{t\in J}\frac{|x(t)|}{1+t^{\alpha-1}}$,

$$X_2=\left\{x:J\to\mathbf{R}:x\text{ 连续且}\sup_{t\in J^+}\frac{|x(t)|}{1+t^{\beta-1}}<+\infty\right\},$$

定义范数为 $\|x\|_2=\sup_{t\in J}\frac{|x(t)|}{1+t^{\beta-1}}$. 故$(X_1,\|\cdot\|_1)$和$(X_2,\|\cdot\|_2)$是一个 Banach 空间.

令

$$X=\left\{(x,y)\in X_1\times X_2:\sup_{t\in J}\frac{|x(t)|}{1+t^{\alpha-1}}<+\infty,\sup_{t\in J}\frac{|y(t)|}{1+t^{\beta-1}}<+\infty\right\},$$

定义范数 $\|(x,y)\|=\|x\|_1+\|y\|_2$. 容易证明$(X,\|\cdot\|)$是一个 Banach 空间.

引理 2 　假定$(H1)$成立,对任意的 $y_i\in L^1[0,+\infty)$,$y_i\geqslant 0$,$i=1,2$,则边值问题(1)有解 $x(t)=(u(t),v(t))$,且

$$u(t)=\int_0^{+\infty} G_1(t,s)y_1(s)\mathrm{d}s,v(t)=\int_0^{+\infty} G_2(t,s)y_2(s)\mathrm{d}s. \tag{2}$$

式中,

$$G_i(t,s)=G_{1i}(t,s)+G_{2i}(t,s),i=1,2.$$

$$G_{11}(t,s)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\begin{cases}t^{\alpha-1}-(t-s)^{\alpha-1}, & 0\leqslant s\leqslant t<+\infty,\\ t^{\alpha-1}, & 0\leqslant t\leqslant s<+\infty.\end{cases} \tag{3}$$

$$G_{12}(t,s)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\begin{cases}t^{\beta-1}-(t-s)^{\beta-1}, & 0\leqslant s\leqslant t<+\infty,\\ t^{\beta-1}, & 0\leqslant t\leqslant s<+\infty.\end{cases}$$

$$\begin{aligned}G_{21}(t,s)&=\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)-\int_0^{+\infty}g_1(t)t^{\alpha-1}\mathrm{d}t}\int_0^{+\infty}g_1(t)G_{11}(t,s)\mathrm{d}t,\\ G_{22}(t,s)&=\frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)-\int_0^{+\infty}g_2(t)t^{\beta-1}\mathrm{d}t}\int_0^{+\infty}g_2(t)G_{12}(t,s)\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{4}$$

证明 　考察下面边值问题

$$\begin{cases}D_{0+}^{\alpha}u(t)+y_1(t)=0, & t\in(0,\infty),\alpha\in(1,2]\\ u(0)=0, & D_{0+}^{+\infty}u(\infty)=\int_0^{+\infty}g_1(s)u(s)\mathrm{d}s.\end{cases} \tag{5}$$

由引理 1,将式(5)转化为等价的积分方程

$$u(t)=c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2}-I_{0+}^{\alpha}y_1(t),$$

由 $u_1(0)=0$,可得 $c_2=0$. 则

$$u(t)=c_1t^{\alpha-1}-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}y_1(s)\mathrm{d}s, \tag{6}$$

$$D_{0+}^{\alpha-1}u(\infty)=c_1\Gamma(\alpha)-\int_0^{+\infty}y_1(s)\mathrm{d}s,$$

结合边值条件 $D_{0+}^{\alpha-1}u(\infty)=\int_0^{+\infty}g_1(s)u(s)\mathrm{d}s$,可得

$$c_1=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^{+\infty}y_1(s)\mathrm{d}s+\int_0^{+\infty}g_1(s)u(s)\mathrm{d}s\right),\tag{7}$$

将(7)代入(6)得

$$\begin{aligned}u(t)=&\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^{+\infty}y_1(s)\mathrm{d}s+\int_0^{+\infty}g_1(s)u(s)\mathrm{d}s\right)-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}y_1(s)\mathrm{d}s=\\&\int_0^{+\infty}G_{11}(t,s)y_1(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}\int_0^{+\infty}g_1(s)u(s)\mathrm{d}s,\end{aligned}\tag{8}$$

将(8)两端乘以 $g_1(t)$,并关于 t 从 0 到+∞ 积分得

$$\int_0^{+\infty}g_1(s)u(s)\mathrm{d}s=\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)-\int_0^{+\infty}g_1(s)s^{\alpha-1}\mathrm{d}s}\int_0^{+\infty}g_1(s)\int_0^{+\infty}G_{11}(s,\tau)y_1(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s,\tag{9}$$

将式(9)代入式(8),得

$$\begin{aligned}u(t)=&\int_0^{+\infty}G_{11}(t,s)y_1(s)\mathrm{d}s+\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)-\int_0^{+\infty}g_1(s)s^{\alpha-1}\mathrm{d}s}\int_0^{+\infty}g_1(s)\int_0^{+\infty}G_{11}(s,\tau)y_1(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s=\\&\int_0^{+\infty}G_{11}(t,s)y_1(s)\mathrm{d}s+\int_0^{+\infty}G_{21}(t,\tau)y_1(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_0^{+\infty}G_1(t,s)y_1(s)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

同理,可求得 $v(t)$ 及相应的 $G_{12}(t,s)$,$G_{22}(t,s)$,进而定理得证.

引理 3[19]　由(3)定义的 $G_{1i}(t,s)$,$i=1,2$ 满足:

(i) $G_{1i}(t,s)$ 连续,且 $G_{1i}(t,s)\geqslant 0$,$(t,s)\in[0,+\infty)\times[0,+\infty)$;

(ii) $G_{1i}(t,s)$ 关于 t 严格增;

(iii) $G_{1i}(t,s)$ 关于 t 是个凹函数,当 $0<s<t<+\infty$;

(iv) $k>1$,$(t,s)\in[0,+\infty)\times[0,+\infty)$,$G_{1i}(t,s)$ 有下面性质:

$$\min_{\frac{1}{k}\leqslant t\leqslant k}\frac{G_{11}(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}\geqslant\frac{1}{4k^2(1+k^{\alpha-1})}\sup_{t\in[0,+\infty)}\frac{G_{11}(t,s)}{1+t^{\alpha-1}},\frac{G_{11}(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}\leqslant\frac{1}{\Gamma(\alpha)},$$

$$\min_{\frac{1}{k}\leqslant t\leqslant k}\frac{G_{12}(t,s)}{1+t^{\beta-1}}\geqslant\frac{1}{4k^2(1+k^{\beta-1})}\sup_{t\in[0,+\infty)}\frac{G_{12}(t,s)}{1+t^{\beta-1}},\frac{G_{12}(t,s)}{1+t^{\beta-1}}\leqslant\frac{1}{\Gamma(\beta)}.$$

引理 4　$k>1$,由(4)定义的 $G_{2i}(t,s)$,$i=1,2$ 满足

$$\min_{\frac{1}{k}\leqslant t\leqslant k}\frac{G_{21}(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}\geqslant\frac{1}{k^{2\alpha-2}(1+k^{\alpha-1})}\sup_{t\in[0,+\infty)}\frac{G_{21}(t,s)}{1+t^{\alpha-1}},\tag{10}$$

$$\min_{\frac{1}{k}\leqslant t\leqslant k}\frac{G_{22}(t,s)}{1+t^{\beta-1}}\geqslant\frac{1}{k^{2\beta-2}(1+k^{\beta-1})}\sup_{t\in[0,+\infty)}\frac{G_{22}(t,s)}{1+t^{\beta-1}}.\tag{11}$$

证明　对 $\forall k>1$,有

$$\min_{\frac{1}{k}\leqslant t\leqslant k}\frac{G_{21}(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}\geqslant\frac{\frac{1}{k^{\alpha-1}}}{1+k^{\alpha-1}}\frac{1+\frac{1}{k^{\alpha-1}}}{k^{\alpha-1}}\sup_{t\in[0,+\infty)}\frac{t^{\alpha-1}\int_0^{+\infty}g_1(t)G_{11}(t,s)\mathrm{d}t}{(1+t^{\alpha-1})(\Gamma(\alpha)-\int_0^{+\infty}g_1(t)t^{\alpha-1}\mathrm{d}t)}\geqslant\frac{1}{k^{2\alpha-2}(1+k^{\alpha-1})}\sup_{t\in[0,+\infty)}\frac{G_{21}(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}.$$

即(10)成立,同理可证得(11)成立.

引理 5　对固定的 $k>1$,令

$$\lambda_{1k}=\min\left\{\frac{1}{4k^2(1+k^{\alpha-1})},\frac{1}{k^{2\alpha-2}(1+k^{\alpha-1})}\right\},L_1=\frac{1}{\Gamma(\alpha)-\int_0^{+\infty}g_1(t)t^{\alpha-1}\mathrm{d}t},$$

$$\lambda_{2k}=\min\left\{\frac{1}{4k^2(1+k^{\beta-1})},\frac{1}{k^{2\beta-2}(1+k^{\beta-1})}\right\},L_2=\frac{1}{\Gamma(\beta)-\int_0^{+\infty}g_2(t)t^{\beta-1}\mathrm{d}t}.$$

则有

$$\min_{\frac{1}{k}\leqslant t\leqslant k}\frac{G_1(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}\geqslant\lambda_{1k}\sup_{t\in[0,+\infty)}\frac{G_1(t,s)}{1+t^{\alpha-1}},0\leqslant\frac{G_1(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}\leqslant L_1,\tag{12}$$

$$\min_{\frac{1}{k}\leqslant t\leqslant k}\frac{G_2(t,s)}{1+t^{\beta-1}}\geqslant\lambda_{2k}\sup_{t\in[0,+\infty)}\frac{G_2(t,s)}{1+t^{\beta-1}},0\leqslant\frac{G_2(t,s)}{1+t^{\beta-1}}\leqslant L_2.\tag{13}$$

证明　由引理 3,引理 4,可得 $\min\limits_{\frac{1}{k}\leqslant t\leqslant k}\frac{G_1(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}\geqslant\lambda_{1k}\sup\limits_{t\in[0,+\infty)}\frac{G_1(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}$显然成立. 又

$$\frac{G_1(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}\leqslant\frac{G_{11}(t,s)+G_{21}(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}\leqslant\frac{1}{\Gamma(\alpha)}+\frac{\int_0^{+\infty}g_1(t)t^{\alpha-1}\mathrm{d}t}{\Gamma(\alpha)\left(\Gamma(\alpha)-\int_0^{+\infty}g_1(t)t^{\alpha-1}\mathrm{d}t\right)}=L_1.$$

故式(12)得证,同理可证式(13)成立.

引理 6　假定($H1$)成立,则对 $y_i\in L^1[0,+\infty)$,$y_i\geqslant0$,$i=1,2$,以及 $k>1$,边值问题(1)的解 $x(t)=(u(t),v(t))$满足

$$u(t)\geqslant0,\min_{\frac{1}{k}\leqslant t\leqslant k}\frac{u(t)}{1+t^{\alpha-1}}\geqslant\lambda_{1k}\|u\|_1,v(t)\geqslant0,\min_{\frac{1}{k}\leqslant t\leqslant k}\frac{v(t)}{1+t^{\beta-1}}\geqslant\lambda_{2k}\|v\|_2.$$

证明　对任意的 $t\in J$,由 $G_i(t,s)\geqslant0$,$y_i\geqslant0$,有 $u(t)\geqslant0$,$v(t)\geqslant0$. 再由引理 5,对任意的 $t\in[\frac{1}{k},k]$,($k>1$),

$$\min_{\frac{1}{k}\leqslant t\leqslant k}\frac{u(t)}{1+t^{\alpha-1}}\geqslant\int_0^{+\infty}\min_{\frac{1}{k}\leqslant t\leqslant k}\frac{G_1(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}y_1(s)\mathrm{d}s\geqslant\lambda_{1k}\sup_{t\in[0,+\infty)}\frac{\int_0^{+\infty}G_1(t,s)y_1(s)\mathrm{d}s}{1+t^{\alpha-1}}=\lambda_{1k}\|u\|_1.$$

同理可证 $\min\limits_{\frac{1}{k}\leqslant t\leqslant k}\frac{v(t)}{1+t^{\beta-1}}\geqslant\lambda_{2k}\|v\|_2$.

令

$$P_1=\left\{u\in X_1:u(t)\geqslant0,\min_{\frac{1}{k}\leqslant t\leqslant k}\frac{u(t)}{1+t^{\alpha-1}}\geqslant\lambda_{1k}\|u\|_1,k>1\right\},$$

$$P_2=\left\{v\in X_2:v(t)\geqslant0,\min_{\frac{1}{k}\leqslant t\leqslant k}\frac{v(t)}{1+t^{\beta-1}}\geqslant\lambda_{2k}\|v\|_2,k>1\right\},$$

$P=P_1\times P_2$,显然 $P\subset X_1\times X_2$ 是 X 中的一个锥.

由引理 2,问题(1)等价于

$$x(t)=(u(t),v(t))=\left(\int_0^{+\infty}G_1(t,s)f_1(s,u(s),v(s))\mathrm{d}s,\int_0^{+\infty}G_2(t,s)f_2(s,u(s),v(s))\mathrm{d}s\right).$$

定义 $T_1:P\to P_1$

$$T_1(u,v)(t)=\int_0^{+\infty}G_1(t,s)f_1(s,u(s),v(s))\mathrm{d}s.$$

定义 $T_2:P\to P_2$

$$T_2(u,v)(t)=\int_0^{+\infty}G_2(t,s)f_2(s,u(s),v(s))\mathrm{d}s,$$

令

$$T(u,v)(t)=(T_1(u,v)(t),T_2(u,v)(t)).$$

引理 7[8,20]　X 是$[0,+\infty)$上的有界连续向量函数全体,令 $S\subset X$,S 是相对紧的,如果下面的条件满足:

(a)S 中的函数在 X 上是一致有界的;

(b)S 中的函数在$[0,+\infty)$的任意紧区间上是等度连续的;

(c)S 中的函数在无穷区间上等度收敛. 即对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $T=T(\varepsilon)>0$,使得对任意的 $t_1,t_2\geqslant T$,

$y\in S$,有

$$|y(t_1)-y(t_2)|<\varepsilon.$$

引理 8　假定($H1$),($H2$)成立,则 $T:P\to P$ 是全连续的.

证明　(1)$T:P\to P$. 对任意的$(u,v)\in P$,由引理 6,有

$$T_1(u,v)\geqslant 0,\ \min_{\frac{1}{k}\leqslant t\leqslant k}\frac{T_1(u,v)(t)}{1+t^{\alpha-1}}\geqslant \lambda_{1k}\|T_1(u,v)\|_1,$$

$$T_2(u,v)\geqslant 0,\ \min_{\frac{1}{k}\leqslant t\leqslant k}\frac{T_2(u,v)(t)}{1+t^{\beta-1}}\geqslant \lambda_{2k}\|T_2(u,v)\|_2,$$

所以,$T(u,v)\in P$.

(2)$T:P\to P$ 是连续的. 对任意的收敛序列$\{(u_n,v_n)\}\to(u,v)$,即当 $n\to+\infty$ 时,$u_n\to u,v_n\to v$,则存在常数 $r_1,r_2>0$,使得

$$\|u_n\|_1,\ \|u\|_1\leqslant r_1 \text{ 和 } \|v_n\|_2,\ \|v\|_2\leqslant r_2.$$

由($H2$),对几乎处处的 $s\in[0,+\infty)$,当 $n\to+\infty$ 有

$$|f_1(s,u_n(s),v_n(s))-f_1(s,u(s),v(s))|\to 0,n\to+\infty,$$

$$|f_1(s,u_n(s),v_n(s))-f_1(s,u(s),v(s))|\leqslant 2\phi_{r_1,r_2}(s).$$

由勒贝格控制收敛定理,有

$$\|T_1(u_n,v_n)-T_1(u,v)\|_1\leqslant\sup_{t\in[0,+\infty)}\int_0^{+\infty}\frac{G_1(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}|f_1(s,u_n(s),v_n(s))-f_1(s,u(s),v(s))|\mathrm{d}s\to 0,$$

所以

$$\|T_1(u_n,v_n)-T_1(u,v)\|_1\to 0,n\to+\infty.$$

因此,T_1 是连续的,同理可证 T_2 是连续的,从而 $T:P\to P$ 是连续的.

(3)$T:P\to P$ 是相对紧的.

1°　T 是一致有界的.

设 Ω 是 P 中的有界集,对任意的$(u,v)\in\Omega$,则存在 $r_1,r_2>0$,使 $\|u\|_1\leqslant r_1$,$\|v\|_2\leqslant r_2$.

$$\|T_1(u,v)(t)\|_1=\sup_{t\in[0,+\infty)}\frac{1}{1+t^{\alpha-1}}\left|\int_0^{+\infty}G_1(t,s)f_1(s,u(s),v(s))\mathrm{d}s\right|\leqslant L_1\int_0^{+\infty}\phi_{r_1,r_2}(s)\mathrm{d}s<+\infty,$$

同理

$\|T_2(u,v)(t)\|_2<+\infty$,从而 $\|T(u,v)(t)\|<+\infty$,即 $T\Omega$ 是有界的.

2°　T 在$[0,+\infty)$的任意紧区间上等度连续.

对任意的 $N_0\in J_+$,$t_1,t_2\in[0,N_0]$,不失一般性,假设 $t_1<t_2$,则有

$$\left|\frac{T_1(u,v)(t_1)}{1+t_1^{\alpha-1}}-\frac{T_1(u,v)(t_2)}{1+t_2^{\alpha-1}}\right|\leqslant\int_0^{+\infty}\left|\frac{G_{11}(t_1,s)}{1+t_1^{\alpha-1}}-\frac{G_{11}(t_2,s)}{1+t_1^{\alpha-1}}\right|f_1(s,u(s),v(s))\mathrm{d}s+$$

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{G_{11}(t_2,s)}{1+t_1^{\alpha-1}}-\frac{G_{11}(t_2,s)}{1+t_2^{\alpha-1}}\right|f_1(s,u(s),v(s))\mathrm{d}s+\frac{\int_0^{+\infty}g_1(s)s^{\alpha-1}\mathrm{d}s}{\Gamma(\alpha)\left(\Gamma(\alpha)-\int_0^{+\infty}g_1(s)s^{\alpha-1}\mathrm{d}s\right)}\times$$

$$\left|\frac{t_1^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}-\frac{t_2^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}\right|\int_0^{+\infty}f_1(s,u(s),v(s))\mathrm{d}s.$$

式中,

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{G_{11}(t_1,s)}{1+t_1^{\alpha-1}}-\frac{G_{11}(t_2,s)}{1+t_1^{\alpha-1}}\right|f_1(s,u(s),v(s))\mathrm{d}s\leqslant\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}\frac{(t_2^{\alpha-1}-t_1^{\alpha-1})+[(t_2-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1}]}{1+t_1^{\alpha-1}}\phi_{r_1,r_2}(s)\mathrm{d}s+$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}\frac{(t_2^{\alpha-1}-t_1^{\alpha-1})+(t_2-s)^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}\phi_{r_1,r_2}(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_2}^{+\infty}\frac{t_2^{\alpha-1}-t_1^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}\phi_{r_1,r_2}(s)\mathrm{d}s\to 0,\quad(t_1\to t_2).$$

类似的,有

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{G_{11}(t_2,s)}{1+t_1^{\alpha-1}}-\frac{G_{11}(t_2,s)}{1+t_2^{\alpha-1}}\right|f_1(s,u(s),v(s))\mathrm{d}s\to 0,\quad (t_1\to t_2).$$

所以

$$\left|\frac{T_1(u_1,u_2)(t_1)}{1+t_1^{\alpha-1}}-\frac{T_1(u_1,u_2)(t_2)}{1+t_2^{\alpha-1}}\right|\to 0,\quad (t_1\to t_2).$$

因此,$T_1\Omega$ 在$[0,+\infty)$的任意紧区间上等度连续,同理可证 $T_2\Omega$ 在$[0,+\infty)$的任意紧区间上等度连续,从而可得 $T\Omega$ 在$[0,+\infty)$的任意紧区间上等度连续.

3° T 在无穷远处等度收敛.

因为 $\phi_{r_1,r_2}(t)\in L^1[0,+\infty)$,有 $\int_0^{+\infty}\phi_{r_1,r_2}(s)\mathrm{d}s<+\infty$.故对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $L_3>0$ 使

$$\int_{L_3}^{+\infty}\phi_{r_1,r_2}(s)\mathrm{d}s<\varepsilon. \tag{14}$$

由于 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha-1}}=1$,故存在 $L_4>0$,当 $t_1,t_2>L_4$ 时,

$$\left|\frac{t_1^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}-\frac{t_2^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}\right|\leqslant\left|1-\frac{t_1^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}\right|+\left|1-\frac{t_2^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}\right|<\varepsilon. \tag{15}$$

类似的,由 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{(t-L_3)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha-1}}=1$,存在 $L_5>L_3>0$,当 $t_1,t_2>L_5$ 时,且 $0\leqslant s\leqslant L_3$,有

$$\left|\frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}-\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}\right|\leqslant\left|1-\frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}\right|+\left|1-\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}\right|\leqslant\left|1-\frac{(t_1-L_3)^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}\right|+\left|1-\frac{(t_2-L_3)^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}\right|<\varepsilon. \tag{16}$$

取 $L_0>\max\{L_4,L_5\}$,$t_1,t_2>L_0$,由(14)-(16),可得

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^{+\infty}\frac{G_{11}(t_2,s)}{1+t_2^{\alpha-1}}f_1(s,u(s),v(s))\mathrm{d}s-\int_0^{+\infty}\frac{G_{11}(t_1,s)}{1+t_1^{\alpha-1}}f_1(s,u(s),v(s))\mathrm{d}s\right|\leqslant\\&\frac{2\varepsilon}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}\phi_{r_1,r_2}(s)\mathrm{d}s+\frac{\varepsilon+1}{\Gamma(\alpha)}\int_{L_3}^{+\infty}\phi_{r_1,r_2}(s)\mathrm{d}s+\frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)}\int_{L_3}^{+\infty}\phi_{r_1,r_2}(s)\mathrm{d}s\leqslant\\&\left(\frac{2}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}\phi_{r_1,r_2}(s)\mathrm{d}s+\frac{2\varepsilon+1}{\Gamma(\alpha)}\right)\varepsilon.\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^{+\infty}\frac{G_{21}(t_2,s)}{1+t_2^{\alpha-1}}f_1(s,u(s),v(s))\mathrm{d}s-\int_0^{+\infty}\frac{G_{21}(t_1,s)}{1+t_1^{\alpha-1}}f_1(s,u(s),v(s))\mathrm{d}s\right|\leqslant\\&\frac{\varepsilon\int_0^{+\infty}g_1(s)s^{\alpha-1}\mathrm{d}s}{\Gamma(\alpha)(\Gamma(\alpha)-\int_0^{+\infty}g_1(s)s^{\alpha-1}\mathrm{d}s)}\int_0^{+\infty}\phi_{r_1,r_2}(s)\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{18}$$

由式(17),(18)可得,对任意的 $\varepsilon>0$,$(u,v)\in\Omega$,存在一个充分大的 $N>0$,当 $t_1,t_2>N$ 时,有

$$\left|\frac{T_1(u,v)(t_1)}{1+t_1^{\alpha-1}}-\frac{T_1(u,v)(t_2)}{1+t_2^{\alpha-1}}\right|<\varepsilon.$$

所以,T_1 在无穷区间上等度收敛,同理可证 T_1 在无穷区间上等度收敛,从而 $T:P\to P$ 在无穷区间上等度收敛.

故 $T\Omega$ 在 P 上是相对紧的,进而 $T:P\to P$ 是全连续的.

2 主要结论

我们假定:

($H3$)存在 J 上非负函数 $a_i\in L^1[0,+\infty)$,$a_i(t)\neq 0$ 和连续函数 $h_i\in C[J\times J,J]$,$i=1,2$,有

$$f_i(t,x,y)\leqslant a_i(t)h_i(x,y),\ t,x,y\in J,$$

$$\int_0^{+\infty}s^{\alpha-1}a_1(s)\mathrm{d}s<+\infty,\ \int_0^{+\infty}s^{\beta-1}a_2(s)\mathrm{d}s<+\infty.$$

定义

$$h_i^0=\overline{\lim_{x+y\to 0^+}}\frac{h_i(x,y)}{x+y},\quad h_i^\infty=\overline{\lim_{x+y\to +\infty}}\frac{h_i(x,y)}{x+y},$$

$$f_i^0=\overline{\lim_{x+y\to 0^+}}\inf_{\frac{1}{k}\leqslant t\leqslant k}\frac{f_i(t,x,y)}{x+y},\quad f_i^\infty=\overline{\lim_{x+y\to +\infty}}\inf_{\frac{1}{k}\leqslant t\leqslant k}\frac{f_i(t,x,y)}{x+y},$$

$$N_1=\min\left\{\inf_{\frac{1}{k}\leqslant t\leqslant k}\int_{1/k}^{k}\frac{G_1(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}(1+s^{\alpha-1})\,\mathrm{d}s,\ \inf_{\frac{1}{k}\leqslant t\leqslant k}\int_{1/k}^{k}\frac{G_1(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}(1+s^{\beta-1})\,\mathrm{d}s\right\},$$

$$N_2=\min\left\{\inf_{\frac{1}{k}\leqslant t\leqslant k}\int_{1/k}^{k}\frac{G_2(t,s)}{1+t^{\beta-1}}(1+s^{\alpha-1})\,\mathrm{d}s,\ \inf_{\frac{1}{k}\leqslant t\leqslant k}\int_{1/k}^{k}\frac{G_2(t,s)}{1+t^{\beta-1}}(1+s^{\beta-1})\,\mathrm{d}s\right\},$$

$$n_1=\max\left\{\sup_{t\in J}\int_0^{+\infty}\frac{G_1(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}(1+s^{\alpha-1})a_1(s)\,\mathrm{d}s,\sup_{t\in J}\int_0^{+\infty}\frac{G_1(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}(1+s^{\beta-1})a_1(s)\,\mathrm{d}s\right\},$$

$$n_2=\max\left\{\sup_{t\in J}\int_0^{+\infty}\frac{G_2(t,s)}{1+t^{\beta-1}}(1+s^{\alpha-1})a_2(s)\,\mathrm{d}s,\sup_{t\in J}\int_0^{+\infty}\frac{G_2(t,s)}{1+t^{\beta-1}}(1+s^{\beta-1})a_2(s)\,\mathrm{d}s\right\}.$$

式中,$i=1,2$.

定理 2　假定($H1$)-($H3$)成立,并满足

(1)令 $\lambda_k=\min\{\lambda_{1k},\lambda_{2k}\}$,存在正整数 $k,m_i,M_i,k>1$,使得

$$m_1n_1+m_2n_2\leqslant 1,\lambda_kM_1N_1+\lambda_kM_2N_2\geqslant 1;$$

(2)$0\leqslant h_i^0<m_i,M_i<f_i^\infty<+\infty$.

则边值问题(1)至少有一个正解.

证明　由 $0\leqslant h_i^0<m_i$,则存在 $\delta_1>0(\delta_1<1)$,使得

$$h_i(u_1,u_2)\leqslant m_i(u+v),u+v\in(0,\delta_1],$$

令

$$\Omega_1=\{(u,v)\in P:\|(u,v)\|<\delta_1\},$$

对任意的$(u,v)\in\partial\Omega_1,t\in J$,有

$$\frac{T_1(u,v)(t)}{1+t^{\alpha-1}}\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{G_1(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}a_1(s)m_1(u(s)+v(s))\,\mathrm{d}s\leqslant m_1\|u\|_1\int_0^{+\infty}\frac{G_1(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}a_1(s)(1+s^{\alpha-1})\,\mathrm{d}s+$$

$$m_1\|v\|_2\int_0^{+\infty}\frac{G_1(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}a_1(s)(1+s^{\beta-1})\,\mathrm{d}s\leqslant m_1n_1(\|u\|_1+\|v\|_2).$$

同理可得$\dfrac{T_2(u,v)(t)}{1+t^{\beta-1}}\leqslant m_2n_2(\|u\|_1+\|v\|_2)$.

所以

$$\|T(u,v)(t)\|\leqslant m_1n_1(\|u\|_1+\|v\|_2)+m_2n_2(\|u\|_1+\|v\|_2)\leqslant\|(u,v)\|,$$

因此

$$\|T(u,v)\|\leqslant\|(u,v)\|,(u,v)\in\partial\Omega_1.\tag{19}$$

由 $M_i\leqslant f_i^\infty<+\infty$,则存在 $\delta_2>1$,使得

$$f_i(t,u,v)\geqslant M_i(u+v),t\in\left[\frac{1}{k},k\right],u+v>\lambda_k\delta_2.$$

令

$$\Omega_2=\{(u,v)\in P:\|(u,v)\|<\delta_2\}.$$

对任意的$(u,v)\in\overline{\Omega}_2\subset P$,由引理 6,有

$$\min_{\frac{1}{k}\leqslant t\leqslant k}\left(\frac{u(t)}{1+t^{\alpha-1}}+\frac{v(t)}{1+t^{\beta-1}}\right)\geqslant\lambda_k(\|u\|_1+\|v\|_2).$$

对任意的$(u,v)\in\partial\Omega_2,t\in J$,有

$$\frac{T_1(u,v)(t)}{1+t^{\alpha-1}}\geqslant\int_{1/k}^{k}\frac{G_1(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}M_1(u(s)+v(s))\mathrm{d}s\geqslant\lambda_kM_1\|u\|_1\int_{1/k}^{k}\frac{G_1(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}(1+s^{\alpha-1})\mathrm{d}s+$$
$$\lambda_kM_1\|v\|_2\int_{1/k}^{k}\frac{G_1(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}(1+s^{\beta-1})\mathrm{d}s\geqslant\lambda_kM_1N_1(\|u\|_1+\|v\|_2).$$

同理可得

$$\frac{T_2(u,v)(t)}{1+t^{\beta-1}}\geqslant\lambda_kM_2N_2(\|u\|_1+\|v\|_2)$$

所以

$$\|T(u,v)(t)\|\geqslant\lambda_kM_1N_1(\|u\|_1+\|v\|_2)+\lambda_kM_2N_2(\|u\|_1+\|v\|_2)\geqslant\|(u,v)\|,$$

因此

$$\|T(u,v)\|\geqslant\|(u,v)\|,(u,v)\in\partial\Omega_2. \tag{20}$$

由(19),(20)和定理 1,我们知道 T 在 $P\cap(\bar{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$ 至少有一个不动点,因此边值问题(1)至少有一个正解.

定理 3　假定($H1$)-($H3$)成立,并满足

(1)令 $\lambda_k=\min\{\lambda_{1k},\lambda_{2k}\}$,存在正整数 $k,q_i,Q_i,k>1$,使得

$$0\leqslant h_i^{\infty}<q_i,Q_i<f_i^0<+\infty;$$

(2)$q_1n_1+q_2n_2\leqslant1,\lambda_kQ_1N_1+\lambda_kQ_2N_2\geqslant1$.

则边值问题(1)至少有一个正解.

证明　由 $Q_i\leqslant f_i^0<+\infty$,则存在 $\delta_3>0(\delta_3<1)$,使得

$$f_i(t,u,v)\geqslant Q_i(u+v),t\in\left[\frac{1}{k},k\right],\quad 0<u+v<\delta_3.$$

令

$$\Omega_3=\{(u,v)\in P:\|(u,v)\|<\delta_3\}.$$

对任意的$(u,v)\in\bar{\Omega}_3\subset P$,由定理 2 的证明,可得对任意的$(u,v)\in\partial\Omega_3,t\in J$,有

$$\frac{T_1(u,v)(t)}{1+t^{\alpha-1}}\geqslant\lambda_kQ_1\|u\|_1\int_{1/k}^{k}\frac{G_1(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}(1+s^{\alpha-1})\mathrm{d}s+\lambda_kQ_1\|v\|_2\int_{1/k}^{k}\frac{G_1(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}(1+s^{\beta-1})\mathrm{d}s\geqslant$$
$$\lambda_kQ_1N_1(\|u\|_1+\|v\|_2).$$

同理可得$\dfrac{T_2(u,v)(t)}{1+t^{\beta-1}}\geqslant\lambda_kQ_2N_2(\|u\|_1+\|v\|_2)$.

所以

$$\|T(u,v)(t)\|\geqslant\lambda_kQ_1N_1(\|u\|_1+\|v\|_2)+\lambda_kQ_2N_2(\|u\|_1+\|v\|_2)\geqslant\|(u,v)\|.$$

因此

$$\|T(u,v)\|\geqslant\|(u,v)\|,(u,v)\in\partial\Omega_3. \tag{21}$$

由 $0\leqslant h_i^{\infty}<q_i$,则存在一个 $R_0>0$,使得

$$h_i(u,v)\leqslant q_i(u+v),(u+v>R_0), \tag{22}$$

定义 $p_i=\max\limits_{0\leqslant u_1+u_2\leqslant R^0}h_i(u,v)$,结合(22)有

$$h_i(u,v)\leqslant p_i+q_i(u+v),(u,v)\in X_1\times X_2.$$

存在 $\delta_4(\delta_4>\max\{1,\delta_3,(p_1n_1+p_2n_2)(1-q_1n_1-q_2n_2)^{-1}\})$.

令

$$\Omega_4=\{(u,v)\in P:\|(u,v)\|<\delta_4\}.$$

对任意的$(u,v)\in\partial\Omega_4,t\in J$,有

$$\frac{T_1(u,v)(t)}{1+t^{\alpha-1}}\leqslant q_1\|u\|_1\int_0^{+\infty}\frac{G_1(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}a_1(s)(1+s^{\alpha-1})\mathrm{d}s+q_1\|v\|_2\int_0^{+\infty}\frac{G_1(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}a_1(s)(1+s^{\beta-1})\mathrm{d}s+$$

$$p_1\int_0^{+\infty}\frac{G_1(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}a_1(s)(1+s^{\alpha-1})\mathrm{d}s\leqslant q_1n_1(\|u\|_1+\|v\|_2)+p_1n_1.$$

同理可得$\dfrac{T_2(u,v)(t)}{1+t^{\beta-1}}\leqslant q_2n_2(\|u\|_1+\|v\|_2)+p_2n_2.$

所以

$$\|T(u,v)(t)\|\leqslant(q_1n_1+q_2n_2)(\|u\|_1+\|v\|_2)+p_1n_1+p_2n_2\leqslant$$
$$(\|u\|_1+\|v\|_2)\left(q_1n_1+q_2n_2+\frac{p_1n_1+p_2n_2}{\|u\|_1+\|v\|_2}\right)\leqslant\|(u,v)\|.$$

因此

$$\|T(u,v)\|\leqslant\|(u,v)\|,(u,v)\in\partial\Omega_4. \tag{23}$$

由(21),(23)和定理1,我们知道T在$P\cap(\bar{\Omega}_4\backslash\Omega_3)$至少有一个不动点,因此边值问题(1)至少有一个正解.

3　例子

考虑下面的边值问题:

$$\begin{cases}D_{0^+}^{\frac{3}{2}}u(t)+(u+v)^2\mathrm{e}^{-t}=0,\\ D_{0^+}^{\frac{3}{2}}v(t)+(u+v)^2\mathrm{e}^{-t}=0,\\ u(0)=v(0)=0,\\ D,_{0^+}^{1/2}u(\infty)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2s}u(s)\mathrm{d}s,D,_{0^+}^{1/2}v(\infty)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2s}v(s)\mathrm{d}s.\end{cases}$$

式中,$f_1(t,u,v)=(u+v)^2\mathrm{e}^{-t}$,$f_2(t,u,v)=(u+v)^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-t}$,$g_1(s)=g_2(s)=\mathrm{e}^{-2s}$,$a_1(t)=a_2(t)=\mathrm{e}^{-t}$,$h_1(u,v)=(u+v)^2$,$h_2(u,v)=(u+v)^{\frac{3}{2}}$.

常数$r_1,r_2>0$,取$\phi_{r_1,r_2}(t)=(1+r_1+r_2)^2(1+t)^2\mathrm{e}^{-t}$. 取$k=2$,则$\lambda_k\approx\dfrac{1}{39}$.

由于$n_i\leqslant1.89$,$N_i\geqslant0.08$,取$m_i=\dfrac{1}{4}$,$M_i=250$. 则定理2的条件满足. 所以由定理1,上述例子中的边值问题至少有一个正解.

［参考文献］

[1] BALEANU D,DIETHELM K,SCALAS E,et al. Fractional calculus models and numerical methods,series on complexity[J]. Cnc,2012.

[2] KILBAS A A,SRIVASTAVA H M,TRUJILLO J J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations,Volume 204 (North-Holland Mathematics Studies)[M]. Elsevier,2006.

[3] LASKSHMIKANTHAM V,LEELA S,VASUNDHARA D J. Theory of Fractional Dynamic Systems[M]. Cambridge:Cambridge Scientific Publishers,2009.

[4] PODLUBNY I. Fractional Differential Equations[C]. Mathematics in Science Engineering,1999.

[5] SABATIER J,AGRAWAL O P,MACHADO J A T. Advances in fractional calculus. Theoretical developments and applications in physics and engineering[J]. Biochemical journal,2014,361:97-103.

[6] EL-BORAI M M. Some probability densities and fundamental solutions of fractional evolution equations[J]. Chaos solitons fractals,2002,14(3):433-440.

[7] XU H. Analytical approximations for a population growth model with fractional order[J]. Commun nonlinear Sci Numer Simul,2009,14(5):1 978-1 983.

[8] XI S L,JIA M,JI H P. Positive solutions of boundary value problems for systems of second-order differential equations with integral boundary condition on the half-line[J]. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations,2009,

31(31):1-13.
[9] AGARWAL R P,BENCHOHRA M,HAMANI S,et al. Boundary value problems for differential equations involving Riemann-Liouville fractional derivative on the half-line[J]. Dyn Contin Discrete Impuls Syst,A Math Anal,2011,18(2):235-244.
[10] ARARA A,BENCHOHRA M,HAMIDI N,et al. Fractional order differential equations on an unbounded domain[J]. Nonlinear Anal,2010,72(2):580-586.
[11] CHEN F,ZHOU Y. Attractivity of fractional functional differential equations[J]. Comput Math Appl,2011,62(3):1 359-1 369.
[12] LIANG S,ZHANG J. Existence of multiple positive solutions for m-point fractional boundary value problems on an infinite interval[J]. Mathematical and computer modelling,2011,54(5/6):1 334-1 346.
[13] SU X,ZHANG S. Unbounded solutions to a boundary value problem of fractional order on the half-line[J]. Comput Math Appl,2011,61(4):1 079-1 087.
[14] ZHAO X K,GE W G. Unbounded solutions for a fractional boundary value problem on the infinite interval[J]. Acta Appl Math,2010,109(2):495-505.
[15] ZHANG L H,AHMSD B,Wang G T. Successive iterations for positive extremal solutions of nonlinear fractional differential equations on a half-line[J]. Bull Aust Math Soc,2015,91(1):116-128.
[16] ZHANG W,LIU W B,CHEN T Y. Soluability for a fractional p-Laplacian multipoint boundary value problem at resonance on infinite interval[J]. Advances in difference equations,2016,1:1-14.
[17] GUO D,Lakshmikantham V. Nonlinear problems in abstract cones[M]. Beijing Academic Press,1988.
[18] 白占兵. 分数阶微分方程边值问题理论及应用[M]. 北京:中国科学技术出版社,2013.
[19] LIANG S H,ZHANG J H. Existence of three positive solutions of m-point boundary value problems for some nonlinear fractional differential equations on an infinite interval[J]. Computers and mathematics with applications,2011,61(11):3 343-3 354.
[20] CORDUNEANU C. Integral equations and stability of feedback systems[M]. New York:Academic press,1973:208-209.

[责任编辑:陆炳新]