doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2018.01.003

反应扩散模型解的爆破与避免爆破

江成顺

(武汉学院信息及传播学院,湖北 武汉 430212)

[**摘要**]　一些动态实际应用模型,如某些反应扩散模型,在一定条件下,可能会出现解的 Blow up(爆破)现象. 但若能得知某一时刻将会出现 Blow up 现象,往往有某些特殊的办法来避免解发生 Blow up. 基于此,文中首先讨论了某些反应扩散模型的局部解的存在唯一性;然后利用构造辅助问题的方法和将偏微分方程转化为 Volterra 积分方程的技巧,给出了利用格林函数表示的模型局部解的解析表达式,在此基础上论证了模型解的爆破点集的有关性质,最后研究了相应模型如何避免解发生 Blow up 现象.

[**关键词**]　反应扩散模型,解的爆破,格林函数,Volterra 积分,移动媒质,避免爆破

[**中图分类号**]O175.26　[**文献标志码**]A　[**文章编号**]1001-4616(2018)01-0009-08

Blow-up of Solutions and Avoidance of Blow-up for Some Reaction Diffusion Models

Jiang Chengshun

(Information and Communication,Wuhan College,Wuhan 430212,China)

Abstract:The actual application of some dynamic models,such as some reaction diffusion models,under certain conditions,there may be solutions of Blow up phenomenon. But when that moment will appear Blow up phenomenon,often due to some special measures to avoid the occurrence of Blow up. In view of this,at first,the author discussed the existence and uniqueness of local solutions to the corresponding reaction diffusion models. Then by using the method of constructing auxiliary problem,and the partial differential equation being transformed into Volterra integral equation techniques,the local solution of the models is given by using Green function represents. And based on the analysis of expression,the paper discussed the properties of the set for the Blow-up solutions of the models. Finally,the paper studied how to avoid the occurrence of Blow up solutions for the corresponding models.

Key words:reaction diffusion models,blow-up of solutions,green function,Volterra integral,mobile media,avoidance of blow-up

许多热力学、流体力学和化学、生物学等科学工程问题的应用模型,可以用反应—扩散方程(组)或反应—对流—扩散方程(组)的定解问题来定量定性地加以描述. 文献[1-3]及其引用文献等已系统地研究了一些线性与非线性的反应扩散模型解的定性性质和数值模拟性质等. 特别地,Bandle C 和 Brunner H 讨论了多维区域中反应扩散模型解发生爆破现象和研究爆破点的位置[1].

本文试图讨论一些反应扩散模型的以下问题:

(1)反应扩散方程(组)初边值问题的局部解发生 Blow up 现象的充分条件;

(2)反应扩散模型的解发生 Blow up 现象的点的位置和爆破点集的类型(单点、局部或者全局);

(3)避免反应扩散模型的解发生 Blow up 现象的特殊方法.

为了简明起见,假设读者均已熟知下文陈述过程中所直接引用的一些相关函数空间与微分算子的定义与记号. 此外,下文还特别假设:对于正整数 N,令 N 维单位球内 $B_N=\{\|\boldsymbol{x}\|\in R^N:\|\boldsymbol{x}\|_{R^N}<1\}$,其中点向量 $\boldsymbol{x}=(r_1,r_2,\cdots,r_N)$,向量 $\boldsymbol{x}$ 的范数为 $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{N}|r_i|^2}$. 定义微分算子 L_1 满足 $L_1u=u_t-a\Delta u$,其中 a 是一个

收稿日期:2017-03-12.

基金项目:湖北省科技厅自然科学计划项目(2016CDC243).

通讯联系人:江成顺,博士,教授,研究方向:信息与计算科学,物联网工程等. E-mail:csjiang2005@ 126.com

正常数.

考虑如下反应扩散模型:

$$L_1u=f(u(\boldsymbol{x},t)),\quad (\boldsymbol{x},t)\in B_N\times R^+,\tag{1}$$

$$u(\boldsymbol{x},0)=u_0(\boldsymbol{x})\geqslant 0,\quad \boldsymbol{x}\in\bar{B}_N,\tag{2}$$

$$u(\boldsymbol{x},t)=0,\quad (\boldsymbol{x},t)\in\partial B_N\times[0,\infty).\tag{3}$$

点向量 $\boldsymbol{x}=(r_1,r_2,\cdots,r_N)\in B_N$ 是给定的点. $f\in C^2([0,\infty))$, $f(0)>0$,对所有的 $s>0$ 有 $f'(s)>0$, $f''(s)\geqslant 0$,并且 $\int_0^\infty f^{-1}(s)\mathrm{d}s<\infty$. $u_0(\boldsymbol{x})\in C^{2+\alpha}(\bar{B}_N)(0<\alpha<1)$满足相容性条件. 该问题模拟的情形是:球形媒质 $\bar{B}_N$ 均匀并且各向同性,但是反应仅发生在某个给定点 $\boldsymbol{x}_0$. 根据Schauder估计[2-3],若对某个 $0<T<\infty$ 有:(1) $\lim\limits_{t\to T-}\sup_{x\in D}|u(\boldsymbol{x},t)|=\infty$ 或者(2) $\lim\limits_{t\to T-}\sup_{x\in D}|\nabla u(\boldsymbol{x},t)|=\infty$ 成立,则整体解(或全局解)将不存在,也称解发生“发生 Blow up(爆破)现象”. 因为在反应扩散模型(1)-(3)中,反应项 f 不依赖于梯度,所以集中考虑情形(1).

Caffarrelli L A & Friedman A[4]和Ding J T[5]研究了模型(1)-(3)的当 $N=1,a=1$ 时特殊的热传导问题的解的爆破现象. 对于一般形式的反应扩散模型(1)-(3),本文将直接推广讨论和给出其解 $u(\boldsymbol{x},t)$ 在有限时刻 T_b 发生爆破的充分条件,还将证明:若其解爆破发生,则爆破点集是整个球形媒质.

进一步,可以断言:如果有限媒质能够以某种方式在一个足够广阔的特殊空间中运动,那么爆破可以避免. 该空间之所以特殊,是因为其中充满了相对较冷的反应扩散媒质,这种媒质在性质上与球形媒质差异甚大,以至于后者被视为空间中的唯一集中热源. 再定义 $L_2\hat{u}=\hat{u}_t-\Delta\hat{u}$,考虑如下广义反应扩散模型:

$$L_2\hat{u}=\delta_N(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0(t))f(\hat{u}(\boldsymbol{x}_0(t),t)),\quad (\boldsymbol{x},t)\in R^N\times R^+,\tag{4}$$

$$\hat{u}(\boldsymbol{x},0)=\hat{u}_0(\boldsymbol{x})\geqslant 0,\quad x\in R^N,\tag{5}$$

当

$$\|\boldsymbol{x}\|_{R^N}\to\infty \text{ 时 } \hat{u}(\boldsymbol{x},t)\to 0,\quad t\in[0,\infty),\tag{6}$$

$$\boldsymbol{x}_0(t)=0,\boldsymbol{x}_0'(t)=0,\boldsymbol{x}_0''(t)\geqslant 0,\quad t\in[0,\infty),\tag{7}$$

式中,$\hat{u}_0(\boldsymbol{x})$连续,并且当 $\|\boldsymbol{x}\|_{R^N}\to\infty$ 时,$\hat{u}_0(\boldsymbol{x})\to 0$. 本模型中,有限媒质被视为无限空间中的一个点,并用反应点 $\boldsymbol{x}_0$ 代替,假设其初始位置是原点. $t\in[0,\infty)$意即观察者从时刻 $T^{\mathrm{obs}}(<T_b)$开始移动媒质并重新计时. δ_N 是 N 维区域中的 Dirac(狄拉克)函数[2-3,6],表示球形媒质是能源的集中处,并且把 $\boldsymbol{x}_0$ 视为热源点. $\boldsymbol{x}_0(t)$至少二阶可导,$\boldsymbol{x}_0'(t)$和 $\boldsymbol{x}_0''(t)$分别代表媒质的速度和加速度. 因为考虑的是无界区域,所以此处 L_2 代表着扩散系数可以是任意正常数的一类算子.

当 $N=1$ 时,运用将偏微分方程转化成 Volterra 积分方程的技巧,Olmstead W E 等人揭示了问题(4)-(7)中解的存在时间和 $\boldsymbol{x}_0'(t)$之间的关系[7]. 作者在下文中将其部分结论推广至任意有限维的情形,并证明:如果 $\boldsymbol{x}_0(t)$满足一定条件,那么被预言在时刻 T_b 发生的爆破可以被避免.

1　爆破发生的充分条件

首先要说明问题(1)-(3)在某个小的时间范围内必定存在唯一局部古典解.

引理1　设 $0<T\leqslant\infty$, $\Omega_T=B_N\times(0,T)$, $F(\boldsymbol{x},t)$在 Ω_T 内非负有界. 若 $u(\boldsymbol{x},t)$是问题(1)-(3)的局部古典解,且满足:

$$L_1u\geqslant F(\boldsymbol{x},t)u(\boldsymbol{x}_0,t),\quad (\boldsymbol{x},t)\in\Omega_T,\tag{8}$$

$$u(\boldsymbol{x},0)\geqslant 0,\quad \boldsymbol{x}\in\bar{B}_N,\tag{9}$$

$$u(\boldsymbol{x},t)=0,\quad (\boldsymbol{x},t)\in\partial B_N\times[0,T),\tag{10}$$

则在 $\bar{B}_N\times[0,T)$内 $u(\boldsymbol{x},t)\geqslant 0$.

证　设 η 是正常数,且

$$\tilde{u}(\boldsymbol{x},t)=u(\boldsymbol{x},t)+\eta\mathrm{e}^{bt},\tag{11}$$

式中,b 是常数,要求它满足

$$b>\max_{\Omega_T}F(\boldsymbol{x},t).\tag{12}$$

显然,当$(\boldsymbol{x},t)\in(\partial B_N\times[0,T))\cup(\bar{B}_N\times\{0\})$时$\tilde{u}(\boldsymbol{x},t)>0$,且

$$L_1\tilde{u}-F(\boldsymbol{x},t)\tilde{u}(\boldsymbol{x}_0,t)\geqslant b\eta e^{bt}-F(\boldsymbol{x},t)\eta e^{bt}>0,\quad (\boldsymbol{x},t)\in\Omega_T. \tag{13}$$

假设在Ω_T内某处$\tilde{u}(\boldsymbol{x},t)\leqslant 0$,则集合$\{t\in(0,T):$对某个$\boldsymbol{x}\in B_N,\tilde{u}(\boldsymbol{x},t)\leqslant 0\}$非空. 将该集合的下确界记为$\bar{t}$,则$\bar{t}>0$,并且对所有$\boldsymbol{x}\in B_N$有$\tilde{u}(\boldsymbol{x},\bar{t})\geqslant 0$. 另外,存在某个$\boldsymbol{x}_*$使得$\tilde{u}(\boldsymbol{x}_*,\bar{t})=0,\tilde{u}_t(\boldsymbol{x}_*,\bar{t})\leqslant 0$. $\tilde{u}(\boldsymbol{x},\bar{t})$在$\boldsymbol{x}_1$处取得最小值,故$\Delta\tilde{u}(\boldsymbol{x}_*,\bar{t})\geqslant 0$. 因此

$$0\geqslant\tilde{u}_t(\boldsymbol{x}_1,\bar{t})\geqslant\tilde{u}_t(\boldsymbol{x}_1,\bar{t})-a\Delta\tilde{u}(\boldsymbol{x}_1,\bar{t})\geqslant L_1\tilde{u}(\boldsymbol{x}_1,\bar{t})-F(\boldsymbol{x}_1,\bar{t})\tilde{u}(\boldsymbol{x}_0,\bar{t})>0, \tag{14}$$

矛盾. 所以在Ω_T内$\tilde{u}(\boldsymbol{x},t)>0$. 再令$\eta\to 0+$,则在$\bar{B}_N\times[0,T)$内$u(x,t)\geqslant 0$. 证毕.

定理 1 存在某个$t_0<\infty$,使得问题(1)-(3)有唯一非负解$u\in C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\bar{\Omega}_{t_0})$,其中$\Omega_{t_0}=B_N\times(0,t_0)$.

证 考虑如下问题

$$L_1u=f(u(\boldsymbol{x}_0,t)),\quad (\boldsymbol{x},t)\in\Omega_{t_0}, \tag{15}$$

$$u(\boldsymbol{x},0)=u_0(\boldsymbol{x})\geqslant 0,\quad \boldsymbol{x}\in\bar{B}_N, \tag{16}$$

$$u(\boldsymbol{x},t)=0,\quad (\boldsymbol{x},t)\in\partial B_N\times[0,t_0), \tag{17}$$

式中,t_0通过如下 3 个步骤选取.

第一步 $x_0\in B_N$是一个给定的点,因此可以假设

$$\varepsilon<1-\|x_0\|_{R^N}^2 \tag{18}$$

是一个待定的正常数. 定义

$$\beta=[\|x_0\|_{R^N}^2-(1-\varepsilon)]^{-3}\ln\frac{\varepsilon}{1-\|x_0\|_{R^N}^2}, \tag{19}$$

$$k(\boldsymbol{x})=(1-\|\boldsymbol{x}\|_{R^N}^2)\exp\{\beta[\|\boldsymbol{x}\|_{R^N}^2-(1-\varepsilon)]^3\}, \tag{20}$$

$$\psi(\boldsymbol{x})=\begin{cases}1-\|\boldsymbol{x}\|_{R^N}^2, & \boldsymbol{x}\in\bar{B}_N\backslash\bar{B}_N(1-\varepsilon),\\ k(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x}\in\bar{B}_N(1-\varepsilon),\end{cases} \tag{21}$$

式中

$$B_N(1-\varepsilon)=\{\boldsymbol{x}\in B_N:\|\boldsymbol{x}\|_{R^N}^2<1-\varepsilon\}. \tag{22}$$

验证可知:$\beta>0,\psi(\boldsymbol{x})\in C^2(\bar{B}_N)$,在$\bar{B}_N(1-\varepsilon)$上$k(\boldsymbol{x})>0$,并且$\psi(\boldsymbol{x}_0)=k(\boldsymbol{x}_0)=\varepsilon$.

第二步 选择足够大的ζ_0使得

$$\zeta_0\psi(\boldsymbol{x})+f(0)\geqslant f(u_0(\boldsymbol{x})), \tag{23}$$

$$\zeta_0>\frac{1}{2Na}(1+f(0))f'(f^{-1}(1+f(0))). \tag{24}$$

再令

$$0<\varepsilon<\min\{1-\|\boldsymbol{x}_0\|_{R^N}^2,\frac{1}{\zeta_0}\}. \tag{25}$$

第三步 采用记号$\underline{k}=\min_{\bar{B}_N(\varepsilon)}k(\boldsymbol{x}),\bar{k}=\max_{\bar{B}_N(\varepsilon)}k(\boldsymbol{x}),M=\max_{\bar{B}_N(\varepsilon)}|\Delta k(\boldsymbol{x})|$,假设$\zeta(t)$是如下问题在某一时间范围内的解

$$\zeta'(t)=\frac{aM\zeta(t)+f'(f^{-1}(\zeta(t)\bar{k}+f(0)))(\zeta(t)\varepsilon+f(0))}{\underline{k}}, \tag{26}$$

$$\zeta(0)=\zeta_0. \tag{27}$$

结合式(24)和(25)可知,存在$t_0\in(0,\infty)$满足

$$f'(f^{-1}(\zeta(t_0)\varepsilon+f(0)))\leqslant\frac{2Na\zeta_0}{1+f(0)}<2Na\left(\varepsilon+\frac{f(0)}{\zeta_0}\right)^{-1}. \tag{28}$$

定义$h(\boldsymbol{x},t)=f^{-1}(\zeta(t)\psi(\boldsymbol{x})+f(0))$,令$J=f'(h)(L_1h-f(h(\boldsymbol{x}_0,t)))$,那么

$$J\geqslant(f(h))_t-a\Delta(f(h))-f'(h)f(h(\boldsymbol{x}_0,t))=\zeta'(t)\psi(\boldsymbol{x})-a\zeta(t)\Delta\psi(\boldsymbol{x})-f'(f^{-1}(\zeta(t)\psi(\boldsymbol{x})+f(0)))(\zeta(t)\psi(\boldsymbol{x}_0)+f(0))=\zeta'(t)\psi(\boldsymbol{x})-a\zeta(t)\Delta\psi(\boldsymbol{x})-f'(f^{-1}(\zeta(t)\psi(\boldsymbol{x})+f(0)))(\zeta(t)\varepsilon+f(0)). \tag{29}$$

对于$(\boldsymbol{x},t)\in\bar{B}_N(1-\varepsilon)\times(0,t_0)$,有

$$J\geqslant\zeta'(t)\bar{k}-aM\zeta(t)-f'(f^{-1}(\zeta(t)\bar{k}+f(0)))(\zeta(t)\varepsilon+f(0)),\tag{30}$$

由式(26)可知其右端的值为 0. 对于$(\boldsymbol{x},t)\in(B_N\backslash\bar{B}_N(1-\varepsilon))\times(0,t_0)$,有

$$J\geqslant2Na\zeta(t)-f'(f^{-1}(\zeta(t)\varepsilon+f(0)))(\zeta(t)\varepsilon+f(0))=\zeta(t)\left[2Na-f'(f^{-1}(\zeta(t)\varepsilon+f(0)))\left(\varepsilon+\frac{f(0)}{\zeta(t)}\right)\right]\geqslant$$
$$\zeta(t)\left[2Na-f'(f^{-1}(\zeta(t_0)\varepsilon+f(0)))\left(\varepsilon+\frac{f(0)}{\zeta_0}\right)\right]=\zeta(t)\left(\varepsilon+\frac{f(0)}{\zeta_0}\right)\left[2Na\left(\varepsilon+\frac{f(0)}{\zeta_0}\right)^{-1}-f'(f^{-1}(\zeta(t_0)\varepsilon+f(0)))\right],\tag{31}$$

由式(28)可知上式右端的值为正. 于是,在Ω_{t_0}内$J\geqslant0$. 因为在Ω_{t_0}内$f'(h)>0$,所以

$$L_1h-f(h(\boldsymbol{x}_0,t))\geqslant0,\quad(\boldsymbol{x},t)\in\Omega_{t_0},\tag{32}$$

另外,

$$h(\boldsymbol{x},0)=f^{-1}(\zeta_0\psi(\boldsymbol{x})+f(0))\geqslant f^{-1}(f(u_0(\boldsymbol{x})))=u_0(\boldsymbol{x}),\quad\boldsymbol{x}\in\bar{B}_N,\tag{33}$$

$$h(\boldsymbol{x},t)=f^{-1}(\zeta(t)0+f(0))=0,\quad(\boldsymbol{x},t)\in\partial B_N\times[0,t_0),\tag{34}$$

这表明:$h(\boldsymbol{x},t)$是问题(1)-(3)的满足式(15)-(17)的一个上解.

可以断言:存在问题(1)-(3)满足(15)-(17)的唯一非负解$u\in C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\bar{\Omega}_{t_0})$,其中引理 1 被用于保证解的唯一性. 因此,问题(1)-(3)有唯一的非负解$u\in C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\bar{\Omega}_{t_0})$. 证毕.

推论 1[8]　假设T是使得定理 1 成立的t_0的上确界,则问题(1)-(3)有唯一非负解$u\in C^{2,1}(\bar{B}_N\times[0,T))$. 若$T<\infty$,则$u(\boldsymbol{x}_0,t)$在$[0,T)$上是无界的,即反应点$\boldsymbol{x}=(r_1^0,r_2^0,\cdots,r_N^0)$是一个爆破点,并且爆破时刻$T_b=T$.

定理 2　若$u_0(\boldsymbol{x})$在$\boldsymbol{x}_0$的一个邻域内充分大,则问题(1)-(3)的解将会在有限时刻爆破.

证　对于一个正常数$\mu<1-\|\boldsymbol{x}_0\|_{R^N}$,定义

$$B_N(\boldsymbol{x}_0,\mu)=\{\boldsymbol{x}\in B_N:\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|_{R^N}<\mu\},\tag{35}$$

可以在$\bar{B}_N(\boldsymbol{x}_0,\mu)$上定义一个中心对称的非负函数$u_0^*(\boldsymbol{x})$,使它在$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0$处取最大值.

考虑如下问题

$$L_1u^*=f(u^*(\boldsymbol{x},t)),\quad(\boldsymbol{x},t)\in B_N(\boldsymbol{x}_0,\mu)\times(0,T),\tag{36}$$

$$u^*(\boldsymbol{x},0)=u_0^*(\boldsymbol{x}),\quad\boldsymbol{x}\in\bar{B}_N(\boldsymbol{x}_0,\mu),\tag{37}$$

$$u^*(\boldsymbol{x},t)=0,\quad(\boldsymbol{x},t)\in\partial B_N(\boldsymbol{x}_0,\mu)\times[0,T).\tag{38}$$

根据$u_0^*(\boldsymbol{x})$在$\bar{B}_N(\boldsymbol{x}_0,\mu)$上的性质,问题(36)-(38)的解必定在$\boldsymbol{x}_0$处达到最大值[9]. 从而

$$L_1u^*=f(u^*(\boldsymbol{x},t))\leqslant f(u^*(\boldsymbol{x}_0,t)).\tag{39}$$

设λ_1是如下问题的特征值

$$\Delta\varphi(\boldsymbol{x})+\lambda\varphi(\boldsymbol{x})=0,\quad\boldsymbol{x}\in B_N(x_0,\mu),\tag{40}$$

$$\varphi(\boldsymbol{x})=0,\quad\boldsymbol{x}\in\partial B_N(\boldsymbol{x}_0,\mu).\tag{41}$$

根据$\int_0^\infty f^{-1}(S)\,\mathrm{d}x<\infty$,断言$\lim\limits_{S\to\infty}\frac{f(S)}{S}=\infty$. 因此,存在正常数$k_1>0$,使得当$x>k_1$时

$$\frac{f(S)}{S}\geqslant\max\left(2a\lambda_1,\frac{2aN}{\mu^2}\right).\tag{42}$$

可以选择一个足够大的常数$k_2\geqslant k_1/\mu^2$,使其对任意$\boldsymbol{x}\in\bar{B}_N(\boldsymbol{x}_0,\mu)$满足

$$w_0(\boldsymbol{x})\triangleq k_2[\|\boldsymbol{x}\|_{R^N}-(\|\boldsymbol{x}_0\|_{R^N}-\mu)][(\|\boldsymbol{x}_0\|_{R^N}+\mu)-\|\boldsymbol{x}\|_{R^N}]\geqslant u_0^*(\boldsymbol{x}).\tag{43}$$

再考虑问题

$$L_1w=f(w(\boldsymbol{x}_0,t)),\quad(\boldsymbol{x},t)\in B_N(\boldsymbol{x}_0,\mu)\times(0,T),\tag{44}$$

$$w(\boldsymbol{x},0)=w_0(\boldsymbol{x}),\quad\boldsymbol{x}\in\bar{B}_N(\boldsymbol{x}_0,\mu),\tag{45}$$

$$w(\boldsymbol{x},t)=0,\quad(\boldsymbol{x},t)\in\partial B_N(\boldsymbol{x}_0,\mu)\times[0,T).\tag{46}$$

由式(42)和(43)可知:$a\Delta w_0+f(w_0(\boldsymbol{x}_0))\geqslant-2aNk_2+\frac{2aN}{\mu^2}k_2\mu^2=0$. 不难验证$w_0(\boldsymbol{x})$和零函数构成了问

题(44)-(46)的一对上下解,所以该问题在 $\bar{B}_N(\boldsymbol{x}_0,\mu)\times[0,T)$ 内存在唯一的非负解 $w(\boldsymbol{x},t)$. 根据式(39)、式(43)以及引理 1,在 $\bar{B}_N(\boldsymbol{x}_0,\mu)\times[0,T)$ 内必定有 $w(\boldsymbol{x},t)\geqslant u^*(\boldsymbol{x},t)$. 选择 $u_0(\boldsymbol{x})$,使其在 $\bar{B}_N(\boldsymbol{x}_0,\mu)$ 上不小于 $w_0(\boldsymbol{x})$,那么由引理 1 和定理 1 可知 $u(\boldsymbol{x},t)\geqslant w(\boldsymbol{x},t)$.

由式(42)可得

$$\int_{k_1}^{\infty}(f(S)-a\lambda_1 S)^{-1}\mathrm{d}S<\infty. \tag{47}$$

将文献[9]中的结论推广到多维情形没有本质困难,所以,对问题(36)-(38)而言,根据式(47)可以推断:若 $u_0^*(\boldsymbol{x})$ 充分大,则 $u^*(\boldsymbol{x},t)$ 将会在 $\boldsymbol{x}_0$ 处发生有限时刻爆破. 因此,只要 $w_0(\boldsymbol{x})$ 在 $\bar{B}_N(\boldsymbol{x}_0,\mu)$ 上充分大,问题(44)-(46)的解就会在 $\boldsymbol{x}_0$ 处发生有限时刻爆破. 进而,如果 $u_0(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 的一个邻域内充分大,那么问题(1)-(3)的解将会在 $\boldsymbol{x}_0$ 处发生有限时刻爆破. 证毕.

2 反应扩散模型爆破点集的讨论

在上节中已经知道问题(1)-(3)在何时有唯一非负解 $u\in C^{2,1}(\bar{B}_N\times[0,T))$. 事实上,存在格林函数 G_1 使得

$$u(\boldsymbol{x},t)=\int_{B_N}G_1(\boldsymbol{x},\xi,t)u_0(\xi)\mathrm{d}\xi+\int_0^t\int_{B_N}G_1(\boldsymbol{x},\xi,t-\tau)f(u(\boldsymbol{x}_0,\tau))\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau,\quad t<T. \tag{48}$$

文献[10]中给出了当 $N=1,a=1$ 时这种格林函数的具体形式,根据其推导过程不难得到 G_1 的一般形式:

$$G_1(\boldsymbol{x},\xi,t-\tau)=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(\boldsymbol{x})\varphi_i(\xi)\mathrm{e}^{-a\lambda_i(t-\tau)}, \tag{49}$$

式中,$\lambda_i(i=1,2,3,\cdots)$是如下问题的特征值

$$\Delta\varphi(\boldsymbol{x})+\lambda\varphi(\boldsymbol{x})=0,\quad \boldsymbol{x}\in B_N, \tag{50}$$

$$\varphi(\boldsymbol{x})=0,\quad \boldsymbol{x}\in\partial B_N, \tag{51}$$

$\varphi_i(\boldsymbol{x})$是其相应的特征函数. 根据文献[11]中的证明,可以得到如下引理:

引理 2[11] 对于任意给定的 $\boldsymbol{x}\in B_N$ 和任意有限时刻 T,存在有限正数 $C_1(\boldsymbol{x},T)$ 和 $C_2(T)$ 使得

$$C_1(\boldsymbol{x},T)<\int_{B_N}G_1(\boldsymbol{x},\xi,t)\mathrm{d}\xi,\quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{52}$$

$$\int_{B_N}G_1(\boldsymbol{x}_0,\xi,t)\mathrm{d}\xi<C_2(T),\quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{53}$$

定理 3 如果问题(1)-(3)的解在有限时刻 T_b 爆破,那么爆破点集是 $\bar{B}_N$.

证 根据定理 1 和推论 1 可知,如果 $u(\boldsymbol{x},t)$ 在有限时刻爆破,则 u 至少会在 $\boldsymbol{x}_0$ 处爆破. 由式(48)和(53)推出对于 $t<T_b$ 有

$$\begin{aligned}u(\boldsymbol{x}_0,t)=&\int_{B_N}G_1(\boldsymbol{x}_0,\xi,t)u_0(\xi)\mathrm{d}\xi+\int_0^t\int_{B_N}G_1(\boldsymbol{x}_0,\xi,t-\tau)f(u(\boldsymbol{x}_0,\tau))\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\leqslant\\&C_2(T_b)\max\nolimits_{x\in\bar{B}_N}u_0(\boldsymbol{x})+C_2(T_b)\int_0^t f(u(\boldsymbol{x}_0,t-\tau))\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{54}$$

因为当 $t\to T_b$ 时,$u(\boldsymbol{x}_0,t)\to\infty$,故 $\int_0^{T_b}f(u(\boldsymbol{x}_0,T_b-\tau))\mathrm{d}\tau=\infty$.

另一方面,对任意的$(\boldsymbol{x},t)\in B_N\times[0,T_b)$,根据式(48)和(52)有

$$\begin{aligned}u(\boldsymbol{x},t)\geqslant&\int_{B_N}G_1(\boldsymbol{x},\xi,t)u_0(\xi)\mathrm{d}\xi+C_1(\boldsymbol{x},T_b)\int_0^t f(u(\boldsymbol{x}_0,t-\tau))\mathrm{d}\tau\geqslant\\&C_1(\boldsymbol{x},T_b)\int_0^t f(u(\boldsymbol{x}_0,t-\tau))\mathrm{d}\tau,\end{aligned} \tag{55}$$

当 $t\to T_b$ 时,上式右端趋于无穷大. 对任意 $\boldsymbol{x}\in\partial B_N$,存在序列$\{(\boldsymbol{x}_n,t_n)\}\subset B_N\times(0,T_b)$,使得当 $n\to\infty$ 时$(\boldsymbol{x}_n,t_n)\to(\boldsymbol{x},T_b)$,并且$\lim\limits_{n\to\infty}u(\boldsymbol{x}_n,t_n)\to\infty$. 所以爆破点集是 $\bar{B}_N$. 证毕.

3 避免解发生爆破的条件

为了将问题(4)-(7)转化成等价的 Volterra 积分方程来考察,本节使用格林函数

$$G_2(\boldsymbol{x},\xi,t-\tau)=\frac{H(t-\tau)}{[2\sqrt{\pi(t-\tau)}]^N}\exp\left[-\frac{\|\boldsymbol{x}-\xi\|_{R_N}^2}{4(t-\tau)}\right], \tag{56}$$

式中,H 是 Heaviside 函数,并且要求 $t>\tau\geqslant 0$. 因此,问题(4)-(7)的解可以表示如下

$$\hat{u}(\boldsymbol{x},t)=\int_0^t\int_{R^N}G_2(\boldsymbol{x},\xi,t-\tau)\delta_N[\xi-\boldsymbol{x}_0(\tau)]f(\hat{u}(\boldsymbol{x}_0(\tau),\tau))\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau+$$

$$\int_{R^N}G_2(\boldsymbol{x},\xi,t)\hat{u}_0(\xi)\mathrm{d}\xi,\quad \boldsymbol{x}\in R^N,t>0. \tag{57}$$

因为点 $\boldsymbol{x}_0$ 代表原球形媒质,所以集中考察下式

$$\hat{u}(\boldsymbol{x}_0(t),t)=\int_0^t k(t,\tau)f(\hat{u}(\boldsymbol{x}_0(\tau),\tau))\mathrm{d}\tau+h(t),\quad t>0, \tag{58}$$

式中

$$k(t,\tau)\triangleq\frac{1}{[2\sqrt{\pi(t-\tau)}]^N}\exp\left[-\frac{\|\boldsymbol{x}_0(t)-\boldsymbol{x}_0(\tau)\|_{R^N}^2}{4(t-\tau)}\right],\quad t>\tau\geqslant 0, \tag{59}$$

$$h(t)\triangleq\frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^N}\int_{R^N}\exp\left[-\frac{\|\boldsymbol{x}_0(t)-\xi\|_{R^N}^2}{4t}\right]\hat{u}_0(\xi)\mathrm{d}\xi,\quad t>0. \tag{60}$$

结合 $\hat{u}_0(\boldsymbol{x})$ 的性质可知:$h(t)$ 在 $(0,\infty)$ 内非负、连续并且有界. 不妨假设 $h\leqslant\bar{h}<\infty$.

为表述方便,对 $t>0$ 令

$$v(t)=\hat{u}(\boldsymbol{x}_0(t),t)-h(t), \tag{61}$$

根据式(58)有 Volterra 积分方程

$$v(t)=Pv(t)\triangleq\int_0^t k(t,\tau)f(v(\tau)+h(\tau))\mathrm{d}\tau,\quad t>0. \tag{62}$$

为了度量有限媒质的散热能力,定义如下指标

$$I(t)=\int_0^t k(t,\tau)\mathrm{d}\tau,\quad t>0. \tag{63}$$

定理 4　若存在 $t\in(0,\infty)$ 满足

$$I(t)=\Lambda\triangleq\max_{0\leqslant x<\infty}\frac{S}{f(S+\bar{h})}, \tag{64}$$

取 $t^*=\inf\{t\in(0,\infty):I(t)=\Lambda\}$. 否则,令 $t^*=\infty$. 进而可知算子方程(62)对 $t\in(0,t^*)$ 有一个连续解.

证　假设 t_1 和 M 是待定的正常数. 考虑如下的空间

$$S_{M,t_1}\triangleq\{v(t)\in C((0,t_1]):0\leqslant v(t)\leqslant M<\infty\}, \tag{65}$$

在上确界模的意义下这是一个 Banach 空间. 由压缩映射定理[12],如果积分算子 P 满足下面两个条件,那么它在 S_{M,t_1} 内有唯一不动点.

(1) $PS_{M,t_1}\subset S_{M,t_1}$;

(2) $\sup_{0<t\leqslant t_1}|Pv_1-Pv_2|\leqslant c\sup_{0<t\leqslant t_1}|v_1(t)-v_2(t)|$,其中 $c<1$ 是一个正常数.

能保证(1)成立的一个充分条件是

$$f(M+\bar{h})\sup_{0<t\leqslant t_1}I(t)\leqslant M. \tag{66}$$

能保证(2)成立的一个充分条件是

$$f'(M+\bar{h})\sup_{0<t\leqslant t_1}I(t)<1. \tag{67}$$

为了同时满足式(66)和(67),只需要下式成立

$$\sup_{0<t\leqslant t_1}I(t)<\frac{M}{f(M+\bar{h})}=\frac{1}{f'(M+\bar{h})}. \tag{68}$$

为了使式(68)中的等式成立,可以通过优化计算来确定 M:

$$\frac{M}{f(M+\bar{h})}=\max_{0\leqslant x<\infty}\frac{S}{f(S+\bar{h})}. \tag{69}$$

存在充分小的正数 δ 使得 $I'(t)$ 在区域 $(0,\delta)$ 内恒为正,所以,如果存在 $t>0$ 满足式(64),

则这样的 t 的下确界 t^* 必定也是满足式(64)的正数. 并且式(68)中的不等式对于所有的 $t_1\in(0,t^*)$ 都成立. 证毕.

如下推论是容易验证的.

推论 2 假设当 $0\leqslant\tau<t<\infty$ 时,$k(t,\tau)\leqslant\bar{k}(t,\tau)$,其中 $\bar{k}(t,\tau)$ 对 $0\leqslant\tau<t$ 连续,并且当 $\tau\to t$ 时可积. 若用 $\bar{I}(t)$ 取代 $I(t)$,则定理 1 仍成立,其中

$$\bar{I}(t)\triangleq\int_0^t\bar{k}(t,\tau)\,\mathrm{d}\tau,\quad 0<t<\infty. \tag{70}$$

定理 5 假设球形媒质在 N 维空间中沿直线运动,并且存在正常数 v^* 使得

$$\left\|\int_0^{T_b}\boldsymbol{x}''_0(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\|_{R^N}>v^*. \tag{71}$$

若 v^* 充分大,则问题(4)-(7)对所有 $t\geqslant T_b$ 有连续解,这就意味着问题(1)-(3)的解不会在时刻 T_b 爆破.

证 首先证明:若存在正常数 v^* 使得

$$\|\boldsymbol{x}'_0(t)\|_{R^N}\geqslant v^*,\quad 0<t<\infty. \tag{72}$$

并且 v^* 充分大,则方程(59)对所有 $t>0$ 有连续解. 事实上,对任意 $t>0$,采用记号

$$\boldsymbol{x}_0(t)=(\boldsymbol{x}_{(1)}(t),\cdots,\boldsymbol{x}_{(N)}(t)),\quad i=1,\cdots,N, \tag{73}$$

式中,$\boldsymbol{x}_{(i)}(t)\geqslant0$. 若 $N>0$,则不妨假设 $\boldsymbol{x}_{(1)}(t)$ 不恒为零. 根据微分中值定理可知

$$\boldsymbol{x}_{(i)}(t)-\boldsymbol{x}_{(i)}(\tau)=\boldsymbol{x}'_{(i)}(\tau_{(i)})(t-\tau),\quad \tau\leqslant\tau_{(i)}\leqslant t. \tag{74}$$

在球形媒质沿直线运动的假设之下可断言存在非负常数 c_i 使得

$$\boldsymbol{x}'_{(i)}(\tau_{(i)})=c_i\boldsymbol{x}'_{(1)}(\tau_{(1)}),\quad i=2,3,\cdots,N. \tag{75}$$

由此推出

$$\|\boldsymbol{x}_0(t)-\boldsymbol{x}_0(\tau)\|^2_{R^N}=C\|\boldsymbol{x}'_0(\tau_{(1)})\|^2_{R^N}(t-\tau)^2, \tag{76}$$

式中,$C=1+\sum\limits_{i=2}^{N}c_i^2$. 显然,若旋转坐标系使直线运动沿着坐标轴 $\boldsymbol{x}_{(1)}$ 进行,则式(76)中的 $C=1$. 此时,在式(59)中取 $N=1$,再根据式(72)和(76)可得

$$k(t,\tau)\leqslant\bar{k}(t,\tau)\triangleq\frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp\left[-\frac{(v^*)^2(t-\tau)}{4}\right],\quad t>\tau. \tag{77}$$

由定理 4 和推论 2,如果

$$\bar{I}(t)\triangleq\int_0^t\bar{k}(t,\tau)\,\mathrm{d}\tau<\Lambda,\quad 0<t<\infty, \tag{78}$$

则方程(62)对 $t>0$ 有连续解. 显然,

$$\int_0^t\bar{k}(t,\tau)\,\mathrm{d}\tau=\frac{1}{v^*}\mathrm{erf}\left(\frac{v^*t,^{1/2}}{2}\right). \tag{79}$$

因此,如果

$$\frac{1}{v^*}\mathrm{erf}\left(\frac{v^*t,^{1/2}}{2}\right)<\Lambda,\quad 0<t<\infty, \tag{80}$$

则式(78)成立. 因为 erf 是一个概率分布函数,故一定存在充分大的 v^* 使(80)成立.

下面假定,对某个 $\Delta T\in(0,T_b)$,有

$$\left\|\int_0^{T_b-\Delta T}\boldsymbol{x}''_0(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\|_{R^N}\geqslant v^*, \tag{81}$$

式中,v^* 足够大以使(80)成立. 令 $\hat{t}=t-(T_b-\Delta T)$,那么(72)对 $0<\hat{t}<\infty$ 成立. 再令 $\Delta T\to0^+$,则式(71)成立就是方程(62)对所有 $t\geqslant T_b$ 有连续解的一个充分条件,在此条件下,原先被预言在时刻 T_b 发生的爆破可以避免.

注 根据式(80),只要式(71)对 $v^*>\Lambda^{-1}$ 成立,爆破就可以被避免.

[参考文献]

[1] BANDLE C,BRUNNER H. Blow-up in diffusion equations[J]. J Comput Appl Math,1998(97):3-22.

[2] SMOLLER J. Shock waves and reaction diffusion equations[M]. Berlin,Heideberg:Springer-Verlag,1983.

[3] BALL J M. Remarks on blow up and nonexistence theorems for nonlinear evolution equations[J]. Q J Math Oxford,1997(28):473-486.

[4] CAFFARRELLI L A,FRIEDMAN A. Blow-up of solutions of nonlinear heat equations[J]. J Math Anal Appl,1988(129):409-419.

[5] DING J T. Blow-up of global solutions for nonlinear reaction diffusion equations with Neumann boundary conditions[J]. Nonlinear Analysis TMA,2008(68):507-514.

[6] EWING R E. Finite element techniques for convection diffusion transport in porous media[J]. Devekopments in water science, elsevier,1988(36):27-34.

[7] OLMSTEAD W E,HANDELSMAN R A. Diffusion in semi-infinite region with nonlinear surface dissipation[J]. SIAM review, 1996(18):275-291.

[8] PAO C V. Nonlinear parabolic and elliptic equations[M]. New York:Plenum,1992.

[9] GALAKTIONOV V A, KURDYUMOV S P, MIKHAILOV A P, et al. Unbounded solutions of the cauchy problem for the parabolic equation[J]. Soviet physics doklady,1980(25):458-459.

[10] 贺五洲,戴遗山. 求解零航速水动力的简单 Green 函数方法[J]. 水动力研究与进展,1992(4):449-456.

[11] AMANN H. Parabolic evolutions equations and nonlinear boundary conditions[J]. J Diff Equa,1988(72):201-269.

[12] 叶其孝,李正元. 反应扩散方程引论[M]. 北京:科学出版社,1994.

[责任编辑:陆炳新]

(上接第 8 页)

[9] WEYL H. Inequalities between the two kinds of eigenvalues of a linear transformation[J]. Proceedings of the national academy of sciences of the United States of America,1949,35(7):408.

[10] BALL J M. Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity[J]. Archive for rational mechanics and analysis, 1976,63(4):337-403.

[11] CIARLET P G. Mathematical elasticity. Mathematics and its applications[M]. Amsterdan:North-Holland Publishing Company, 1988:199-265.

[12] YANG X D,DIAO Z G,LIU S H. Some inequalities for sum of Hermitian matrices[J]. Mathematica appllcate,2015,28(3):475-480.

[13] 王伯英,张福振. 矩阵乘积的特征值和奇异值的不等式[J]. 北京师范大学学报(自然科学版),1987(3):1-4.

[14] 陈道琦. 关于半正定 Hermite 矩阵乘积迹的一个不等式[J]. 数学学报,1988,31(2):565-569.

[15] WANG B Y,XI B Y,ZHANG F. Some inequalities for sum and product of positive semidefinite matrices[J]. Linear algebra and its applications,1999,293(1):39-49.

[责任编辑:陆炳新]