doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2018.02.002

# $L$-拓扑空间中 $S^*$ -连通性

潘 伟[1],徐振国[2]

(1.牡丹江师范学院数学科学学院,黑龙江 牡丹江 157011)
(2.国家科技基础条件平台中心,北京 100862)

[摘要] 在 $L$-拓扑空间借助于半开 $L$-集和半闭 $L$-集引入 $S^*$ -连通性,给出了它的一些等价刻画,并讨论 $S^*$ -连通性和 $S$-连通性之间的关系.

[关键词] $L$-拓扑空间,$L$-半开集,$L$-半闭集,$S^*$ -连通性,$S$-连通性,樊畿定理

[中图分类号]O189.2 [文献标志码]A [文章编号]1001-4616(2018)02-0008-04

## $S^*$-Connectedness $L$-Topological Spaces

Pan Wei[1],Xu Zhenguo[2]

(1.School of Mathematic Science,Mudanjiang Normal University,Mudanjiang 157011,China)
(2.National Science and Technology Infrastructure Center,Beijing 100862,China)

**Abstract**:In this paper,the concept of $S^*$-connectedness is introduced in $L$-topological spaces by means of semi-open $L$-sets and semi-closed $L$-sets. Equivalent characterizations of the $S^*$-connectedness are given. Moreover,the relations among $S^*$-connectedness and S-connectedness are discussed.

**Key words**:$L$-topological spaces,$L$-semiopen set,$L$-semiclosed set,$S^*$-connectedness,$S$-connectedness,Fanji theorem

在一般拓扑学中,连通性是一个很重要的概念,它以多种不同的形式被推广到 $L$-拓扑中[1-4],KAzad K 引入了半开 $L$-集和半闭 $L$-集,并研究了它们的一些性质(见文献[5]).

本文中,将利用半开 $L$-集和半闭 $L$-集在 $L$-空间中引入 $S^*$ -连通性. 如一般拓扑学中的连通性一样,它也具有许多理想的性质. 特别地,著名的樊畿定理对于 $S^*$ -连通性也成立. 此外,还讨论 $S$-连通性和 $S^*$ -连通性之间的联系和区别.

本文中 $L$ 表示具有逆序对合对应的完全分配格,$L$-拓扑空间是(见文献[6])是一个偶对$(X,\tau)$,这里 $\tau$ 是 $L^x$ 的子族,它包含 $\underline{1}$,$\underline{0}$,并且对有限交和任意并封闭. $\tau$ 称为 $X$ 上的 $L$-拓扑,$\tau$ 中的元称为开 $L$-集,它的补称为闭 $L$-集. 其它未声明的概念与符号见文献[1-3,5-6].

**引理 1**[1] 设 $A$、$B\in L^x$ 且 $A\not\leq B$,如果 $1\in J(L)$,则 $A'\vee B\neq\underline{1}$.

**定义 1**[3] 设 $G\in L^x$,$J(G)$定义为 $G$ 中所有非零 $\vee$-既约元之集.

**定义 2**[6] 设$(X,\tau)$是 $L$-拓扑空间,$G\in L^x$.

(1)$G$ 称为半开 $L$-集,如果 $G\leqslant cl(int(G))$;

(2)$G$ 称为半闭 $L$-集,如果 $int(cl(G))\leqslant G$.

**定义 3**[6] 设$(X,\tau)$是 $L$-拓扑空间,$G\in L^x$,定义:

(1)$int_s(G)=\vee\{D\in L^x|D\leqslant G,D$ 是半开的$\}$;

(2)$cl_s(G)=\wedge\{D\in L^x|D\geqslant G;D$ 是半闭的$\}$.

**定义 4**[6] 设$(X,\tau_1)$和$(Y,\tau_2)$是 $L$-拓扑空间,$G\in L^x$,$f$:$X\to Y$ 是一个映射,$f$ 称为不定映射,如果对每个半开 $L$-集 $G$,$f^{-}(G)$是半开的.

收稿日期:2017-10-27.
基金项目:黑龙江省教育厅备案项目(1351MSYYB010)、牡丹江师范学院青年学术骨干项目(GG2017002).
通讯联系人:徐振国,博士,研究方向:模糊数学. E-mail:zhenguoxu@126.com

## 1　$S^*$-连通性

在这节中,借助于$S$-分离$L$-集来研究$S^*$-连通性.

**定义 5**　设$(X,\tau)$是$L$-拓扑空间且$A$、$B\in L^x$. $A$、$B$称为$S$-分离的,如果$cl_s(A)\wedge B=A\wedge cl_s(B)=\underline{0}$.

**定义 6**　设$(X,\tau)$是$L$-拓扑空间且$G\in L^x$,$G$称为$S^*$-分离的,如果不存在半闭$L$-集$A$、$B$使得$G\not\leq A$,$G\not\leq B$,$G'\leq A\vee B=\underline{1}$及$G\wedge A\wedge B=\underline{0}$.

**定理 1**　设$(X,\tau)$是$L$-拓扑空间,$G\in L^x$,且$1\in J(L)$,则下列情况等价:

(1)$G$是$S^*$-连通的;

(2)不存在两个半开$L$-集$A$、$B$使得$A\wedge G\neq\underline{0}$,$B\wedge G\neq\underline{0}$,$G'\leq A\vee B$及$G\wedge A\wedge B=\underline{0}$;

(3)不存在两个半开$L$-集$A$、$B$使得$G\not\leq A$,$G\not\leq B$,$G'\vee A\vee B=\underline{1}$及$G\wedge A\wedge B=\underline{0}$;

(4)不存在两个半闭$L$-集$A$、$B$使得$G\wedge A\neq\underline{0}$,$G\wedge B\neq\underline{0}$,$G'\vee A\vee B=\underline{1}$及$G\wedge A\wedge B=\underline{0}$.

**证明**　(1)$\Rightarrow$(2)假设$G$是$S^*$-连通的且存在两个半开$L$-集$A$、$B$使得$A\wedge G\neq\underline{0}$,$B\wedge G\neq\underline{0}$,$G'\leq A\vee B=\underline{1}$,$G\wedge A\wedge B=\underline{0}$.

由$A\wedge G\neq\underline{0}$可知,$A'\vee G'\neq\underline{1}$,于是由引理1可知$A\not\leq G'$,即$G\not\leq A'$,同理,$G\not\leq B'$. 综上,存在半闭集$A'$、$B'$,满足$G\not\leq A'$,$G\not\leq B'$,$G'\vee A'\vee B'=\underline{1}$及$G\wedge A'\wedge B'=\underline{0}$. 这表明$G$不是$S^*$-连通的,矛盾.

(2)$\Rightarrow$(3)假设存在两个半闭$L$-集$A$、$B$,使得$G\not\leq A$,$G\not\leq B$,$G\leq A\vee B=1$,$A\wedge B\wedge G=\underline{0}$. 则$A\wedge G\neq\underline{0}$,$B\wedge G\neq\underline{0}$,事实上,如果$A\wedge G=\underline{0}$,由$G'\vee A\vee B=\underline{1}$,及引理1可知$G\leq A\vee B$,于是$(A\wedge G)\vee(B\wedge G)=(A\vee B)\wedge G=G$,即$B\wedge G=G$,从而$G\leq B$,与$G\not\leq B$相矛盾. 同理$B\wedge G\neq\underline{0}$,这又与(2)相矛盾.

(3)$\Rightarrow$(4)假设存在两个半闭$L$-集$A$、$B$,使得$G\wedge A\neq\underline{0}$,$G\wedge B\neq\underline{0}$,$G'\vee A\vee B=\underline{1}$及$A\wedge B\wedge G=\underline{0}$. 于是$G'\vee A'\neq\underline{1}$,由引理1可知$G\not\leq A'$,同理$G\not\leq B'$. 这表明存在两个半开$L$-集$A'$、$B'$使得$G\not\leq A'$,$G\not\leq B'$,$G'\vee A'\vee B'=\underline{1}$及$G\wedge A'\wedge B'=\underline{0}$,这与(3)矛盾.

(4)$\Rightarrow$(1)假设$G$不是$S^*$-连通的,则存在半闭$L$-集使得$G\not\leq A$,$G\not\leq B$,$G'\leq A\vee B=\underline{1}$及$G\wedge A\wedge B=\underline{0}$,则$A\wedge G\neq\underline{0}$,$B\wedge G\neq\underline{0}$,事实上,如果$A\wedge G=\underline{0}$,由$G'\vee A\vee B=\underline{1}$及引理1可知$G\leq A\vee B$.

于是$(A\wedge G)\vee(B\wedge G)=(A\vee B)\wedge G=G$. 即$B\wedge G=G$,从而$G\leq B$,与$G\not\leq B$矛盾. 同理$B\wedge G\neq\underline{0}$,这与(4)矛盾.

**定理 2**　设$(X,\tau)$是$L$-拓扑空间且$G$是$S^*$-连通的,如果$G\leq H\leq cl_s(G)$,那么$H$同样是$S^*$-连通的.

**证明**　假设$H$不是$S^*$-连通的,则存在两个半闭$L$-集$A$和$B$使得$H\not\leq A$,$H\not\leq B$,$H'\vee A\vee B=\underline{1}$,$H\wedge A\wedge B=\underline{0}$. 由$G\leq H$,可知$G\wedge A\wedge B=\underline{0}$和$G'\vee A\vee B=\underline{1}$. 现在证明$G\not\leq A$,$G\not\leq B$. 事实上,如果$G\leq A$,那么$cl_s(G)\leq A$,于是$H\leq cl_s(G)\leq A$,这是个矛盾. 因此$G\not\leq A$,类似地有$G\not\leq B$. 这与$G$是$S^*$-连通的矛盾.

**定理 3**　设$(X,\tau)$是$L$-拓扑空间,$G$和$H$是$S^*$-连通的,如果$G$和$H$不是$S$-分离的,那么$G\vee H$是$S^*$-连通的.

**证明**　假设$G\vee H$不是$S^*$-连通的. 则存在两个半闭$L$-集$A$、$B$使得$G\vee H\not\leq A$,$G\vee H\not\leq B$,$(G\vee H)'\vee A\vee B=\underline{1}$,$(G\vee H)\wedge A\wedge B=\underline{0}$. 由$G\vee H\not\leq A$,有$G\not\leq A$或$H\not\leq A$. 如果$G\not\leq A$,那么由$G$的$S^*$-连通性,有$G\leq B$. 否则,如果$G\not\leq B$,由$G\not\leq A$,$G\not\leq B$以及$G'\vee A\vee B=\underline{1}$,$G\wedge A\wedge B=\underline{0}$. 我们有$G$不是$S^*$-连通性的,矛盾. 由$G\leq B$,有$H\not\leq B$和$H\not\leq A$. 前面假设了$(G\vee H)\wedge A\wedge B=\underline{0}$,即$(G\vee H)\wedge A\wedge B=(A\wedge B\wedge G)\vee(A\wedge B\wedge H)=\underline{0}$,即$(A\wedge G)\vee(B\wedge H)=\underline{0}$.

因此$(A\wedge G)=\underline{0}$,$(B\wedge H)=\underline{0}$. 于是$cl_s(H)\wedge G\leq cl_s(A)\wedge G=A\wedge G=\underline{0}$.

类似地,$H\wedge cl_s(G)=\underline{0}$. 这证明了$G$和$H$是$S$-分离的,矛盾.

由定理可知下面推理1和推理2是成立的.

**推论 1**　设$(X,\tau)$是$L$-拓扑空间且$\{G_i\}_{i\in I}$是一族$S^*$-连通的$L$-集,如果存在$j\in I$使得对每个$i\neq j_i$,$G_i$和$G_j$不是$S$-分离的,那么$\bigvee_{i\in I}G_i$是$S^*$-连通的.

**推论 2**　设$(X,\tau)$是$L$-拓扑空间且$\{G_i\}_{i\in I}$是一族$S^*$-连通$L$-集,如果$\bigwedge_{i\in I}G_i\neq\underline{0}$,那么$\bigvee_{i\in I}G_i$是$S^*$-连通的.

**定理 4**　设$(X,\tau)$是$L$-拓扑空间且$G\in L^X$,则$G$是$S^*$-连通的当且仅当对$G$中任意两个非零的$\vee$-既

约元 $a$、$b$,存在 $S^*$-连通的 $L$-集 $H$ 使得 $a$、$b\leqslant H\leqslant G$.

**证明**　我们只证明充分性,假设 $G$ 在$(X,\tau)$中不是 $S^*$-连通的,则存在两个半闭 $L$-集 $A$、$B\in L^X$ 使得 $G\nleqslant A,G\nleqslant B,G'\vee A\vee B=\underline{1}$ 及 $G\wedge A\wedge B=\underline{0}$. 取两个非零的 $\vee$-既约元 $a$、$b<G$,使得 $a\nleqslant A,b\nleqslant B$. 设 $H$ 是 $S^*$-连通的 $L$-集且满足 $a$、$b\leqslant H\leqslant G$,则有 $G\nleqslant A,G\nleqslant B$,事实上,如果 $H\leqslant A$,则由 $a\leqslant H$ 可知 $a\leqslant A$,这矛盾于 $a\nleqslant A$,由 $H\leqslant G$ 可知 $H'\vee A\vee B=\underline{1}$ 及 $H\wedge A\wedge B=\underline{0}$. 这证明了 $H$ 不是 $S^*$-连通的,矛盾.

**定理 5**　设$(X,\tau_1)$,$(Y,\tau_2)$是两个 $L$-拓扑空间,$f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$是映射且它是不定的,如果 $G$ 在$(X,\tau_1)$中是 $S^*$-连通的,那么$f^{\to}(G)$在$(Y,\tau_2)$中也是 $S^*$-连通的.

**证明**　假设$f^{\to}(G)$在$(Y,\tau_2)$中不是 $S^*$-联通的,则存在两个半闭 $L$-集 $A$、$B\in M^Y$ 使得 $f^{\to}(G)\nleqslant A$,$f^{\to}(G)\nleqslant B$,$(f^{\to}(G))'\vee A\vee B=\underline{1}$,$f^{\to}(G)\wedge A\wedge B=\underline{0}$. 所以 $G\nleqslant f^{\leftarrow}(A)$,$G\nleqslant f^{\leftarrow}(B)$,$G'\vee f^{\leftarrow}(A)\vee f^{\leftarrow}(B)=\underline{1}$,$G\wedge f^{\leftarrow}(A)\wedge f^{\leftarrow}(B)\leqslant f^{\leftarrow}(f^{\to}(G))\wedge f^{\leftarrow}(A)\wedge f^{\leftarrow}(B)=f^{\leftarrow}(f^{\to}(G)\wedge A\wedge B)=\underline{0}$. 这表明 $G$ 不是 $S^*$-连通的,矛盾. 于是$f^{\to}(G)$在$(Y,\tau_2)$是 $S^*$-连通的.

现在,将樊畿定理推广到 $L$-拓扑.

在文献[1]中,作者引入了远域映射的概念,类似地给出下述定义:

**定义 7**　设$(X,\tau)$是 $L$-拓扑空间且 $G\in L^X$. 映射 $F:J(G)\to SC(X)$ 称为 $G$ 中的 $S$-remote 映射,如果对每个 $e\in J(G)$,$e\nleqslant F(e)$.

**定理 6**　设$(X,\tau)$是 $L$-拓扑空间且 $G\in L^X$,则 $G$ 是 $S^*$-连通的当且仅当对 $a$、$b\in J(G)$及每个 $S$-remote 映射 $F:J(G)\to SC(X)$,在 $J(G)$中存在有限个元 $a=x_1,x_2,\cdots,x_n=b$ 使得 $G'\vee F(x_i)\vee F(x_{i+1})\neq\underline{1}$,$i=1,2,\cdots,n-1$.

**证明**　($\Leftarrow$)假设 $G$ 不是 $S^*$-连通的,则存在两个半闭 $L$-集 $A$、$B$ 使得 $G\nleqslant A,G\nleqslant B,G'\vee A\vee B=\underline{1}$ 及 $G\wedge A\wedge B=\underline{0}$. 定义 $S$-remote 映射 $F:J(G)\to SC(X)$如下:

$$\forall x\in J(G),F(x)=\begin{cases}B & 若\ x\leqslant A,\\ A & 若\ x\leqslant B.\end{cases}$$

取 $a$、$b\in J(G)$使得 $a\leqslant A$ 和 $b\leqslant B$,因为对于 $J(G)$中任意有限个元 $a=x_1,x_2,\cdots,x_n=b$,$x_i\leqslant A$ 和 $x_i\leqslant B(i=1,2,\cdots,n)$有且只有一个是真的,所以有 $F(x_i)=B$ 或者 $F(x_i)=A$. 但 $F(x_1)=B$ 及 $F(x_n)=A$. 因此存在 $j(1\leqslant j\leqslant n-1)$使得 $F(x_j)=B$ 和 $F(x_{j+1})=A$. 因此存在 $j(1\leqslant j\leqslant n-1)$,使得 $F(x_j)=B$ 和 $F(x_{j+1})=A$. 这证明了 $G'\vee A\vee B=G'\vee F(x_j)\vee F(x_{j+1})=\underline{1}$,矛盾.

($\Rightarrow$)假设定理的情况是不真的,即存在两个元 $a$、$b\in J(G)$及 $S$-remote 映射 $F:J(G)\to SC(X)$,使得 $G\vee F(x_i)\vee F(x_{i+1})\neq\underline{1}$,$i=1,2,\cdots,n-1$. 对任意有限个元 $a=x_1,x_2,\cdots,x_n=b\in J(G)$不是真的,为了方便起见,假定如果存在有限个元 $a=x_1,x_2,\cdots,x_n=b\in J(G)$,使得 $G\vee F(x_i)\vee F(x_{i+1})\neq\underline{1}$,$i=1,2,\cdots,n-1$,则 $a$ 和 $b$ 是可连接的,否则称 $a$ 和 $b$ 是不可连接的. 设

$$\phi=\{x\in J(G)\mid a\ 和\ x\ 可连接\};$$
$$\psi=\{x\in J(G)\mid a\ 和\ x\ 不可连接\}.$$

则对任意的 $c\in\phi$ 及任意的 $d\in\psi$,有 $G'\leqslant F(c)\vee F(d)=\underline{1}$. 设

$$A=\wedge\{F(c)\mid c\in\phi\},B=\wedge\{F(d)\mid d\in\psi\},$$

则 $G'\vee A\vee B=G'\vee(\wedge\{F(c)\mid c\in\varphi\})\vee(\wedge\{F(d)\mid d\in\psi\})=G'\vee\wedge\{(F(c)\vee F(d))\mid c\in\phi,d\in\psi\}=\underline{1}$.

显然,$a$ 和 $a$ 可连接,于是 $a\in\phi$. 因为 $a$ 和 $b$ 不可连接,所以 $b\in\psi$,因此 $G\nleqslant A,G\nleqslant B$. 此外,明显有 $G\wedge A\wedge B=\underline{0}$ 且由 $A$、$B$ 的定义可知 $A$、$B$ 是半闭 $L$-集. 这证明 $G$ 不是 $S^*$-连通的,矛盾.

## 2　$S^*$-连通性和 $S$-连通性之间的关系

**定义 8**　设$(X,\tau)$是 $L$-拓扑空间且 $G\in L^X$,$G$ 称为是 $S$-连通的,如果不存在两个半闭 $L$-集 $A$、$B$ 使得 $A\wedge G\neq\underline{0}$,$B\wedge G\neq\underline{0}$,$G\leqslant A\vee B$ 及 $A\wedge B\wedge G=\underline{0}$.

**定理 7**　设$(X,\tau)$是 $L$-拓扑空间且 $G\in L^X$,如果 $1\in J(L)$及 $G$ 是 $S$-连通的,那么 $G$ 是 $S^*$-连通的.

**证明**　假设 $G$ 不是 $S^*$-连通的,则存在两个半闭 $L$-集 $G\wedge A\neq\underline{0}$,$G\wedge B\neq\underline{0}$ 使得

$$G\wedge A\neq\underline{0},G\wedge B\neq\underline{0},G'\vee A\vee B=\underline{1},G\wedge A\wedge B=\underline{0},$$

由 $G'\vee A\vee B=\underset{\sim}{1}$ 及引理 1 有 $G\leqslant A\vee B$,这矛盾于 $G$ 是 $S$-连通的.

定理 7 的逆是不成立的,这可由下面例子看出.

**例 1**　设 $X=\{x_1,x_2\}$,$L=\{0,a,b,c,d,1\}$,$L$ 中元素的关系如下:

$$a'=b,b'=a,c'=d,d'=c,1'=0,0'=1,a\wedge b=d,0<d<a<c<1,0<d<b<c<1,$$

$a$ 和 $b$ 是不可比较的. $\forall\lambda,\mu\in L$,定义 $L$-集 $C(\lambda,\mu):X\to L$ 使得

$$C(\lambda,\mu)(x)=\begin{cases}\lambda & \text{若 } x=x_1.\\ \mu & \text{若 } x=x_2.\end{cases}$$

设$(X,\tau)$是 $L$-拓扑空间,这里 $\tau=\{C(0,0),C(b,a),C(b,1),C(1,a),C(1,1)\}$. 令 $\Omega$ 是所有半闭 $L$-集之族,则:

$$\Omega=\{C(0,0),C(0,b),C(0,d),C(a,0),C(a,b),C(a,d),C(d,0),C(d,d),C(1,1)\}.$$

对于 $L$-集 $C(d,d)$,有 $C(d,d)\nleqq C(d,0)$,$C(d,d)\nleqq C(0,d)$,$C(d,d)\leqslant C(d,0)\vee C(0,d)$ 及 $C(d,d)\wedge C(d,0)\wedge C(0,d)=\underset{\sim}{0}$,所以 $C(d,d)$ 不是 $S$-连通的. 但不存在半闭 $L$-集 $A$、$B\in\phi$ 使得 $C(d,d)\nleqq A$,$C(d,d)\nleqq B$,$(C(d,d))'\vee A\vee B=\underset{\sim}{1}$ 及 $C(d,d)\wedge A\wedge B=\underset{\sim}{0}$. 所以 $G$ 是 $S^*$-连通的.

**定理 8**　设$(X,\tau)$是 $L$-拓扑空间且 $G$ 是分明子集,则 $G$ 是 $S$-连通的当且仅当它是 $S^*$-连通的.

**证明**　证明是容易的,故略去.

## [参考文献]

[1]　王国民,史福贵. $L$-fuzzy 空间的局部连通性[J]. 模糊系统与数学,1996,4:51-55.

[2]　刘念,伏文清,李生刚. $L$-预拓扑空间的强连通集和局部强连通 $L$-预拓扑空间[J]. 模糊系统与数学,2013,27(3):59-62.

[3]　王国俊. $L$-fuzzy 拓扑空间论[M]. 西安:陕西师范大学出版社,1988.

[4]　王小霞,姜金平. $L$-双拓扑空间中几类连通性机器等价刻画[J]. 河南科学,2013,31:1343-1345.

[5]　AZAD K K. On fuzzy semicontinuity,fuzzy almost continuity and fuzzy weakly continuity[J]. J Math Anal Appl,1981,82:14-32.

[6]　CHANG C L. Fuzzy topological spaces[J]. Journal of mathematical analysis and applications,1968,24:182-190.

[责任编辑:陆炳新]