第 41 卷第 2 期 南京师大学报(自然科学版) Vol. 41 No. 2
2018 年 6 月 JOURNAL OF NANJING NORMAL UNIVERSITY(Natural Science Edition) June,2018

doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2018.02.005

关于 τ-刚性模的注记

谢宗真,张孝金

(南京信息工程大学数学与统计学院,江苏 南京 210044)

[**摘要**] 给定一个本原不可分解的代数 Λ,如果 Λ 的所有的 τ-刚性模都是投射模,则它是局部代数. 对于任意一个本原的不可分解代数 Γ,内射模 $D\Gamma$ 是 τ-刚性模当且仅当 Γ 的自内射维数小于或等于 1,其中 D 为通常的对偶.

[**关键词**] τ-刚性模,内射模,内射维数,局部代数

[**中图分类号**]O154.2 [**文献标志码**]A [**文章编号**]1001-4616(2018)02-0023-03

A Note on τ-Rigid Modules

Xie Zongzhen,Zhang Xiaojin

(School of Mathematics and Statistics,Nanjing University of Information Science and Technology,Nanjing 210044,China)

Abstract:For a basic indecomposable finite dimensional algebra Λ, if all τ-rigid Λ-modules are projective, then Λ is local. For any basic indecomposable finite dimensional algebra Γ, then the injective module $D\Gamma$ is τ-rigid if and only if the injective dimension of Γ is at most one, where D is the usual duality.

Key words:τ-rigid module, injective module, injective dimension, local algebra

20 世纪 80 年代,Auslander 和 Smalo 研究了有限维代数上的 τ-刚性模. 最近 Adachi,Iyama 和 Reiten 从 mutation 的角度推广了经典的倾斜理论并引入了 τ-倾斜理论[1]. 而这套理论的重要工具和研究对象是 τ-倾斜模. 因此研究一个代数上的 τ-倾斜模是非常有意义的. 注意到任何一个 τ-倾斜模都是一些不可分解的 τ-刚性模的直和,因此研究代数的 τ-刚性模是非常重要的. 关于 τ-倾斜模和 τ-刚性模最新的结果,可参见文献[2-8].

局部代数 Λ 具有唯一的 τ-倾斜模,即 Λ 所有的 τ-刚性模都是投射的. 则有

问题 1 如果一个本原的不可分解的有限维代数 Λ 上的所有的 τ-刚性模都是投射的,那么 Λ 是不是局部代数呢?

在[8]中已经证明了所有 τ-刚性模都是投射模的根平方为零本原的不可分解的代数是局部代数. 本文我们将完全解决以上问题并证明如下定理:

定理 1 设 Λ 是一个本原的不可分解的有限维代数. 如果 Λ 的所有的 τ-刚性模都是投射模,则 Λ 是局部代数.

另一方面,研究了投射模的 τ-刚性性质后,考虑内射模与 τ-刚性模的联系. 注意到遗传代数 Λ 的内射模 $D\Lambda$ 都是 τ-刚性的,则有

问题 2 是否存在更多的代数 Λ 满足内射模 $D\Lambda$ 是 τ-刚性的呢?

在下文中将给出这个问题的完全解答,首先证明如下定理:

定理 2 设 Γ 是本原的不可分解的有限维代数,$D\Gamma$ 是 τ-刚性模当且仅当 $id_\Gamma \Gamma \leqslant 1$.

下文由两部分组成. 第一部分介绍基本定义并证明一个本原的不可分解的有限维代数 Λ 上的所有的 τ-刚性模都是投射的,且 Λ 为局部代数. 第二部分证明本原的不可分解的有限维代数 Γ 的内射模 $D\Gamma$ 是τ-刚性模当且仅当 Γ 的自内射维数小于等于 1,然后给出例子说明存在一类代数 Γ 满足其所有的不可分解内射模是 τ-刚

收稿日期:2017-05-30.

基金项目:国家自然科学基金青年基金(11101217,11401488)、江苏省自然科学基金青年基金(BK20130983).

通讯联系人:张孝金,博士,副教授,研究方向:代数表示论. E-mail:xiaojinzhang@ sohu.com

性模但 $D\Gamma$ 不是 τ-刚性模. 特别地,本文所有的代数 Λ 都是代数闭域 K 上的本原的不可分解的有限维代数. 所有的模都是有限生成右模. 记 mod Λ 为有限生成右 Λ-模范畴. $D=Hom_K(-,K)$ 表示通常的对偶.

1 局部性

设 Λ 是一个代数且 T 是一个有限生成的右 Λ-模. 我们有:

定义 1[1]　(a) T 称为 τ-刚性的如果 $Hom_\Lambda(T,\tau T)=0$. 其中,τ 是 Auslander-Reiten 变换函子.

(b) T 称为 τ-倾斜模如果 T 是 τ-刚性的并且 T 的互不同构的不可分解直和项个数与代数 Λ 的互不同构不可分解直和项的个数相同.

(c) T 称为 support τ-倾斜模如果存在一个幂等元 e 使得 T 是一个 τ-倾斜 $\Lambda/\langle e\rangle$模.

(d) (T,P) 称为 support τ-倾斜对如果 T 是 τ-刚性的,$Hom_\Lambda(P,T)=0$ 且 $|T|+|P|=|\Lambda|$.

注记 1　由 AR-公式易知 T 是 τ-刚性模可以推出 $Ext_\Lambda^1(T,T)=0$.

定义 2[1]　Λ 的两个本原 support τ-倾斜对 (T,P) 和 (T',P') 互相称为 mutations,如果存在本原几乎完备 support τ-倾斜对 (U,Q) 是 (T,P) 和 (T',P') 的直和. 我们记 $(T',P')=\mu x(T,P)$ 或简单的记做 $T'=\mu x(T)$ 如果 X 是不可分解 Λ 模满足 $T=U\oplus X$ 或 $P=Q\oplus X$.

记 Fac U 为 U 的有限直和项的商模范畴. 我们有:

定义 3[1]　令 $T=X\oplus U$ 且 T' 是 support τ-倾斜模,使得对于一些不可分解的 Λ 模 X 有 $T'=\mu x(T)$. 当 $T>T'$ 或 $T<T'$ 成立时,称 T' 是 T 的左 mutation(右 mutation),记 $T'=\mu^- x(T)$ $(T'=\mu^+ x(T))$. 如果满足 $X\notin$ Fac U ($X\in$ Fac U).

定义 4[1]　对于 $M\in$ mod Λ,如果任一个单 Λ-模都是 M 的一个合成因子,则称 M 为亲切模.

引理 1[1]　令 $T=X\oplus U$ 是本原 τ-倾斜模,其中 U 是 Bongartz 补,X 不可分解. 取 $X\xrightarrow{f}U'\xrightarrow{g}Y\to 0$ 为正合列,其中 f 是极小左逼近. 则有

(a) 如果 U 不是亲切模,则 $Y=0$. 此时 $U=\mu^- x(T)$ 成立且是一个本原的 support τ-倾斜 Λ 模而不是 τ-倾斜模.

(b) 如果 U 是亲切模,则 Y 是不可分解 Λ 模 Y_1 的直和且不在 add T 中. 此时 $Y_1\oplus U=\mu^- x(T)$ 成立且是一个本原 τ-倾斜 Λ 模.

定理 3　设 Λ 是一个本原的不可分解的有限维代数. 如果 Λ 的所有的 τ-刚性模都是投射模,则 Λ 是局部代数.

证明　不妨设

$$\Lambda=P_1\oplus P_2\oplus\cdots\oplus P_n,\quad n\geqslant 1.$$

式中,$P_i\not\cong P_j$,其中 $i\neq j$.

下证 $n=1$.

反证法. 假设 n 大于 1.

由于 Λ 是本原的,则 $\forall P_i\notin$ Fac $P_1\oplus\cdots\oplus P_{i-1}\oplus P_{i+1}\oplus\cdots\oplus P_n$ 对于任意的 $1\leqslant i\leqslant n$ 成立.

又注意到 Λ 是一个 support τ-倾斜模,由定义 3 以及引理 1 可知存在正合列

$$P_i\xrightarrow{f}P'\to \mathrm{Coker}\, f\to 0,$$

其中,$P'\in$ add P 且 f 是一个极小的左 add$(\Lambda\backslash P_i)$-逼近.

再由引理 1 可知 $P_i\oplus$Coker f 是 support τ-倾斜模. 由定义 1 可知 Coker f 是 τ-刚性模. 由命题条件可知所有的 τ-刚性模都是投射模,从而 Coker f 是投射模,得可裂正合列

$$0\to \mathrm{lm}\, f\to P'\to \mathrm{Coker}\, f\to 0.$$

从而可得 $P'\cong$ lm $f\oplus$Coker f,由 lm f 是投射模可知 $P_i\to$ lm f 是满射,所以 $P_i\cong$ lm f. 因此 $P_i \underset{\oplus}{<} P'$,与 $\forall P_i\notin$ Fac $P_1\oplus\cdots\oplus P_{i-1}\oplus P_{i+1}\oplus\cdots\oplus P_n$ 矛盾.

所以假设不成立,因此代数 Λ 一定是个局部代数.

2 τ-刚性模与内射模

本节中,我们要考虑一个代数 Γ 的 τ-刚性模与内射模之间的联系,并给出 $D\Gamma$ 是 τ-刚性模的充分必

要条件.

下面介绍忠实模的定义:

定义 5[9] 对于 $M\in \mathrm{mod}\ \Gamma$,如果它的零化子为零,则称 M 为忠实模.

引理 2[9] 对于 $M\in \mathrm{mod}\ \Gamma$,以下几个条件等价

(a) M_Γ 为忠实的.

(b) Γ_Γ 是由 M 上生成的.

(c) $(D\Gamma)_\Gamma$ 是由 M 生成的.

引理 3[1] 任意的倾斜 Γ-模恰好是忠实的 support τ-倾斜 Γ-模.

引理 4[1] (1)对于任意的 Γ 模 X 和 Y, $Hom_\Gamma(X,\tau Y)=0$ 当且仅当

$$Ext_\Gamma^1(Y,Fac\ X)=0.$$

(2) X 是 τ-刚性模当且仅当 $Ext_\Gamma^1(X,Fac\ X)=0$.

下面我们给出本节的主要结果:

定理 4 设 Γ 是本原的不可分解的有限维代数, $D\Gamma$ 是 τ-刚性模当且仅当 $id_\Gamma\Gamma\leqslant 1$.

证明 必要性 由命题可知 $D\Gamma$ 是 τ-刚性模. 由引理 2 可知 $D\Gamma$ 是忠实的. 由引理 3 可知 $D\Gamma$ 是倾斜模. 利用倾斜模的定义,可得 $pd_\Gamma D\Gamma\leqslant 1$. 从而 $id_{\Gamma^{op}}\Gamma\leqslant 1$. 注意到自内射维数小于等于 1 的代数是左右对称的,因此 $id_\Gamma\Gamma\leqslant 1$.

充分性 由定义 1 和引理 4 可知, $D\Gamma$ 是 τ-刚性模的充分必要条件是 $Ext_\Gamma^1(D\Gamma,Fac\ D\Gamma)=0$,其中 $Fac\ D\Gamma=\{M\mid \exists n\in \mathbf{Z}$,使得$(D\Gamma)^n\to M$ 为满射$\}$. 取 $\forall M\in Fac\ D\Gamma$ 有正合列

$$0\to N\to D\Gamma^n\to M\to 0. \tag{1}$$

将 $Hom_\Gamma(D\Gamma,-)$ 作用于正合列(1)得

$$\begin{aligned}&0\to Hom_\Gamma(D\Gamma,N)\to Hom_\Gamma(D\Gamma,D\Gamma^n)\to Hom_\Gamma(D\Gamma,M)\to Ext_\Gamma^1(D\Gamma,N)\\&\to Ext_\Gamma^1(D\Gamma,D\Gamma^n)\to Ext_\Gamma^1(D\Gamma,M)\to Ext_\Gamma^2(D\Gamma,N)\to Ext_\Gamma^2(D\Gamma,D\Gamma^n)\to\cdots\end{aligned}$$

由 $D\Gamma$ 是内射 Γ-模知 $Ext_\Gamma^1(D\Gamma,M)\cong Ext_\Gamma^2(D\Gamma,N)$. 又由 $id_\Gamma\Gamma\leqslant 1$ 知 $pd_\Gamma D\Gamma\leqslant 1$,从而 $Ext_\Gamma^1(D\Gamma,M)\cong Ext_\Gamma^2(D\Gamma,N)=0$,有 $Ext_\Gamma^1(D\Gamma,Fac\ D\Gamma)=0$,所以 $D\Gamma$ 是 τ-刚性模.

下面举例说明存在代数 Γ 满足所有的不可分解内射模是 τ-刚性模,但 $D\Gamma$ 不是 τ-刚性模.

例 1 设 Q 为箭图 $1\xrightarrow{\alpha_1}2\xrightarrow{\alpha_2}3$,其中 $I=R:\alpha_1\alpha_2=0$,令 $\Gamma=\dfrac{KQ}{I}$. 则

(1) Γ 的整体维数是 2.

(2) $I(2)=P(1)$, $I(3)=P(2)$, $I(1)=S(1)$ 都是 τ-刚性模.

(3) $D\Gamma$ 不是 τ-刚性模.

[参考文献]

[1] ADACHI T,IYAMA O,REITEN I. τ-tilting theory[J]. Composito mathematica,2014,150(3):415-452.

[2] MIZUNO Y. Classifying τ-tilting modules over preprojective algebras of Dynkin type[J]. Mathematische zeitschrift,2014,277(3):665-690.

[3] WEI J Q. τ-tilting theory and $*$-modules[J]. Journal of algebra,2014,414:1-5.

[4] DEMONET L,IYAMA O,JASSO G. τ-tilting finite algebras and g-vectors[J]. ArXiv:1503.00285.

[5] HUANG Z Y,ZHANG Y Y. G-stable support τ-tilting modules[J]. Frontiers of mathematics in China,2016,11(4):1057-1077.

[6] IYAMA O,JORGENSEN P,YANG D. Intermediate co-t-structures,two-term silting objects,τ-tilting modules and torsion classes[J]. Algebra and number theory,2014,8(10):2413-2431.

[7] JASSO G. Reduction of τ-tilting modules and torsion pairs[J]. International mathematics,2015,16:7190-7237.

[8] 谢宗真,张孝金. 所有 τ-刚性模是投射模的代数[J]. 山东大学学报(理学版),2016,51(2):16-20.

[9] ASSEM I,SIMSON D,SKOWROŃSKI A. Elements of the representation theory of associative algebras[M]. 北京:世界图书出版公司北京公司,2011:193.

[责任编辑:陈 庆]