doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2018.04.001

污染环境下具瞬时与非瞬时脉冲出生单种群动力学模型研究

焦建军[1],李利梅[2]

(1.贵州财经大学数统学院,贵州 贵阳 550025)
(2.贵州财经大学继续教育学院,贵州 贵阳 550025)

[**摘要**]　建立污染环境下具瞬时与非瞬时脉冲出生单种群动力学模型,利用常微分方程及差分分析方法,获得了系统种群灭绝和持久生存的控制条件,为污染环境中的生物资源管理提供了可靠的管理策略.

[**关键词**]　环境毒素,瞬时脉冲出生,非瞬时脉冲出生,灭绝,持久

[**中图分类号**]O175.3　[**文献标志码**]A　[**文章编号**]1001-4616(2018)04-0001-06

Dynamics of a Single Population Model with Instantaneous and Non-instantaneous Birth Pulse in a Polluted Environment

Jiao Jianjun[1],Li Limei[2]

(1.School of Mathematics and Statistics,Guizhou University of Finance and Economics,Guiyang 550025,China)
(2.School of Continuing Education,Guizhou University of Finance and Economics,Guiyang 550025,China)

Abstract:In this paper,we consider a single population model with instantaneous and non-instantaneous birth pulse in a polluted environment. By methods of ordinary differential equations and difference equations,we obtain the controlling conditions of extinct and permanence of system population. The conclusions prove management tactics for biological resource in polluted environment.

Key words:environmental toxin,instantaneous birth pulse,noninstantaneous birth pulse,extinct,permanence

对于某些动物(比如是海洋生物)来说,它们总是在每年特殊月份中生育后代. 换句话说,其出生率不是时间的连续函数,而是以脉冲的形式出现[1-3].

然而,随着社会的发展,环境污染也变得越来越严重,由于环境毒素的存在对种群的生存存在严重的危害,而由于环境的变化、污染源对环境脉冲排放环境毒素等造成了环境生物多样性的减少[4]. 近年来,许多生物数学家[5-8]对污染环境下的数学建模产生浓厚的兴趣.

基于上述讨论,考虑到种群出生在某年的特殊月份中生育后代以及其初次出生,本文讨论污染环境下具瞬时与非瞬时脉冲出生单种群动力学模型,分析其动力学行为,为污染环境下具瞬时与非瞬时脉冲出生的生物资源管理提供决策支持.

1　模型

常微分方程描述具脉冲出生单种群模型

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=-dx(t), & t\neq n\tau,\\ \Delta x(t)=x(t)(a-bx(t)), & t\neq n\tau,\end{cases}\tag{1}$$

收稿日期:2018-04-22.

基金项目:国家自然科学基金项目(11761019,11361014)、贵州省高层次创新型人才项目(20164035)、贵州省微分-差分动力系统应用科技创新人才团队(20175658)、贵州财经大学与商务部联合基金项目(2016SWBZD18).

通讯联系人:焦建军,博士,教授,研究方向:生物数学. E-mail:jiaojianjun05@126.com

式中,$x(t)$表示种群在时刻 t 的密度,$d>0$ 表示种群的死亡系数,$a>0$ 表示种群在时刻 $t=n\tau$ 的出生比例系数,$b>0$ 表示种群在时刻 $t=n\tau$ 出生时的种内竞争系数,$\tau>0$ 表示种群脉冲出生周期.

而污染环境下的毒素具脉冲输入的单种群动力学模型

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=x(t)(a-bx(t))-\beta c_o(t)x(t), & t\neq n\tau,\\ \dfrac{\mathrm{d}c_o(t)}{\mathrm{d}t}=fc_e(t)-(g+m)c_o(t), & t\neq n\tau,\\ \dfrac{\mathrm{d}c_e(t)}{\mathrm{d}t}=-hc_e(t), & t\neq n\tau,\\ \Delta x(t)=0, & t=n\tau,\\ \Delta c_o(t)=0, & t=n\tau,\\ \Delta c_e(t)=\mu, & t=n\tau,\end{cases} \tag{2}$$

式中,$x(t)$表示种群在时刻 t 的密度,$c_o(t)$表示种群体内毒素的浓度,$c_e(t)$表示环境毒素的浓度,$a>0$ 表示种群内禀增长率系数,$b>0$ 表示种内竞争系数. $\beta>0$ 表示种群受毒素的影响造成种群的死亡系数, $f>0$ 表示种群通过食物饮水等途径进入种群体内的毒素系数,$g>0$ 表示种群通过排泄等方式毒素的消耗系数,$m>0$ 表示种群通过体内生化反应等方式对毒素的消耗系数,$h>0$ 表示环境毒素受阳光等生化反应作用的影响的消耗系数,$\mu>0$ 表示环境变化等影响下毒素输入种群生活环境的浓度量,$\tau>0$ 表示种群脉冲出生周期.

由上述的讨论,考虑到种群的瞬时脉冲出生与非瞬时脉冲出生,建立污染环境下具瞬时与非瞬时脉冲出生单种群动力学模型

$$\begin{cases}\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=-dx(t)-\beta_1c_o(t)x(t),\\ &\frac{\mathrm{d}c_o(t)}{\mathrm{d}t}=fc_e(t)-(g+m)c_o(t),\\ &\frac{\mathrm{d}c_e(t)}{\mathrm{d}t}=-hc_e(t),\end{aligned}\right\} & t\in(n\tau,(n+l)\tau],\\ \left.\begin{aligned}&\Delta x(t)=bx(t),\\ &\Delta c_o(t)=0,\\ &\Delta c_e(t)=0,\end{aligned}\right\} & t=(n+l)\tau,\\ \left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=x(t)(a-b_1x(t))-\beta_2c_o(t)x(t),\\ &\frac{\mathrm{d}c_o(t)}{\mathrm{d}t}=fc_e(t)-(g+m)c_o(t),\\ &\frac{\mathrm{d}c_e(t)}{\mathrm{d}t}=-hc_e(t),\end{aligned}\right\} & t\in((n+l)\tau,(n+1)\tau],\\ \left.\begin{aligned}&\Delta x(t)=0,\\ &\Delta c_o(t)=0,\\ &\Delta c_e(t)=\mu,\end{aligned}\right\} & t=(n+1)\tau,\end{cases} \tag{3}$$

式中,$x(t)$表示种群在时刻 t 的密度,$c_o(t)$表示种群体内毒素的浓度,$c_e(t)$表示种群生活环境的毒素在时刻 t 的浓度,$d>0$ 表示种群在非生育期$(n\tau,(n+l)\tau]$内的死亡系数,β_1 表示种群在非生育期$(n\tau,(n+l)\tau]$内由于环境毒素而引发的死亡系数, $f>0$ 表示种群在非生育期$(n\tau,(n+l)\tau]$内通过食物饮水等途径进入种群体内的毒素系数,$g>0$ 表示种群在非生育期$(n\tau,(n+l)\tau]$内通过排泄等方式毒素的消耗系数,$m>0$ 表示种群在非生育期$(n\tau,(n+l)\tau]$内通过体内生化反应等方式对毒素的消耗系数,$h>0$ 表示环境毒素受阳光等生化反应作用的影响的消耗系数,$b>0$ 表示种群在 $t=n\tau$ 时刻的瞬时脉冲出生系数,也称为种群在一

个出生周期内的初次脉冲出生系数,$a>0$ 表示种群在生育期$((n+l)\tau,(n+1)\tau]$内内秉增长率系数($l>0$, $l\to 1$). $b_1>0$ 表示种群在生育期$((n+l)\tau,(n+1)\tau]$内种内竞争系数. 因为种群的出生时间间隔较小,所以也称为种群在生育期$((n+l)\tau,(n+1)\tau]$内的出生为非瞬时脉冲出生. β_2 表示种群在生育期$((n+l)\tau,(n+1)\tau]$内由于环境毒素而引发的死亡系数,$f>0$ 表示种群在生育期$((n+l)\tau,(n+1)\tau]$内通过食物饮水等途径进入种群体内的毒素系数,$g>0$ 表示种群在生育期$((n+l)\tau,(n+1)\tau]$内通过排泄等方式毒素的消耗系数,$m>0$ 表示种群在生育期$((n+l)\tau,(n+1)\tau]$内通过体内生化反应等方式对毒素的消耗系数,$h>0$ 表示种群在生育期$((n+l)\tau,(n+1)\tau]$内环境毒素受阳光等生化反应作用的影响的消耗系数,$\mu>0$ 表示在 $t=(n+1)\tau$ 时刻环境毒素浓度的脉冲输入,τ 表示种群的瞬时脉冲出生周期.

2 主要结论

方程组右边的函数$f=(f_1,f_2,f_3)$,方程组的解 $z:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}_+^3$是一个分段连续的函数,$z(t)=(x(t),c_o(t),c_e(t))^{\mathrm{T}}$,$\mathbf{R}^+=[0,\infty)$,$\mathbf{R}_+^3=\{z\in\mathbf{R}^3:z>0\}$,$z(t)$在$(n\tau,(n+l)\tau)\times\mathbf{R}_+^3$是连续的,在$((n+l)\tau,(n+1)\tau]\times\mathbf{R}_+^3$是连续的. 根据文献[9],$f$ 的光滑性保证了方程组的解的全局存在性和唯一性.

设 $V:\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}_+^3\to\mathbf{R}_+$,那么 V 属于 V_0,如果

(1) V 在$(n\tau,(n+1)\tau]\times\mathbf{R}_+^3$ 对每个 $z\in\mathbf{R}_+^3$ 是连续的,$\lim_{(t,u)\to((n+l)\tau^+,z)}V(t,u)=V((n+l)\tau^+),z)$,与 $\lim_{(t,u)\to((n+1)\tau^+,z)}V(t,u)=V((n+1)\tau^+),z)$,存在,

(2) V 在 z 是局部李普希茨的.

引理 1[9] 考虑系统(3)的子系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}c_o(t)}{\mathrm{d}t}=fc_e(t)-(g+m)c_e(t), & t\in(n\tau,(n+1)\tau],\\ \dfrac{\mathrm{d}c_e(t)}{\mathrm{d}t}=-hc_e(t), & t\in(n\tau,(n+1)\tau],\\ \Delta c_o(t)=0, & t=n\tau,\\ \Delta c_e(t)=\mu, & t=n\tau,\end{cases}\tag{4}$$

则(4)存在全局渐近稳定的唯一的周期解

$$\begin{cases}\widetilde{c_o(t)}=\widetilde{c_o(0)}\mathrm{e}^{-(g+m)(t-n\tau)}+\dfrac{\mu f(\mathrm{e}^{-(g+m)(t-n\tau)}-\mathrm{e}^{-h(t-n\tau)})}{(h-g-m)(1-\mathrm{e}^{-h\tau})}, & t\in(n\tau,(n+l)\tau],\\ \widetilde{c_e(t)}=\dfrac{\mu\mathrm{e}^{-h(t-n\tau)}}{1-\mathrm{e}^{-h\tau}}, & t\in((n+l)\tau,(n+1)\tau],\\ \widetilde{c_o(0)}=\dfrac{\mu f(\mathrm{e}^{-(g+m)(t-n\tau)}-\mathrm{e}^{-h(t-n\tau)})}{(h-g-m)(1-\mathrm{e}^{-(g+m)\tau})(1-\mathrm{e}^{-h\tau})},\\ \widetilde{c_e(0)}=\dfrac{\mu}{1-\mathrm{e}^{-h\tau}}.\end{cases}$$

注 1 由引理 1 可知,对任意的$(1+b)(1-\mu)\mathrm{e}^{[a(1-l)-dl]\tau}<1$,有

$$\begin{cases}\widetilde{c_o(t)}-\varepsilon<c_o(t)<\widetilde{c_o(t)}+\varepsilon,\\ \widetilde{c_e(t)}-\varepsilon<c_e(t)<\widetilde{c_e(t)}+\varepsilon,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}m_o-\varepsilon<c_o(t)<M_o+\varepsilon,\\ m_e-\varepsilon<c_e(t)<M_e+\varepsilon,\end{cases}$$

式中,$m_o=[\widetilde{c_o(0)}\mathrm{e}^{-(g+m)\tau}+\dfrac{\mu f(\mathrm{e}^{-(g+m)\tau}-\mathrm{e}^{-h\tau})}{(h-g-m)(1-\mathrm{e}^{-h\tau})}]$,$M_o=[\widetilde{c_o(0)}+\dfrac{\mu f}{(h-g-m)(1-\mathrm{e}^{-h\tau})}]$,$m_e=\dfrac{\mu\mathrm{e}^{-h\tau}}{1-\mathrm{e}^{-h\tau}}$,$M_e=\dfrac{\mu}{1-\mathrm{e}^{-h\tau}}$.

考虑系统(3)的子系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=-dx(t), & t\in(n\tau(n+l)\tau],\\ \Delta x(t)=bx(t), & t=(n+l)\tau,\\ \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=x(t)(a-b_1x(t)), & t\in((n+l)\tau,(n+1)\tau],\\ \Delta x(t)=-\mu x(t), & t=(n+1)\tau,\end{cases} \tag{5}$$

由系统(5)的第一与第三个方程,容易得到系统(5)在脉冲点之间的解析解为:

$$x(t)=\begin{cases}x(n\tau^+)\mathrm{e}^{-d(t-n\tau)}, & t\in(n\tau,(n+l)]\tau,\\ \dfrac{ax((n+l)\tau^+)\mathrm{e}^{a(t-(n+l)\tau)}}{a+b_1x((n+l)\tau^+)(\mathrm{e}^{a(t-(n+l)\tau)}-1)}, & t\in((n+l)\tau,(n+1)\tau].\end{cases} \tag{6}$$

由系统(5)的第二与第四个方程,得到系统(5)的频闪映射为:

$$x((n+1)\tau^+)=\frac{a(1+b)(1-\mu)x(n\tau^+)\mathrm{e}^{-dl\tau}\mathrm{e}^{a(1-l)\tau}}{a+b_1(1+b)x(n\tau^+)\mathrm{e}^{-dl\tau}(\mathrm{e}^{a(1-l)\tau}-1)}. \tag{7}$$

计算(7),得到系统(7)的两个不动点 $F_1(0)$ 与 $F_2(x^*)$,而

$$x^*=\frac{a[(1+b)(1-\mu)\mathrm{e}^{[a(1-l)-dl]\tau}-1]}{b_1(1+b)\mathrm{e}^{-dl\tau}(\mathrm{e}^{a(1-l)\tau}-1)},\quad (1+b)(1-\mu)\mathrm{e}^{[a(1-l)-dl]\tau}>1. \tag{8}$$

定理 1

(1)当 $(1+b)(1-\mu)\mathrm{e}^{[a(1-l)-dl]\tau}<1$ 时,系统(7)的唯一不动点 $F_1(0)$ 是全局渐近稳定的.

(2)当 $(1+b)(1-\mu)\mathrm{e}^{[a(1-l)-dl]\tau}>1$ 时,系统(7)的不动点 $F_1(0)$ 是不稳定的,系统(7)的正不动点 $F_2(x^*)$ 是全局渐近稳定的,其中 x^* 如(8).

证明　为了方便,引入记号 $x_n=x(n\tau^+)$,那么差分方程(7)可以写成

$$x_{n+1}=F(x_n), \tag{9}$$

式中,$F(x_n)=\dfrac{Ax_n}{a+Bx_n}$,$A=a(1+b)(1-\mu)\mathrm{e}^{(a(1-l)-dl)\tau}$,$B=b_1(1+b)\mathrm{e}^{-dl\tau}(\mathrm{e}^{a(1-l)\tau}-1)$.

(1)当 $(1+b)(1-\mu)\mathrm{e}^{[a(1-l)-dl]\tau}<1$ 时,系统(9)有唯一的不动点 $F_1(0)$,于是

$$\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=\frac{Aa}{(a+Bx)^2}\Big|_{x=0}=(1+b)(1-\mu)\mathrm{e}^{(a(1-l)-dl)\tau}<1. \tag{10}$$

所以系统(9)的唯一不动点 $F_1(0)$ 是局部渐近稳定的,进而是全局渐近稳定的.

(2)当 $(1+b)(1-\mu)\mathrm{e}^{[a(1-l)-dl]\tau}>1$ 时,对于系统(9)的不动点 $F_1(0)$,于是

$$\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=\frac{Aa}{(a+Bx)^2}\Big|_{x=0}=(1+b)(1-\mu)\mathrm{e}^{[a(1-l)-dl]\tau}>1.$$

所以系统(9)的不动点 $F_1(0)$ 是不稳定的.

当 $(1+b)(1-\mu)\mathrm{e}^{[a(1-l)-dl]\tau}>1$ 时,对于系统(9)的不动点 $F_2(x^*)$,于是

$$\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x^*}=\frac{Aa}{(a+Bx)^2}\Big|_{x=x^*}=\frac{1}{(1+b)(1-\mu)\mathrm{e}^{[a(1-l)-dl]\tau}}<1.$$

所以系统(9)的不动点 $F_2(x^*)$ 是局部渐近稳定的,进而是全局渐近稳定的.

由定理 1,易得:

定理 2

(1)当 $(1+b)(1-\mu)\mathrm{e}^{[a(1-l)-dl]\tau}<1$ 时,系统(5)的平凡周期解是全局渐近稳定的.

(2)当 $(1+b)(1-\mu)\mathrm{e}^{[a(1-l)-dl]\tau}>1$ 时,系统(5)的正周期解 $\widetilde{x(t)}$ 是全局渐近稳定的,其中

$$\widetilde{x(t)}=\begin{cases}x^*\mathrm{e}^{-d(t-n\tau)}, & t\in(n\tau,(n+l)\tau],\\ \dfrac{a\mathrm{e}^{a(t-(n+l)\tau)}x^{**}}{a+b_1(\mathrm{e}^{a(t-(n+l)\tau)}-1)x^{**}}, & t\in((n+l)\tau,(n+1)\tau].\end{cases} \tag{11}$$

式中,$x^{**}=(1+b)\mathrm{e}^{-dl\tau}x^*$ 且 x^* 如(8)所定义.

考虑到(3)的子系统,得到

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}>-\mathrm{d}x(t)-\beta_1(\widetilde{c_o(t)}+\varepsilon)x(t), & t\in(n\tau,(n+l)\tau],\\ \Delta x(t)=bx(t), & t=(n+l)\tau,\\ \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=x(t)(a-b_1x(t))-\beta_2(\widetilde{c_o(t)}+\varepsilon)x(t), & t\in((n+l)\tau,(n+1)\tau],\\ \Delta x(t)=\mu x(t), & t=(n+1)\tau,\end{cases} \tag{12}$$

容易得到系统(12)的比较方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t}=-\mathrm{d}x_1(t)-\beta_1(\widetilde{c_o(t)}+\varepsilon)x_1(t), & t\in(n\tau,(n+l)\tau],\\ \Delta x_1(t)=bx_1(t), & t=(n+l)\tau,\\ \dfrac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t}=x_1(t)(a-b_1x_1(t)), & t\in((n+l)\tau,(n+1)\tau],\\ \Delta x_1(t)=\mu x_1(t), & t=(n+1)\tau.\end{cases} \tag{13}$$

并考虑到(3)的子系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}<-dx(t), & t\in(n\tau,(n+l)\tau],\\ \Delta x(t)=bx(t), & t=(n+l)\tau,\\ \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}<x(t)(a-b_1x(t)), & t\in((n+l)\tau,(n+1)\tau],\\ \Delta x(t)=\mu x(t), & t=(n+1)\tau,\end{cases} \tag{14}$$

及其比较系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t}=-dx_2(t), & t\in(n\tau,(n+l)\tau],\\ \Delta x_2(t)=bx_2(t), & t=(n+l)\tau,\\ \dfrac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t}=x_2(t)(a-b_1x_2(t)), & t\in((n+l)\tau,(n+1)\tau],\\ \Delta x_2(t)=\mu x_2(t), & t=(n+1)\tau.\end{cases} \tag{15}$$

从而容易得到与(13)的频闪映射

$$x_1((n+1)\tau^+)=\frac{(a-\beta_2M_o)(1+b)(1-\mu)x_1(n\tau^+)\mathrm{e}^{-(d+\beta_1M_o)l\tau}\mathrm{e}^{(a-\beta_2M_o)(1-l)\tau}}{(a-\beta_2M_o)+b_1(1+b)x_1(n\tau^+)\mathrm{e}^{-(d+\beta_1M_o)l\tau}(\mathrm{e}^{(a-\beta_2M_o)(1-l)\tau}-1)}. \tag{16}$$

计算(16),可得到两个不动点 $P_1(0)$ 与 $P_2(x_1^*)$,且

$$x_1^*=\frac{(a-\beta_2M_o)[(1+b)(1-\mu)\mathrm{e}^{[(a-\beta_2M_o)(1-l)-(d+\beta_1M_o)l]\tau}-1]}{b_1(1+b)\mathrm{e}^{-(d+\beta_1M_o)l\tau}(\mathrm{e}^{(a-\beta_2M_o)(1-l)\tau}-1)},\quad (1+b)(1-\mu)\mathrm{e}^{[(a-\beta_2M_o)(1-l)-(d+\beta_1M_o)l]\tau}>1. \tag{17}$$

于是类似定理1与定理2可得

定理3

(1)当 $(1+b)(1-\mu)\mathrm{e}^{[(a-\beta_2M_o)(1-l)-(d+\beta_1M_o)l]\tau}<1$ 时,系统(16)的唯一不动点 $P_1(0)$ 是全局渐近稳定的.

(2)当 $(1+b)(1-\mu)\mathrm{e}^{[(a-\beta_2M_o)(1-l)-(d+\beta_1M_o)l]\tau}>1$ 时,系统(16)的不动点 $P_1(0)$ 是不稳定的,系统(13) 的正不动点 $P_2(x^*)$ 是全局渐近稳定的,其中 x^* 如(17).

定理4

(1)当 $(1+b)(1-\mu)\mathrm{e}^{[(a-\beta_2M_o)(1-l)-(d+\beta_1M_o)l]\tau}<1$ 时,系统(13)的平凡周期解是全局渐近稳定的.

(2)当 $(1+b)(1-\mu)\mathrm{e}^{[(a-\beta_2M_o)(1-l)-(d+\beta_1M_o)l]\tau}>1$ 时,系统(13)的正周期解 $\widetilde{x_1(t)}$ 是全局渐近稳定的,其中

$$\widetilde{x_1(t)}=\begin{cases}x_1^{*}\mathrm{e}^{-(d+\beta_1M_o)(t-n\tau)}, & t\in(n\tau,(n+l)]\tau,\\ \dfrac{(a-\beta_2M_o)\mathrm{e}^{(a-\beta_2M_o)(t-(n+l)\tau)}x_1^{**}}{(a-\beta_2M_o)+b_1(\mathrm{e}^{(a-\beta_2M_o)(t-(n+l)\tau)}-1)x_1^{**}}, & t\in((n+l)\tau,(n+1)\tau],\end{cases}\tag{18}$$

式中,$x^{**}=(1+b)\mathrm{e}^{-(d+\beta_1M_o)l\tau}x^{*}$ 且 x^{*} 如(17)所定义.

由定理 2 与定理 4 可得:

定理 5　(1)如果 $(1+b)(1-\mu)\mathrm{e}^{[a(1-l)-dl]\tau}<1$,那么系统(3)种群灭绝;

(2)如果 $(1+b)(1-\mu)\mathrm{e}^{[a(1-l)-dl]\tau}>1$,且 $(1+b)(1-\mu)\mathrm{e}^{[(a-\beta_2M_o)(1-l)-(d+\beta_1M_o)l]\tau}>1$,系统(3)种群持久.

由定理 4 与定理 5,更进一步可得:

定理 6　(1)如果 $(1+b)(1-\mu)\mathrm{e}^{[a(1-l)-dl]\tau}<1$,且 $(1+b)(1-\mu)\mathrm{e}^{[(a-\beta_2M_o)(1-l)-(d+\beta_1M_o)l]\tau}<1$,那么系统(3)种群灭绝边界周期解 $(0,\widetilde{c_o(t)},\widetilde{c_e(t)})$ 是全局渐近稳定的;

(2)如果 $(1+b)(1-\mu)\mathrm{e}^{[a(1-l)-dl]\tau}>1$,且 $(1+b)(1-\mu)\mathrm{e}^{[(a-\beta_2M_o)(1-l)-(d+\beta_1M_o)l]\tau}>1$,系统(3)种群持久.

3　结束语

本文考虑污染环境下毒素脉冲输入及种群的瞬时与非瞬时脉冲出生,建立污染环境下具瞬时与非瞬时脉冲出生单种群动力学模型,根据定理 6 的结论可以知道脉冲输入的毒素量存在一个阈值 μ^{*},当 $\mu>\mu^{*}$ 时,系统(1)种群灭绝;当 $\mu<\mu^{*}$ 时,系统(1)种群持久. 根据定理 6 的结论也可以知道瞬时脉冲出生量存在一个阈值 b^{*},当 $b<b^{*}$ 时,系统(1)种群灭绝;当 $b>b^{*}$ 时,系统(1)种群持久. 所得结论告诉我们控制治理污染的力度与增强种群的瞬时脉冲出生率能够保护环境生物的多样性,特别是环境污染控制的阈值与种群的脉冲出生率为污染环境下生物资源管理提供决策支持.

［参考文献］

[1]　焦建军,文乾英. 具脉冲出生与脉冲输入环境毒素的单种群动力学模型研究[J]. 数学的实践与认识,2014,44(22):299-304.

[2]　焦建军,鲍磊,陈兰荪. 具脉冲出生与脉冲收获阶段结构单独种群动力学模型[J]. 吉林大学学报(理学版),2011,49(1):6-10.

[3]　JIAO J J,CAI S H,CHEN L S. Analysis of a stage-structured predator-prey system with birth pulse and impulsive harvesting at different moments[J]. Nonlinear analysis:real world applications,2011,12(12):2232-2244.

[4]　HALLAM T G,CLARK C E,JORDAN G S. Effects of toxicants on population:a qualitative approach I. equilibrium environmental exposure[J]. Ecological modelling,1983,18(3/4):291-340.

[5]　DEBASIS M. Persistence and global stability of a population in a polluted environment with delay[J]. Journal of biological systems,2002,10:225-232.

[6]　JIAO J J,LONG W,CHEN L S. A single stages-structured population model with mature individuals in a polluted environment and pulse input of environmental toxin[J]. Nonlinear analysis:real world applicationgs,2009,10(5):3073-3081.

[7]　栾施,刘兵,张丽霞. 一个污染环境中的单种群模型的动力学性质[J]. 生物数学学报,2011,26(4):689-694.

[8]　LIU B,CHEN L S,ZHANG Y J. The effects of impulsive toxicant anput on a population in a polluted environment[J]. J Biol Syst,2003(11):265-287.

[9]　LAKSMIKANTHAM V. Theory of impulsive differential equations[M]. Singapore:World Scientific,1989.

［责任编辑:陆炳新］