doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2018.04.002

Lotka-Volterra 交错扩散方程组平衡解的局部渐近稳定性

徐 茜[1],赵 烨[2],杨玉洁[1]

(1.北京联合大学基础部,北京 100101)
(2.北京石油化工学院数理系,北京 102617)

[**摘要**] 本文主要研究在空间异质环境下一个 Lotka-Volterra 带交错扩散项的方程组. 通过细致的谱分析和线性化稳定性理论,证明了该 Lotka-Volterra 交错扩散方程组的分岔平衡解是局部渐近稳定的.

[**关键词**] 分岔解,谱分析,稳定性

[**中图分类号**]O175.2 [**文献标志码**]A [**文章编号**]1001-4616(2018)04-0007-05

Stability of Steady State Solution for a Lotka-Volterra Model with Cross Diffusion

Xu Qian[1],Zhao Ye[2],Yang Yujie[1]

(1.Department of Basic Courses,Beijing Union University,Beijing 100101,China)
(2.Department of Mathematics and Physics,Beijing Institute of Petrolchemical Technology,Beijing 102617,China)

Abstract:We investigate a Lotka-Volterra model with cross diffusion in a spatially heterogeneous environment. Through the detailed spectral analysis and linearized stability theory,we prove that the bifurcating solution of the Lotka-Volterra system with cross diffusion is locally asymptotically stable.

Key words:bifurcating solution,spectral analysis,stability

在捕食-被捕食模型中,空间异质环境对于两物种的种群密度有很重要的影响. Kuto K 在文献[1]中提出下列空间异质环境下 Lotka-Volterra 交错扩散方程组:

$$\begin{cases} u_t=\Delta[(D_1+\rho(x)v)u]+u(a_1-b_1u-c_1(x)v), & x\in\Omega,t>0,\\ v_t=D_2\Delta v+v(a_2+b_2(x)u-c_2v), & x\in\Omega,t>0,\\ \partial_\nu u=\partial_\nu v=0, & x\in\partial\Omega,t>0,\\ u(\cdot,0)=u_0(x)\geqslant 0,v(\cdot,0)=v_0(x)\geqslant 0, & x\in\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

式中,Ω 是$\mathbb{R}^N(N\leqslant 3)$中的有界区域,边界$\partial\Omega$ 是光滑的. D_1,D_2,a_1,b_1,c_2 都是正常数,a_2 是实数. $b_2(x)\geqslant 0,c_1(x)>0$ 是$\overline{\Omega}$ 上的连续函数. $\rho(x)$是$\overline{\Omega}$ 上的光滑函数且$\partial_\nu\rho=0$ 在$\partial\Omega$ 上. $u(x,t),v(x,t)$代表被捕食者和捕食者的种群密度. a_1,a_2 分别代表两种群的出生率. b_1,c_2 代表 u,v 的种群内部压力. 正常数 D_1,D_2 代表两种群的随机扩散率. 交错扩散项 $\Delta(\rho(x)vu)$表示被捕食者向$\rho(x)v$ 浓度低的区域扩散的一种趋势. 对于 Lotka-Volterra 交错扩散方程组,最早是由 Shigesada-Kawasaki-Teramoto[2] 于 1979 年提出的用来描述两竞争种群的分离现象,也称为 S-K-T 模型. 对于 S-K-T 模型,常系数情形下,当其中一个交错扩散系数充分大时,尖峰平衡解的存在性和稳定性已被广泛研究,见文献[3-5]. 近些年来,已有一些文献研究了空间异质环境对于种群浓度的影响,见文献[6-10]. 做变换$(\tilde{u},\tilde{v})=\left(\dfrac{b_1u}{D_1},\dfrac{c_2v}{D_2}\right)$,$(a,b,k,c(x),d(x))=\left(\dfrac{a_1}{D_1},\dfrac{a_2}{D_2},\right.$

收稿日期:2018-02-16.
基金项目:国家自然科学基金(11501031、11471221、11601030).
通讯联系人:徐茜,博士,副教授,研究方向:交错扩散方程. E-mail:xuqian098@163.com

$\left.\frac{D_2}{c_2D_1},\frac{D_2}{c_2D_1}c_1(x),\frac{D_1}{b_1D_2}b_2(x)\right)$,为简单起见,方程组(1)可转换为下列形式:

$$\begin{cases}u_t=\Delta[(1+k\rho(x)v)u]+u(a-u-c(x)v), & x\in\Omega,t>0,\\ v_t=\Delta v+v(b+d(x)u-v), & x\in\Omega,t>0,\\ \partial_\nu u=\partial_\nu v=0, & x\in\partial\Omega,t>0,\\ u(\cdot,0)=u_0(x)\geqslant 0,v(\cdot,0)=v_0(x)\geqslant 0, & x\in\Omega,\end{cases}\tag{2}$$

Kuto K 在文献[1]中证明了方程组(2)平衡解的整体分岔结构. 本文主要研究文献[1]中所得到的分岔平衡解在分岔点$(a,0,b_*)$的局部渐近稳定性.

1 预备知识

为后面证明分岔平衡解的局部渐近稳定性的需要,本章先叙述一些准备知识.

方程组(2)所对应的平衡解的方程组为

$$\begin{cases}\Delta[(1+k\rho(x)v)u]+u(a-u-c(x)v)=0, & x\in\Omega,\\ \Delta v+v(b+d(x)u-v)=0, & x\in\Omega,\\ \partial_\nu u=\partial_\nu v=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}\tag{3}$$

定义 Banach 空间为:$X:=W_\nu^{2,p}(\Omega)\times W_\nu^{2,p}(\Omega)$,$Y:=L^p(\Omega)\times L^p(\Omega)\,(p>N)$,其中,$W_\nu^{2,p}(\Omega):=\{u\in W_\nu^{2,p}(\Omega):\partial_\nu u|_{\partial\Omega}=0\}$.

对于方程

$$-\Delta u+q(x)u=\lambda u,x\in\Omega,\quad \partial_\nu u=0,x\in\partial\Omega,$$

式中,$q(x)$是$\overline{\Omega}$上的光滑函数,记$\lambda_1(q)$为上面方程的最小特征值,则映射$q\to\lambda_1(q):C(\overline{\Omega})\to\mathbb{R}$是连续且单调递减的.

构造集合$S_u:=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2:\lambda_1(-(b+ad(x)))=0,a\geqslant 0\}$.

下面我们来叙述文献[1]中已经证明的引理.

引理 1[1]　对于任意固定的$(k,\rho(x),c(x),d(x))$,存在一个单调递减的光滑函数$b=b_*(a)$满足$b_*(0)=0,\lim\limits_{a\to\infty}b_*(a)=-\infty$使得$S_u=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2:b=b_*(a),a\geqslant 0\}$.

定义正函数ψ_1满足下列方程

$$-\Delta\psi_1-(b_*+ad(x))\psi_1=0,x\in\Omega,\quad \partial_\nu\psi_1|_{\partial\Omega}=0,\quad \|\psi_1\|_{L^2(\Omega)}=1.\tag{4}$$

作变换$U=(1+k\rho(x)v)u$,方程组(3)可转化为

$$\begin{cases}\Delta U+\dfrac{U}{1+k\rho(x)v}\left(a-\dfrac{U}{1+k\rho(x)v}-c(x)v\right)=0, & x\in\Omega,\\ \Delta v+v\left(b+\dfrac{d(x)U}{1+k\rho(x)v}-v\right)=0, & x\in\Omega,\\ \partial_\nu U=\partial_\nu v=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}\tag{5}$$

易知方程组(3)和方程组(5)有相同的半平凡解集,定义方程组(5)的半平凡解集如下:

$$\Gamma_U=\{(U,v,b)=(a,0,b):b\in\mathbb{R}\}.$$

引理 2[1]　任意固定$(k,\rho(x),c(x),d(x))$,则方程组(5)从半平凡解集Γ_U处分岔当且仅当$b=b_*<0$,即存在正数δ_*和函数$\phi_1\in X$使得方程组(5)在$(U,v,b)=(a,0,b_*)\in X\times\mathbb{R}$附近的正解都可表示为

$$\{(\widetilde{U}(s),\tilde{v}(s),b(s))=(a+s(\phi_1+sU_1(s)),s(\psi_1+sv_1(s)),b(s)\in X\times\mathbb{R}:0<s\leqslant\delta_*)\},$$

式中,$(U_1(s),v_1(s),b(s))$是有界光滑函数满足$b(0)=b_*$,$\int_\Omega v_1\psi_1\mathrm{d}x=0$,$\phi_1=(-\Delta+a)^{-1}[a(ak\rho(x)-c(x))\psi_1]$,特别地,当$d(x)$是常数时,$\dot{b}(0)>0$,其中$\dot{b}(0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}b(s)|_{s=0}$.

2 分岔平衡解的局部渐近稳定性

根据文献[11],定义函数如下:

$$l:X\to\mathbb{R}\ ,\langle[f,g],l\rangle:=\int_{\Omega}g\psi_1\mathrm{d}x. \tag{6}$$

通过变换 $U=(1+k\rho(x)v)u$,方程组(2)变为

$$\begin{cases}\left(\dfrac{U}{1+k\rho(x)v}\right)_t=\Delta U+\dfrac{U}{1+k\rho(x)v}\left(a-\dfrac{U}{1+k\rho(x)v}-c(x)v\right), & x\in\Omega,t>0,\\ v_t=\Delta v+v\left(b+\dfrac{d(x)U}{1+k\rho(x)v}-v\right), & x\in\Omega,t>0,\\ \partial_\nu U=\partial_\nu v=0, & x\in\partial\Omega,t>0,\\ U(\cdot,0)=(1+k\rho(x)v_0)u_0(x)\geqslant 0,v(\cdot,0)=v_0(x)\geqslant 0, & x\in\Omega.\end{cases} \tag{7}$$

对方程组(5)在分岔平衡解$(\tilde{U}(s),\tilde{v}(s))$处线性化,所对应的特征值问题为

$$\begin{cases}\dfrac{1}{1+k\rho(x)\tilde{v}(s)}\lambda U-\dfrac{k\rho(x)\tilde{U}(s)}{(1+k\rho(x)\tilde{v}(s))^2}\lambda v=\Delta U+\dfrac{a}{1+k\rho(x)\tilde{v}(s)}U-\dfrac{2\tilde{U}(s)}{(1+k\rho(x)\tilde{v}(s))^2}U-\\ \quad\dfrac{c(x)\tilde{v}(s)}{1+k\rho(x)\tilde{v}(s)}U-\dfrac{ak\rho(x)\tilde{U}(s)}{(1+k\rho(x)\tilde{v}(s))^2}v+\dfrac{2k\rho(x)\tilde{U}^2(s)}{(1+k\rho(x)\tilde{v}(s))^3}v-\dfrac{c(x)\tilde{U}(s)}{(1+k\rho(x)\tilde{v}(s))^2}v, & x\in\Omega,\\ \lambda v=\Delta v+bv-2\tilde{v}(s)v+\dfrac{d(x)\tilde{U}(s)}{(1+k\rho(x)\tilde{v}(s))^2}v+\dfrac{d(x)\tilde{v}(s)}{1+k\rho(x)\tilde{v}(s)}U, & x\in\Omega,\\ \partial_\nu U=\partial_\nu v=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases} \tag{8}$$

引进算子 $F:X\times\mathbb{R}\to Y$ 为

$$F(U,v,b)=\begin{pmatrix}F_1(U,v,b)\\ F_2(U,v,b)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Delta U+\dfrac{U}{1+k\rho(x)v}\left(a-\dfrac{U}{1+k\rho(x)v}-c(x)v\right)\\ \Delta v+v\left(b+\dfrac{d(x)U}{1+k\rho(x)v}-v\right)\end{pmatrix}.$$

通过计算可得到下列方程:

$$F_{(U,v)}(a,0,b_*)\begin{pmatrix}U\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Delta U-aU+a(ak\rho(x)-c(x))v\\ \Delta v+(b+ad(x))v\end{pmatrix}.$$

通过式(4),可得到

$$\mathrm{Ker}\{F_{(U,v)}(a,0,b_*)\}=\mathrm{span}\{(\phi_1,\psi_1)\},$$

式中,$\phi_1=(-\Delta+a)^{-1}[a(ak\rho(x)-c(x))\psi_1]$.

方程组(8)可转化为

$$F_{(U,v)}(\tilde{U}(s),\tilde{v}(s),b)\begin{pmatrix}U\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{1+k\rho(x)\tilde{v}(s)} & \dfrac{-k\rho(x)\tilde{U}(s)}{(1+k\rho(x)\tilde{v}(s))^2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda U\\ \lambda v\end{pmatrix}. \tag{9}$$

定义算子 $G:X\times\mathbb{R}\to Y$ 为

$$G(\tilde{U}(s),\tilde{v}(s),b)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{1+k\rho(x)\tilde{v}(s)} & \dfrac{-k\rho(x)\tilde{U}(s)}{(1+k\rho(x)\tilde{v}(s))^2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}F_{(U,v)}(\tilde{U}(s),\tilde{v}(s),b), \tag{10}$$

由式(9)-(10),方程组(8)可改写为

$$G(\tilde{U}(s),\tilde{v}(s),b)\begin{pmatrix}U\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda U\\ \lambda v\end{pmatrix}.$$

下面证明本文主要定理:

定理 1　任意固定$(a,k,\rho(x),c(x),d(x))$,当 $d(x)$是常数时,由引理 2 定义的分岔解$(\tilde{U}(s),\tilde{v}(s))$是局部渐近稳定的.

证明　先证明 0 是 $G(a,0,b_*)$的第一特征值. 对任意固定的$(U,v)\in X$,可以计算出下列结果

$$G(a,0,b_*)\begin{pmatrix}U\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -k\rho(x)a\\0 & 1\end{pmatrix}^{-1}F_{(U,v)}(a,0,b_*)\begin{pmatrix}U\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & k\rho(x)a\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta U-av+a(ak\rho(x)-c(x))v\\\Delta v+(b+ad(x))v\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}\Delta U-av+a(ak\rho(x)-c(x))v+k\rho(x)a(\Delta v+(b+ad(x))v)\\\Delta v+(b+ad(x))v\end{pmatrix}=0,\tag{11}$$

从式(4)和 ϕ_1 的定义可知

$$G(a,0,b_*)\begin{pmatrix}\phi_1\\\psi_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

由此0是 $G(a,0,b_*)$ 的一个特征值. 再证明0是算子 $G(a,0,b_*)$ 的第一特征值. 反证法,假设 $G(a,0,b_*)$ 有一个正的特征值 σ,相应的特征函数为 $\begin{pmatrix}\phi\\\varphi\end{pmatrix}\in X$ 满足 $G(a,0,b_*)\begin{pmatrix}\phi\\\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma\phi\\\sigma\varphi\end{pmatrix}$,也就是

$$\begin{cases}\Delta\phi-a\phi+a(ak\rho(x)-c(x))\varphi+ak\rho(x)(\Delta\varphi+(b+ad)\varphi)=\sigma\phi, & x\in\Omega,\\\Delta\varphi+(b+ad)\varphi=\sigma\varphi, & x\in\Omega,\\\partial_\nu\phi=\partial_\nu\varphi=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}\tag{12}$$

如果 $\varphi=0,\phi\neq0$ 成立,从方程组(12)可以得到

$$\phi=(-\Delta+a)^{-1}(-\sigma\phi),\tag{13}$$

因为 $(-\Delta+a)^{-1}(-\sigma\phi)$ 是负的当 $-\sigma\phi$ 为负时,因此式(13)是不成立的,由此可以推出 $\varphi\neq0$.

根据式(4)和单个椭圆方程定理,0是方程组(12)的第2个方程的第1特征值,这与 $\sigma>0$ 矛盾. 因此我们证明了0是 $G(a,0,b_*)$ 的第1特征值,其它特征值都是负的.

根据文献[12]命题 I.7.2,对于 $0<s<\delta$,存在扰动特征值和连续可微函数 $\omega_1(s),\omega_2(s)\in X\cap\mathrm{Range}(F_{(U,v)}(a,0,b_*))$ 满足下面等式

$$G(\tilde U(s),\tilde v(s),b(s))\begin{pmatrix}\phi_1+\omega_1(s)\\\psi_1+\omega_2(s)\end{pmatrix}=\lambda(s)\begin{pmatrix}\phi_1+\omega_1(s)\\\psi_1+\omega_2(s)\end{pmatrix},$$

及 $\lambda(0)=\omega_1(0)=\omega_2(0)=0$.

同样,存在扰动特征值 $\lambda(b)$ 及连续可微函数 $\omega_1(b),\omega_2(b)\in X\cap\mathrm{Range}(F_{(U,v)}(a,0,b_*))$ 满足下面等式

$$G(a,0,b)\begin{pmatrix}\phi_1+\omega_1(b)\\\psi_1+\omega_2(b)\end{pmatrix}=\lambda(b)\begin{pmatrix}\phi_1+\omega_1(b)\\\psi_1+\omega_2(b)\end{pmatrix},\tag{14}$$

及 $\lambda(b_*)=\omega_1(b_*)=\omega_2(b_*)=0$.

对方程组(14)等式两边关于 b 求导并令 $b=b_*$ 及利用 $\lambda(b_*)=\omega_1(b_*)=\omega_2(b_*)=0$ 得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}G(a,0,b_*)\begin{pmatrix}\phi_1\\\psi_1\end{pmatrix}+G(a,0,b_*)\begin{pmatrix}\omega_1'(b_*)\\\omega_2'(b_*)\end{pmatrix}=\lambda'(b_*)\begin{pmatrix}\phi_1\\\psi_1\end{pmatrix},\tag{15}$$

式中,$\lambda'(b_*)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\lambda(b)|_{b=b_*}$.

由式(6)及(15)可推出

$$\langle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}G(a,0,b_*)\begin{pmatrix}\phi_1\\\psi_1\end{pmatrix},l\rangle=\lambda'(b_*).\tag{16}$$

通过式(11)可计算出下列等式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}G(a,0,b_*)\begin{pmatrix}\phi_1\\\psi_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ak\rho(x)\psi_1\\\psi_1\end{pmatrix},\tag{17}$$

由式(6),(16)和(17)可推出

$$\lambda'(b^*)=\int_\Omega(\psi_1)^2\mathrm{d}x>0.\tag{18}$$

根据文献[12]公式 I.7.40,有下面公式

$$-\dot\lambda(0)=\dot b(0)\lambda'(b_*),\text{其中 }\dot\lambda(0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\lambda(s)|_{s=0}.\tag{19}$$

由引理 2 中 $\dot{b}(0)>0$ 及式(18)-(19),可知 $\dot{\lambda}(0)<0$,因此 $\lambda(s)<0$ 当 $s>0$ 时,即由引理 2 得到的分岔解$(\tilde{U}(s),\tilde{v}(s))$是局部渐近稳定的.

3 结语

文献[1]中研究了空间异质环境下 Lotka-Volterra 带交错扩散项的方程组分岔平衡解的存在性. 应用整体分岔理论和 Lyapunov-Schmidt 分解法,文献[1]得到了正平衡解的整体分岔结构,证明了$\rho(x)$和$d(x)$使得正解的曲线关于参数 b 形成$\subset$型的曲线. 文献[1]没有研究分岔平衡解的局部渐近稳定性. 本文主要研究文献[1]中所得到的分岔平衡解在分岔点$(a,0,b_*)$的局部渐近稳定性. 由文献[1]中给出的分岔方向,应用细致的谱分析方法和线性稳定性理论,证明了分岔点附近的分岔平衡解是局部渐近稳定的,也就是两种群可以共存,趋于稳定状态,这个结果是全新的.

[参考文献]

[1] KUTO K. Bifurcation branch of stationary solutions for a Lotka-Volterra cross-diffusion system in a spatially heterogeneous environment[J]. Nonlinear analysis:real world applications,2009,10:943-965.
[2] SHIGESADA N,KAWASAKI K,TERAMOTO E. Spatial segregation of interacting species[J]. J Theoret Biol,1979,79:83-99.
[3] NI W M,WU Y P,XU Q. The existence and stability of nontrivial steady states for S-K-T competition model with cross-diffusion[J]. Discrete Contin Dyn Syst,2014,34:5271-5298.
[4] WANG L,WU Y P,XU Q. Instability of spiky steady states for S-K-T biological competing model with cross-diffusion[J]. Nonlinear analysis,2017,159:424-457.
[5] WU Y P,XU Q. The existence and structure of large spiky steady states for S-K-T competition systems with cross-diffusion[J]. Discrete Contin Dyn Syst,2011,29:367-385.
[6] DU Y,PENG R,WANG M. Effect of a protection zone in the diffusive Leslie predator-prey model[J]. J differential equations,2009,246:3932-3956.
[7] DU Y,SHI J P. A diffusive predator-prey model with a protection zone[J]. J differential equations,2006,229:63-91.
[8] DU Y,SHI J P. Some recent results on diffusive predator-prey models in spatially heterogeneous environment[J]. Fields Inst Comm,2006,48:1-41.
[9] HUTSON V,LOU Y,Mischaikow K. Convergence in competition models with small diffusion coefficients[J]. J differential equations,2005,211:135-161.
[10] LI W T,WANG Y X,ZHANG J F.Stability of positive stationary solutions to a spatially heterogeneous cooperative system with cross-diffusion[J]. Electro J Differ Equ,2012,223:1-18.
[11] SHI J P. Persistence and bifurcation of degenerate solutions[J]. J Funct Anal,1999,169:494-531.
[12] KIELHÖFER H. Bifurcation theory—an introduction with applications to PDEs[M]. New York:Springer-Verlag,2004.

[责任编辑:陆炳新]