doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2018.04.005

弱素性可加数性质的研究

方金辉

(南京信息工程大学数学与统计学院,南京 江苏 210044)

[摘要]　设 n 是正整数,若 n 有至少两个互异素因子,而且存在 n 的互异素因子 $p_1,p_2,\cdots,p_t$ 和正整数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 使得 $n=p_1^{\alpha_1}+p_2^{\alpha_2}+\cdots+p_t^{\alpha_t}$,那么我们称 n 为弱素性可加数.本文中,我们通过多次巧妙应用中国剩余定理、Dirichlet 定理和二次互反律证明:对任意正整数 m 和 t,存在无穷多个弱素性可加数 n 使得 $m|n$ 且 $n=p_1^{\alpha_1}+p_2^{\alpha_2}+\cdots+p_{4t}^{\alpha_{4t}}+p_{4t+1}^{\alpha_{4t+1}}$,其中 $p_1,p_2,\cdots,p_{4t+1}$ 是 n 的互异素因子,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{4t+1}$ 是正整数.

[关键词]　弱素性可加数,Dirichlet 定理,中国剩余定理

[中图分类号]O156.1　[文献标志码]A　[文章编号]1001-4616(2018)04-0026-03

Note on the Weakly Prime-Additive Numbers

Fang Jinhui

(School of Mathematics and Statistics,Nanjing University of Information Science and Technology,Nanjing 210044,China)

Abstract: A positive integer n is called weakly prime-additive if n has at least two distinct prime divisors and there exist distinct prime divisors $p_1,p_2,\cdots,p_t$ of n and positive integers $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ such that $n=p_1^{\alpha_1}+p_2^{\alpha_2}+\cdots+p_t^{\alpha_t}$. In this paper, by employing Chinese remainder theorem, Dirichlet's theorem and the quadratic reciprocity law, we prove that, for any positive integers m and t, there exist infinitely many weakly prime-additive numbers n with $m|n$ and $n=p_1^{\alpha_1}+p_2^{\alpha_2}+\cdots+p_{4t}^{\alpha_{4t}}+p_{4t+1}^{\alpha_{4t+1}}$, where $p_1,p_2,\cdots,p_{4t+1}$ are distinct prime divisors of n and $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{4t+1}$ are positive integers.

Key words: weakly prime-additive numbers, Dirichlet's theorem, Chinese remainder theorem

设 n 是正整数,若 n 有至少两个互异素因子,而且存在 n 的互异素因子 $p_1,p_2,\cdots,p_t$ 和正整数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 使得 $n=p_1^{\alpha_1}+p_2^{\alpha_2}+\cdots+p_t^{\alpha_t}$,那么我们称 n 为弱素性可加数.

1992 年,Erdos 和 Hegyvari[1] 证明了:对任意素数 p,存在无穷多个弱素性可加数 n 使得 $p|n$. 最近,Fang 和 Chen[2] 改进以上结论,证明了:对任意正整数 m,存在无穷多个弱素性可加数 n 使得 $m|n$. 通过多次巧妙应用中国剩余定理、Dirichlet 定理和二次互反律[3-4],Fang 和 Chen[2] 构造了无穷多个弱素性可加数 n 使得 $m|n$ 且 $n=p_1^{\alpha_1}+\cdots+p_5^{\alpha_5}$,其中 $p_1,p_2,\cdots,p_5$ 是 n 的互异素因子,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_5$ 是正整数.

1　主要定理

在本文中,通过进一步应用中国剩余定理、Dirichlet 定理和二次互反律,我们证明了:

定理 1　对任意正整数 m 和 t,存在无穷多个弱素性可加数 n 使得 $m|n$,且

$$n=p_1^{\alpha_1}+p_2^{\alpha_2}+\cdots+p_{4t}^{\alpha_{4t}}+p_{4t+1}^{\alpha_{4t+1}},$$

式中,$p_1,p_2,\cdots,p_{4t+1}$ 是 n 的互异素因子,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{4t+1}$ 是正整数.

2　定理证明

我们只需证明定理在 $t\geqslant 2$ 情形下成立. 设 $m=2^k m_1$,其中 k 是非负整数,m_1 是奇数,且 φ 是 Euler's totient 函数,我们将考虑下列形式的整数 n:

收稿日期:2018-03-15.

基金项目:国家自然科学基金(11671211).

通讯联系人:方金辉,博士,副教授,研究方向:数论研究. E-mail:fangjinhui1114@163.com

$$n=2^u+p_1^s+p_2^s+\cdots+p_{4t-2}^s+p_{4t-1}^s+p_{4t}, \tag{1}$$

式中,p_i 是素数(具体值将在后续给定),

$$u=(k+2)\varphi(m_1)\prod_{i=1}^{4t}(p_i-1) \text{ 且 } s=(2l+1)\frac{1}{2^{4t}}\prod_{i=1}^{4t}(p_i-1),l\in\mathbf{Z}^+.$$

由 Dirichlet 定理可知,存在素数 p_1 使得 $p_1\equiv-1(\bmod 2^{k+2}),p_1\equiv1(\bmod m_1)$.

由中国剩余定理和 Dirichlet 定理可知,存在素数 p_2 使得

$$p_2\equiv-1(\bmod 2^{k+2}),p_2\equiv-1(\bmod m_1),p_2\equiv1(\bmod p_1).$$

由中国剩余定理和 Dirichlet 定理可知,存在素数 p_3 使得

$$p_3\equiv-1(\bmod 2^{k+2}),p_3\equiv1(\bmod m_1),p_3\equiv-1(\bmod p_1),p_3\equiv1(\bmod p_2).$$

由中国剩余定理和 Dirichlet 定理可知,存在素数 p_4 使得 $p_4\equiv-1(\bmod 2^{k+2})$,

$$p_4\equiv-1(\bmod m_1),p_4\equiv1(\bmod p_1),p_4\equiv-1(\bmod p_2),p_4\equiv1(\bmod p_3).$$

对于 $i\geqslant5$,我们将根据 i 的奇偶性构造不同的同余方程选择 p_i(注意到 p_i 是逐步选取的). 对于 $j\geqslant3$,我们首先考虑 $p_{2j-1}(3\leqslant j\leqslant2t)$. 由中国剩余定理和 Dirichlet 定理可知存在素数 p_{2j-1} 使得

$$p_{2j-1}\equiv-1(\bmod 2^{k+2}),\quad p_{2j-1}\equiv1(\bmod m_1),$$

$$p_{2j-1}\equiv-1(\bmod p_1),\quad p_{2j-1}\equiv1(\bmod p_2),\quad p_{2j-1}\equiv-1(\bmod p_3),\quad p_{2j-1}\equiv-1(\bmod p_4),$$

$$p_{2j-1}\equiv1(\bmod p_{2s-1}),\quad p_{2j-1}\equiv-1(\bmod p_{2s}),\quad (s=3,4,\cdots,j-1).$$

(若 $j=3$,省略最后一步),而且,我们加上限制条件

$$p_5\equiv p_7\equiv1(\bmod 3),\quad p_{2j-1}\equiv-1(\bmod 3),\quad (j=5,6,\cdots,2t). \tag{2}$$

接着我们继续考虑 $p_{2j}(3\leqslant j\leqslant2t-1)$. 由中国剩余定理和 Dirichlet 定理可知存在素数 p_{2j} 使得

$$p_{2j}\equiv-1(\bmod 2^{k+2}),\quad p_{2j}\equiv-1(\bmod m_1),$$

$$p_{2j}\equiv1(\bmod p_1),\quad p_{2j}\equiv-1(\bmod p_2),\quad p_{2j}\equiv1(\bmod p_3),\quad p_{2j}\equiv1(\bmod p_4),$$

且 $p_{2j}\equiv-1(\bmod p_{2s-1}),\quad p_{2j}\equiv1(\bmod p_{2s}),\quad (s=3,4,\cdots,j-1),\quad p_{2j}\equiv-1(\bmod p_{2j-1})$.

接下来我们仅需考虑 p_{4t} 的选取. 由中国剩余定理和 Dirichlet 定理可知,存在素数 p_{4t} 使得

$$p_{4t}\equiv4t-1(\bmod 2^{k+2}),\quad p_{4t}\equiv-2(\bmod m_1),$$

$$p_{4t}\equiv-1(\bmod p_1),\quad p_{4t}\equiv-1(\bmod p_2),\quad p_{4t}\equiv-1(\bmod p_3),\quad p_{4t}\equiv1(\bmod p_4),$$

$$p_{4t}\equiv-3(\bmod p_{2s-1}),\quad p_{4t}\equiv1(\bmod p_{2s}),\quad (s=3,4,\cdots,2t-1),\quad p_{4t}\equiv-3(\bmod p_{4t-1}).$$

显然,我们可要求 $p_{4t}>p_{4t-1}>\cdots p_2>p_1\geqslant2^{k+2}>3$.

因为 $p_{4t}\equiv4t-1\equiv3(\bmod 4)$ 且 $p_i\equiv3(\bmod 4)(1\leqslant i\leqslant4t-1)$,我们可由二次互反律推得

$$\left(\frac{p_i}{p_j}\right)=-\left(\frac{p_j}{p_i}\right)\quad(1\leqslant i<j\leqslant4t). \tag{3}$$

对于 $1\leqslant i<j\leqslant4t$,注意到 $p_i^{\frac{1}{2}(p_j-1)}\equiv\left(\frac{p_i}{p_j}\right)(\bmod p_j)$,且 $p_i\equiv3(\bmod 4)$,$\frac{1}{2}(p_i-1)\mid s$,我们可知 s 是奇数且 $p_i^s\equiv\left(\frac{p_i}{p_j}\right)(\bmod p_j),\quad(1\leqslant i<j\leqslant4t)$.

因此,对于每个形如(1)的正整数 n,我们可由(3)和 p_i 的构造推得

$$n\equiv0+(-1)^s+(-1)^s+\cdots+(-1)^s+(4t-1)\equiv0(\bmod 2^{k+2}),$$

$$n\equiv1+1^s+(-1)^s+\cdots+1^s+(-1)^s+1^s+(-2)\equiv0(\bmod m_1),$$

$$n\equiv1+0+1^s+(-1)^s+1^s+(-1)^s+\cdots+1^s+(-1)^s+(-1)\equiv0(\bmod p_1),$$

$$n\equiv1+\left(\frac{p_1}{p_2}\right)+0+1^s+(-1)^s+\cdots+1^s+(-1)^s+1^s+(-1)\equiv0(\bmod p_2),$$

$$n\equiv1+\left(\frac{p_1}{p_3}\right)+\left(\frac{p_2}{p_3}\right)+0+1^s+(-1)^s+\cdots+1^s+(-1)^s+(-1)\equiv0(\bmod p_3),$$

$$n\equiv1+\left(\frac{p_1}{p_4}\right)+\left(\frac{p_2}{p_4}\right)+\left(\frac{p_3}{p_4}\right)+0+(-1)^s+1^s+\cdots+(-1)^s+1^s+(-1)^s+1\equiv0(\bmod p_4).$$

对于 $j\geqslant 3$,首先考虑模 $p_{2j-1}(3\leqslant j\leqslant 2t)$. 我们可推得

$$n\equiv 1+\left(\frac{p_1}{p_{2j-1}}\right)+\cdots+\left(\frac{p_{2j-2}}{p_{2j-1}}\right)+0+(-1)^s+1^s+\cdots+(-1)^s+1^s+(-3)\equiv 0\pmod{p_{2j-1}}.$$

接下来考虑模 $p_{2j}(3\leqslant j\leqslant 2t-1)$. 我们可推得

$$n\equiv 1+\left(\frac{p_1}{p_{2j}}\right)+\cdots+\left(\frac{p_{2j-1}}{p_{2j}}\right)+0+(-1)^s+1^s+\cdots+(-1)^s+1\equiv 0\pmod{p_{2j}}.$$

最后,考虑模 p_{4t},我们由(3)和 p_i 构造可推得

$$n\equiv 1+\left(\frac{p_1}{p_{4t}}\right)+\left(\frac{p_2}{p_{4t}}\right)+\cdots+\left(\frac{p_{4t-2}}{p_{4t}}\right)+\left(\frac{p_{4t-1}}{p_{4t}}\right)\equiv 1+1+1+1+(-1)-\left(\frac{-3}{p_5}\right)+(-1)-\left(\frac{-3}{p_7}\right)+\cdots+(-1)-\left(\frac{-3}{p_{4t-3}}\right)+$$
$$(-1)-\left(\frac{-3}{p_{4t-1}}\right)\equiv(6-2t)-\left(\left(\frac{p_5}{3}\right)+\left(\frac{p_7}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{p_{4t-3}}{3}\right)+\left(\frac{p_{4t-1}}{3}\right)\right)\equiv 0\pmod{p_{4t}},$$

式中最后一步同余由(2)推得.

由上可得:

$$n=2^u+p_1^s+\cdots+p_{4t-2}^s+p_{4t-1}^s+p_{4t}\text{ 且 }4mp_1p_2\cdots p_{4t-1}p_{4t}=2^{k+2}m_1p_1p_2\cdots p_{4t-1}p_{4t}\mid n.$$

定理 1 证毕.

[参考文献]

[1] ERDOS P,HEGYVARI N. On prime-additive numbers[J]. Studia Sci Math Hungar,1992,27:207-212.

[2] FANG J H,CHEN Y G. On the shortest weakly prime-additive numbers[J]. J number theory,2018,182:258-270.

[3] 潘承洞,潘成彪. 初等数论[M]. 3 版. 北京大学出版社,2013.

[4] NATHANSON M B. Elementary Methods in Number Theory[M]. New York:Springer,2000.

[责任编辑:陆炳新]