doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2019.01.001

2 类图的完美匹配数的分类递推求法

唐保祥[1],任　韩[2]

(1.天水师范学院数学与统计学院,甘肃 天水 741001)
(2.华东师范大学数学系,上海 200062)

[**摘要**]　首先,把图的完美匹配按关联某个顶点的边进行分类,求出每一类完美匹配数目的递推关系式.其次,把各类完美匹配的递推式相加,得到一组有相互联系的递推关系式,再利用这些递推式之间的相互关联,消去那些不需要的递推关系式,从而得到这个图的完美匹配数目的递推关系式.最后解出这个递推式的通解,进而得到这个图的完美匹配数目的显式公式.

[**关键词**]　完美匹配,递推式关系,通解,显式公式

[**中图分类号**]O157.5　[**文献标志码**]A　[**文章编号**]1001-4616(2019)01-0001-05

Classification and Push Solution Method for the Number of Perfect Matchings of Two Types Graphs

Tang Baoxiang[1],Ren Han[2]

(1.School of Mathematics and Statistics Institute,Tianshui Normal University,Tianshui 741001,China)
(2.Department of Mathematics,East China Normal University,Shanghai 200062,China)

Abstract:Firstly,the perfect matching of the graph is classified according to the edge associated with a certain vertex, and the recursive relation of each type of perfect matching is obtained. Secondly, the recursive sums of the perfect matching are added to obtain a set of mutual recursive relation of the contact, and then use the reciprocal relationship between these recursive methods to eliminate the recursive relations that are not needed, so as to obtain the recursive relation of the perfect matching number of the graph. Finally, the recursive formula is solved. The general solution, and then get the explicit formula of the perfect matching number of this graph.

Key words:perfect matching,recurrence formula,general solution,explicit formula

图的完美匹配计数理论是近 30 年来许多学者研究的图论热点问题之一[1-7]. 理论上讲,对于存在完美匹配的图,把完美匹配按照关联某个顶点的边进行分类,求出每一类完美匹配数目,再把所有类求和就可以得到这个图的所有完美匹配数.当这个图的顶点和边的数目较多时,这种方法就不是一个有效的方法(即计算量不是该图边数或顶点数的多项式计算量,而是指数表达式计算量).但是,对于一些特殊图,利用这种思想,把这个图的所有完美匹配,按照饱和某个顶点的完美匹配分类,求出每一类完美匹配数目的递推关系式,再把各类完美匹配的递推式相加,就得到一组有相互联系的递推关系式,利用这些递推式之间的相互关联,消去那些不需要的递推关系式,从而得到这个图的完美匹配数目的递推关系式,最后求出这个递推式的通解,进而就得到这个图的完美匹配数目的显式公式[8-11].

1　基本概念

定义 1　若图 G 有一个 1-正则生成子图,则称这个生成子图为图 G 的完美匹配.

定义 2　设图 G 是一个有完美匹配的图,若图 G 的两个完美匹配 M_1 和 M_2 中有一条边不同,则称 M_1 和 M_2 是 G 的两个不同的完美匹配.

收稿日期:2018-05-06.
基金项目:国家自然科学基金(11171114).
通讯联系人:唐保祥,教授,研究方向:图论和组合数学研究. E-mail:tbx0618@ sina.com

定义 3　连接 4 圈 $u_{i1}u_{i2}u_{i3}u_{i4}u_{i1}$ 与 $v_{i1}v_{i2}v_{i3}v_{i4}u_{i1}$ 的顶点 u_{i1} 与 v_{i1}，u_{i2} 与 v_{i2}，u_{i3} 与 v_{i3}，u_{i4} 与 v_{i4} 得到的图记为 $T_6^i(i=1,2,\cdots,n)$. 给 T_6^i 与 T_6^{i+1} 之间添加上边 $u_{i3}u_{i+1,2}$，$u_{i4}u_{i+1,1}(i=1,2,\cdots,n-1)$ 得到的图记为 $2-nT_6$，如图 1 所示.

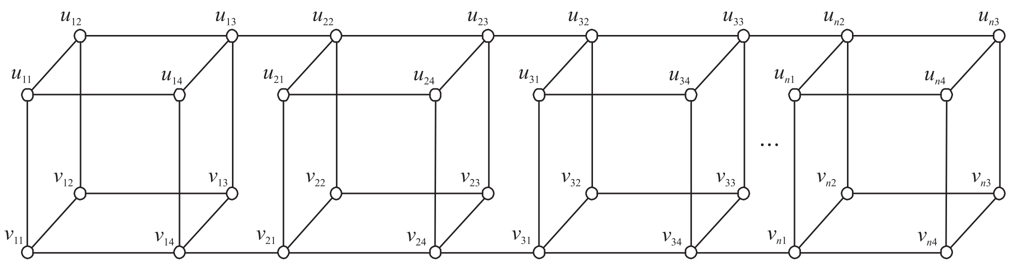

图 1　$2-nT_6$ 图

Fig. 1　Figure of $2-nT_6$

定义 4　设长为 5 的圈 $u_{i1}u_{i2}u_{i3}u_{i4}u_{i5}u_{i1}$ 的每个顶点与不在圈上 v_i 连接得到的图称为轮，记为 $W_5^i(i=1,2,\cdots,n)$. 给 W_5^i 与 W_5^{i+1} 添加上边 $u_{i3}u_{i+1,1}$，$u_{i4}u_{i+1,5}(i=1,2,\cdots,n-1)$ 得到的图记为 $2-nW_5$，如图 2 所示.

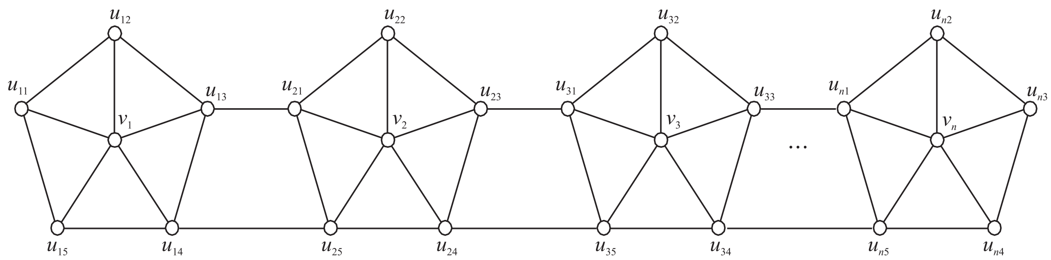

图 2　$2-nW_5$ 图

Fig. 2　Figure of $2-nW_5$

2　主要结果

定理 1　设图 $2-nT_6$ 的完美匹配数为 $f(n)$，则 $f(n)=9^n$.

证明　容易看出图 $2-nT_6$ 有完美匹配. 求 $f(n)$ 的递推式. 设图 $2-nT_6$ 的完美匹配集合为 M，按照 M 中元素饱和顶点 u_{11} 的情况可分 3 类：设 M 中包含边 $u_{11}u_{12}$ 的完美匹配集合为 M_1，M 中包含边 $u_{11}u_{14}$ 的完美匹配集合为 M_2，M 中包含边 $u_{11}v_{11}$ 的完美匹配集合为 M_3，则 $M_i\cap M_j=\phi(1\leqslant i<j\leqslant 3)$，$M=M_1\cup M_2\cup M_3$，故 $|M|=|M_1|+|M_2|+|M_3|$.

M_1 可分 3 类. M_1 中包含边 $u_{11}u_{12}$，$u_{13}u_{14}$，$v_{11}v_{12}$，$v_{13}v_{14}$ 的完美匹配集合记为 M_1^1；M_1 中包含边 $u_{11}u_{12}$，$v_{11}v_{12}$，$u_{13}v_{13}$，$u_{14}v_{14}$ 的完美匹配集合记为 M_1^2；M_1 中包含边 $u_{11}u_{12}$，$u_{13}u_{14}$，$v_{12}v_{13}$，$v_{11}v_{14}$ 的完美匹配集合记为 M_1^3. 则 $M_1^i\cap M_1^j=\phi(1\leqslant i<j\leqslant 3)$，$M_1=M_1^1\cup M_1^2\cup M_1^3$，故 $|M_1|=|M_1^1|+|M_1^2|+|M_1^3|$.

由 $f(n)$ 的定义有，$|M_1^1|=f(n-1)$，$|M_1^2|=f(n-1)$，$|M_1^3|=f(n-1)$，故 $|M_1|=3f(n-1)$.

M_2 可分 3 类. M_2 中包含边 $u_{11}u_{14}$，$u_{12}u_{13}$，$v_{11}v_{14}$，$v_{12}v_{13}$ 的完美匹配集合记为 M_2^1；M_2 中包含边 $u_{11}u_{14}$，$u_{12}u_{13}$，$v_{11}v_{12}$，$v_{13}v_{14}$ 的完美匹配集合记为 M_2^2；M_2 中包含边 $u_{11}u_{14}$，$v_{11}v_{14}$，$u_{12}v_{12}$，$u_{13}v_{13}$ 的完美匹配集合记为 M_2^3. 则 $M_1^i\cap M_1^j=\phi(1\leqslant i<j\leqslant 3)$，$M_2=M_2^1\cup M_2^2\cup M_2^3$，故 $|M_2|=|M_2^1|+|M_2^2|+|M_2^3|$.

由 $f(n)$ 的定义知，$|M_2^1|=f(n-1)$，$|M_2^2|=f(n-1)$，$|M_2^3|=f(n-1)$，故 $|M_2|=3f(n-1)$.

M_3 可分 3 类. M_3 中包含边 $u_{11}v_{11}$，$u_{12}v_{12}$，$u_{13}v_{13}$，$u_{14}v_{14}$ 的完美匹配集合记为 M_2^1；M_3 中包含边 $u_{11}v_{11}$，$u_{12}v_{12}$，$u_{13}u_{14}$，$v_{13}v_{14}$ 的完美匹配集合记为 M_2^2；M_3 中包含边 $u_{11}v_{11}$，$u_{12}u_{13}$，$v_{12}v_{13}$，$u_{14}v_{14}$ 的完美匹配集合记为 M_2^3. 则 $M_1^i\cap M_1^j=\phi(1\leqslant i<j\leqslant 3)$，$M_3=M_3^1\cup M_3^2\cup M_3^3$，故 $|M_3|=|M_3^1|+|M_3^2|+|M_3^3|$.

由 $f(n)$ 的定义知，$|M_3^1|=f(n-1)$，$|M_3^2|=f(n-1)$，$|M_3^3|=f(n-1)$，故 $|M_3|=3f(n-1)$.

于是，$|M|=|M_1|+|M_2|+|M_3|=9f(n-1)$，即 $f(n)=9f(n-1)$.

故

$$f(n)=9^{n-1}f(1) \tag{1}$$

由图 3 知,$f(1)=9$.

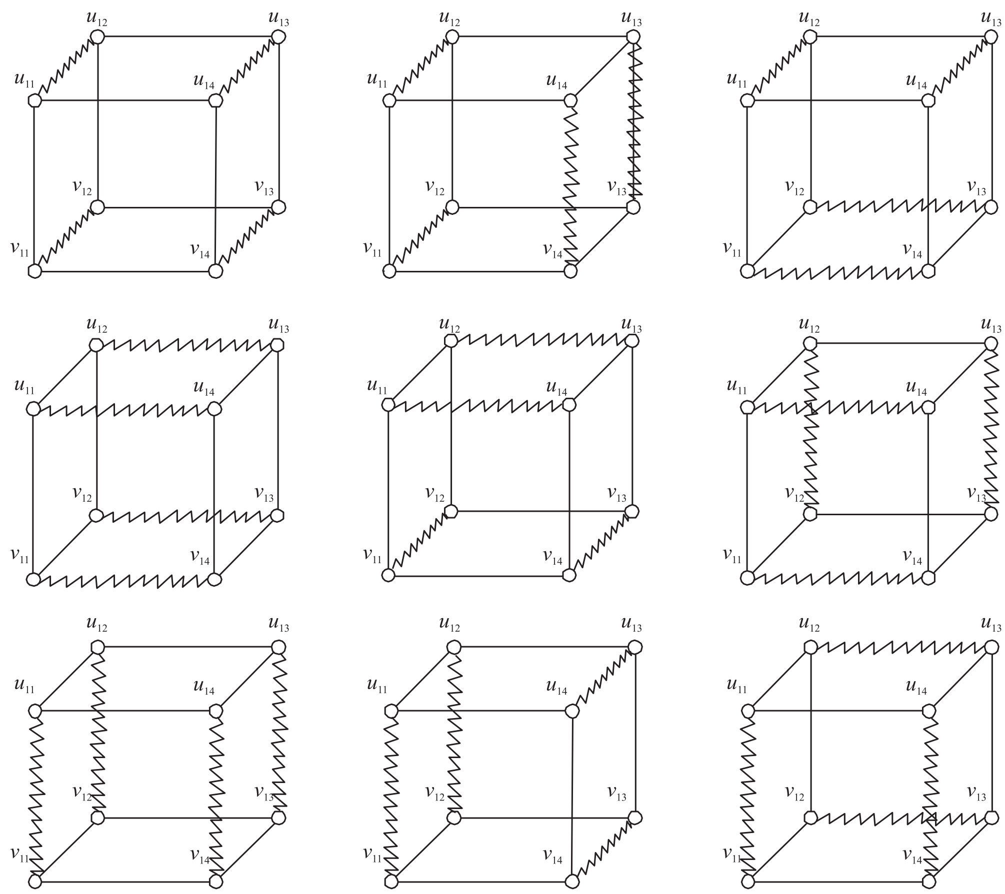

图 3　图 $2-1\times T_6$ 所有完全匹配

Fig. 3　All perfect matchings of $2-1\times T_6$

由式(1),得

$$f(n)=9^n.$$

定理 2　设图 $2-nW_5$ 的完美匹配数为 $g(n)$,则

$$g(n)=\frac{2+\sqrt{2}}{4}\cdot(3+2\sqrt{2})^n+\frac{2-\sqrt{2}}{4}\cdot(3-2\sqrt{2})^n.$$

证明　容易看出图 $2-nW_5$ 有完美匹配.为了得到 $g(n)$ 的表达式,构造图 G 并求出它的完美匹配数的递推式.把路 xy 的端点 x、y 分别与图 $2-nW_5$ 顶点 u_{11}、u_{15} 连接一条边,得到的图记为 G,如图 4 所示.

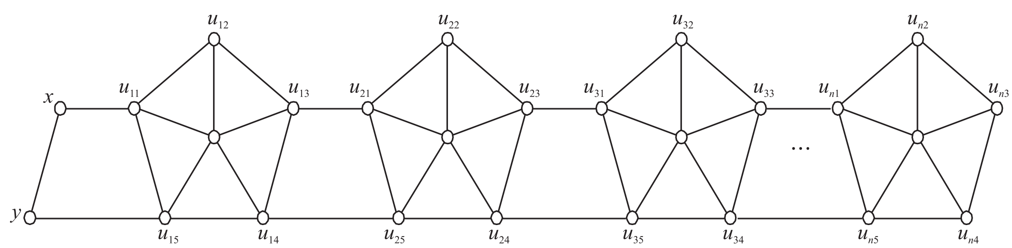

图 4　G 图

Fig. 4　Figure of G

容易看出图 G 有完美匹配,$h(n)$ 表示图 G 的完美匹配的数.设图 G 完美匹配的集合为 M,图 G 包含边 xy,xu_{11} 的完美匹配集合分别为 M_1、M_2,则 $M_1\cap M_2=\phi$,$M=M_1\cup M_2$,故 $h(n)=|M|=|M_1|+|M_2|$.

因为 $xy\in M_1$,所以 xu_{11}、$yu_{15}\notin M_1$,故由 $g(n)$ 的定义知,$|M_1|=g(n)$.

M_2 可分两类.M_2 中包含边 xu_{11}、yu_{15}、$u_{12}v_1$ 的完美匹配集合记为 M_2^1;M_2 中包含边 xu_{11}、yu_{15}、$u_{12}u_{13}$、v_1u_{14}的完美匹配集合记为 M_2^2. 则 $M_2^1\cap M_2^2=\phi$,$M_2=M_2^1\cup M_2^2$,故$|M_2|=|M_2^1|+|M_2^2|$.

由 $h(n)$的定义知,$|M_2^1|=h(n-1)$;由 $g(n)$的定义知,$|M_2^2|=g(n-1)$,故$|M_2|=g(n-1)+h(n-1)$.

故

$$h(n)=g(n)+g(n-1)+h(n-1). \tag{2}$$

再求 $g(n)$的递推式.设图 $2-nW_5$ 的完美匹配集合为 M,图 $2-nW_5$ 包含边 $u_{11}u_{12}$、$u_{11}v_1$、$u_{11}u_{15}$的完美匹配集合分别为 M_1、M_2、M_3,则 $M_i\cap M_j=\phi(1\leqslant i<j\leqslant\leqslant 3)$,$M=M_1\cup M_2\cup M_3$,故 $g(n)=|M|=|M_1|+|M_2|+|M_3|$.

M_1 可分两类.M_1 中包含边 $u_{11}u_{12}$、v_1u_{15}的完美匹配集合记为 M_1^1;M_1 中包含边 $u_{11}u_{12}$、v_1u_{13}、$u_{14}u_{15}$的完美匹配集合记为 M_1^2.则 $M_1^1\cap M_1^2=\phi$,$M_1=M_1^1\cup M_1^2$,故$|M_1|=|M_1^1|+|M_1^2|$.

由 $h(n)$的定义知,$|M_1^1|=h(n-1)$;由 $g(n)$的定义知,$|M_1^2|=g(n-1)$.

因此,$|M_1|=g(n-1)+h(n-1)$.

因为 $u_{11}v_1\in M_2$,所以 $u_{12}u_{13}$、$u_{14}u_{15}\in M_2$,故由 $g(n)$的定义知,$|M_2|=g(n-1)$.

M_3 可分两类.M_3 中包含边 $u_{11}u_{15}$、v_1u_{12}的完美匹配集合记为 M_3^1;M_3 中包含边 $u_{11}u_{15}$、v_1u_{14}、$u_{12}u_{13}$的完美匹配集合记为 M_3^2.则 $M_3^1\cap M_3^2=\phi$,$M_3=M_3^1\cup M_3^2$,故$|M_3|=|M_3^1|+|M_3^2|$.

由 $h(n)$的定义知,$|M_3^1|=h(n-1)$;由 $g(n)$的定义知,$|M_3^2|=g(n-1)$.

因此,$|M_3|=g(n-1)+h(n-1)$.

综上所述,$|M|=3g(n-1)+2h(n-1)$,即

$$g(n)=3g(n-1)+2h(n-1), \tag{3}$$

由式(2),得

$$h(n-1)=g(n-1)+g(n-2)+h(n-2), \tag{4}$$

把式(4)代入式(3),得

$$g(n)=5g(n-1)+2g(n-2)+2h(n-2), \tag{5}$$

由式(3),得

$$g(n-1)=3g(n-2)+2h(n-2), \tag{6}$$

由式(5)和(6)消去 $h(n-2)$,得

$$g(n)=6g(n-1)-g(n-2), \tag{7}$$

线性递推式(6)的特征方程为 $x^2-6x+1=0$,

故线性递推式(6)的通解为

$$g(n)=c_1(3+2\sqrt{2})^n+c_2(3-2\sqrt{2})^n,$$

式中 c_1、c_2 为待定常数.

由图5知,$g(1)=5$.

由图6知,$g(2)=29$.

故由 $g(n)=c_1(3+2\sqrt{2})^n+c_2(3-2\sqrt{2})^n$,$g(1)=5$ 和 $g(2)=29$ 解得

$$g(n)=\frac{2+\sqrt{2}}{4}\cdot(3+2\sqrt{2})^n+\frac{2-\sqrt{2}}{4}\cdot(3-2\sqrt{2})^n.$$

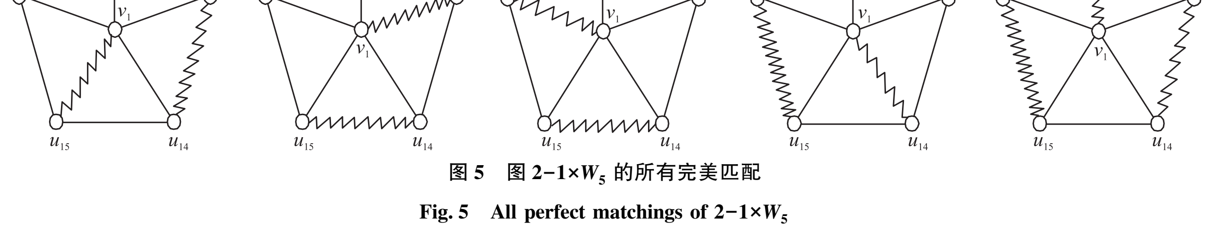

图5　图 $2-1\times W_5$ 的所有完美匹配

Fig. 5　All perfect matchings of $2-1\times W_5$

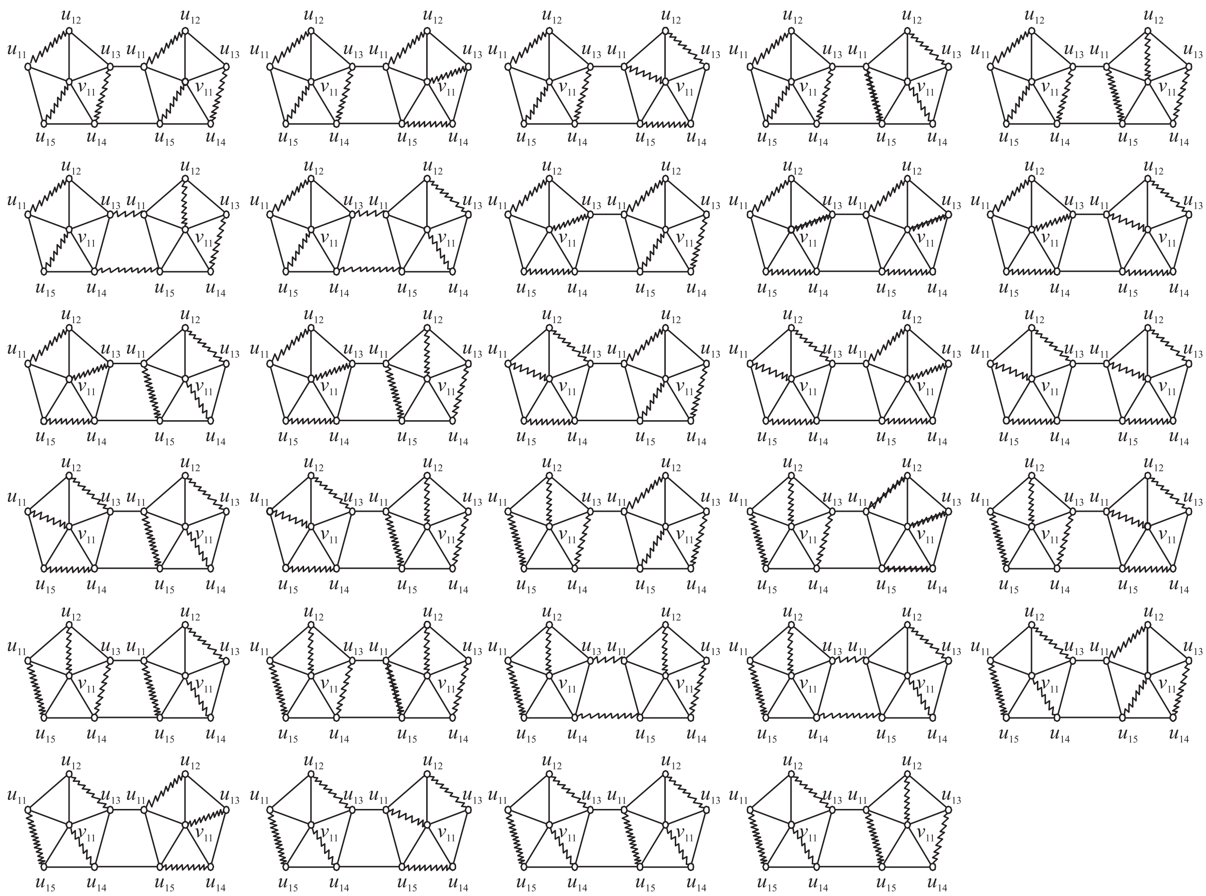

图 6　图 $2-2\times W_5$ 的所有完美匹配

Fig. 6　All perfect matchings of $2-2\times W_5$

[参考文献]

[1]　ZHANG H P. The connectivity of *Z*-transformation graphs of perfect matchings of polyominoes[J]. Discrete mathematics, 1996,158:257-272.

[2]　ZHANG H P,ZHANG F J. Perfect matchings of polyomino graphs[J]. Graphs and combinatorics,1997,13:259-304.

[3]　LI S L,YAN W G. The matching energy of graphs with given parameters[J]. Discrete applied mathematics,2014,162:415-420.

[4]　DONG F M,YAN W G,ZHANG F J. On the number of perfect matchings of line graphs[J]. Discrete applied mathematics, 2013,161:794-801.

[5]　YAN WG,ZHANG F J. A quadratic identity for the number of perfect matchings of plane graphs[J]. Theoretical computer science,2008,409:405-410.

[6]　CHANG A,TIAN F,YU A M. On the index of bicyclic graphs with perfect matchings[J]. Discrete mathematics,2004, 283:51-59.

[7]　CHANG A,SHIU W C. On the kth eigenvalues of trees with perfect matchings[J]. Discrete mathematics and theoretical computer science,2007,9(1):321-332.

[8]　唐保祥,任韩. 两类图完美匹配的计数公式[J]. 吉林大学学报(理学版),2016,54(4):790-792.

[9]　唐保祥,任韩. 2 类图完美匹配数目的解析式[J]. 中山大学学报(自然科学版),2016,55(4):15-17.

[10]　唐保祥,任韩. 4 类图完美匹配数目的递推求法[J]. 数学杂志,2015,353(2):626-634.

[11]　唐保祥,任韩. 几类图完美匹配的数目[J]. 南京师大学报(自然科学版),2010,33(3):1-6.

[责任编辑:陆炳新]