doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2019.01.003

半群的区间值 Q-模糊双理想和内理想

王丰效,宋爱丽

(喀什大学数学与统计学院,新疆 喀什 844000)

[摘要] 模糊理想理论是半群的模糊理论的一个重要领域. 给定非空集 Q,引入了半群的区间值 Q-模糊双理想和区间值 Q-模糊内理想的概念,讨论了半群的区间值 Q-模糊双(内)理想的相关性质. 分别给出了半群的区间值 Q-模糊双(内)理想与模糊双(内)理想以及区间值模糊双(内)理想的关系. 证明了半群的区间值 Q-模糊双(内)理想的交和直积仍然是区间值 Q-模糊双(内)理想.

[关键词] 半群,区间值 Q-模糊双理想,区间值 Q-模糊内理想,交集,直积

[中图分类号]O159 [文献标志码]A [文章编号]1001-4616(2019)01-0014-06

Interval Value Q-fuzzy Bi-ideals and Interior Ideals of Semigroup

Wang Fengxiao,Song Aili

(College of Mathematics and Statistics,Kashi University,Kashi 844000,China)

Abstract:Fuzzy ideals theory are an important research field of semigroup fuzzy theory. Give a set Q,introduce the notion of the Q-interval value fuzzy ideals of semigroups,discuss its basic properties. The relations between Q-interval valued fuzzy ideals and fuzzy ideals and interval valued fuzzy ideals are given. It is proved that the intersections and direct product of Q-interval valued fuzzy ideals of semigroups are still Q-interval valued fuzzy ideals.

Key words:semigroup,interval valued Q-fuzzy ideals,interval valued Q-fuzzy interior ideals,intersection,direct product

作为模糊集的推广,区间值模糊集、直觉模糊集、双极值模糊集等概念被提出,并被广泛应用于各类代数系统,取得了大量的研究成果[1-5]. Kuroki 将模糊集的概念应用于半群,提出了模糊半群的概念,并讨论了半群的各类模糊理想[6]. 2001 年,Jun[7]等给出了 BCI-代数的 Ω-模糊理想的概念,研究了它的相关性质. 文献[8-9]分别讨论了 BCH-代数的 Ω-模糊点 H-理想的性质,BCK-代数的概念 Ω-模糊正定关联理想. 文献[10]引入了半群的 Ω-模糊子半群的概念,得到了它的相关性质. 本文将 Ω-模糊集与区间值模糊集相结合,给出了半群的区间值 Q-模糊双理想和区间值 Q-模糊内理想的概念,讨论了区间值 Q-模糊双理想和内理想的相关特征.

1 预备知识

为了讨论方便,先给出一些相关的概念及主要结果.

非空集合的区间值模糊集被定义为 $A=[A^L,A^U]$,其中 A^L 和 A^U 分别是 X 上的模糊集,并且对于任意 $x\in X$,有 $A^L(x)\leqslant A^U(x)$,$A=[A^L,A^U]$是[0,1]的一个闭子区间.

若 $D[0,1]$表示区间[0,1]的闭子区间的全体,对于任意 $D_1=[a_1,b_1]\in D[0,1]$,$D_2=[a_2,b_2]\in D[0,1]$,规定 $D_1\geqslant D_2\Leftrightarrow a_1\geqslant a_2,b_1\geqslant b_2$,$D_1=D_2\Leftrightarrow a_1=a_2,b_1=b_2$. 定义 D_1 与 D_2 的加细极小(记为 $\gamma_{\min}$)和加细极大(记为 $\gamma_{\max}$)

$$\gamma_{\min}(D_1,D_2)=[a_1\wedge a_2,b_1\wedge b_2],\gamma_{\max}(D_1,D_2)=[a_1\vee a_2,b_1\vee b_2].$$

定义 1[5] 假设$(S,\cdot)$为一个半群,$A=[A^L,A^U]$是 S 上的区间值模糊集,如果对于任意 $x,y\in S$ 有

收稿日期:2018-04-17.

基金项目:新疆维吾尔自治区自然科学基金(2018D01A02).

通讯联系人:王丰效,教授,硕士生导师,研究方向:模糊子代数,应用概率统计研究. E-mail:fxw-hz@126.com

$A(xy) \geqslant \gamma_{\min}(A(x), A(y))$,则称 $A=[A^L, A^U]$ 为半群 S 的区间值模糊子半群.

定义 2[5] 如果 A 为半群 S 的区间值模糊子半群,称 A 为半群 S 的区间值模糊双理想,如果对任意 x, $y, z \in S$ 有,$A(xy) \geqslant \gamma_{\min}(A(x), A(y))$,$A(xyz) \geqslant \gamma_{\min}(A(x), A(z))$. 称 A 为半群 S 的区间值模糊内理想,如果对任意 $x, y, z \in S$ 有,$A(xy) \geqslant \gamma_{\min}(A(x), A(y))$,$A(xyz) \geqslant A(y)$.

假设 Q 表示一个非空给定集合,S 为半群,称 $\mu: S \times Q \to [0,1]$ 为 S 的 Q-模糊集.

定义 3[10] 假设 $(S, \cdot)$ 为一个半群,μ 为 S 的 Q-模糊集. 称 μ 为 S 的 Q-模糊子半群,如果对任意的 $x, y \in S, q \in Q$ 有 $\mu(xy, q) \geqslant \mu(x, q) \wedge \mu(y, q)$.

定义 4[10] 假设 μ 为半群 S 的 Q-模糊子半群,称 μ 为 S 的 Q-模糊双理想,如果对任意的 $x, y, z \in S$, $q \in Q$ 有 $\mu(xyz, q) \geqslant \mu(x, q) \wedge \mu(z, q)$. 称 μ 为 S 的 Q-模糊内理想,如果对任意的 $x, y, z \in S, q \in Q$ 有 $\mu(xyz, q) \geqslant \mu(y, q)$.

2 主要结果

定义 5 假设 Q 表示一个非空给定集合,S 为半群. $A=[\mu_A, \nu_A]$ 是 S 上的区间值模糊集,如果 μ_A 和 ν_A 都是 $S \times \Omega$ 上的 Q-模糊集,则称 $A=[\mu_A, \nu_A]$ 为 S 的区间值 Q-模糊集.

定义 6 假设 $(S, \cdot)$ 为一个半群,$A=[\mu_A, \nu_A]$ 为 S 的区间值 Q-模糊集. 如果对任意的 $x, y, z \in S$, $q \in Q$ 有

$$(1) A(xy, q) \geqslant \gamma_{\min}(A(x, q), A(y, q)), (2) A(xyz, q) \geqslant \gamma_{\min}(A(x, q), A(z, q)).$$

则称 A 为 S 的区间值 Q-模糊双理想.

定义 7 假设 $(S, \cdot)$ 为一个半群,$A=[\mu_A, \nu_A]$ 为 S 的区间值 Q-模糊集. 如果对任意的 $x, y, z \in S$, $q \in Q$ 有

$$(1) A(xy, q) \geqslant \gamma_{\min}(A(x, q), A(y, q)), (2) A(xyz, q) \geqslant A(y, q).$$

则称 A 为 S 的区间值 Q-模糊内理想.

例 1 设 $S=\{a, b, c\}$,S 上的二元运算如表 1. 则 $(S, \cdot)$ 是半群,假设 $Q=\{q_1, q_2\}$,定义 S 的区间值 Q-模糊集 A 为

$A(a, q_1)=[0.7, 0.8]$, $A(b, q_1)=[0.6, 0.7]$, $A(c, q_1)=[0.1, 0.2]$,

$A(a, q_2)=[0.4, 0.5]$, $A(b, q_2)=[0.5, 0.6]$, $A(c, q_2)=[0.0, 0.1]$,

由定义可以验证 A 为 S 的区间值 Q-模糊双理想.

表 1 半群 S 的运算表

Table 1 Operational table of S

	a	b	c
a	a	a	a
b	b	b	b
c	c	c	c

定义 S 的区间值 Q-模糊集 B 为

$$B(a, q_1)=[0.7, 0.8], B(b, q_1)=[0.6, 0.7], B(c, q_1)=[0.7, 0.8],$$
$$B(a, q_2)=[0.4, 0.5], B(b, q_2)=[0.7, 0.8], B(c, q_2)=[0.3, 0.4],$$

由定义可以验证 B 为 S 的区间值 Q-模糊内理想.

对任意的 θ,记 $A+\theta=[\mu_A+\theta, \nu_A+\theta] \subset D[0,1]$. 如果 $A=[\mu_A, \nu_A]$ 为 S 的区间值 Q-模糊集,则 $A+\theta$ 也是 S 的区间值 Q-模糊集. 由定义 6 和定义 7 可得定理 1.

定理 1 设 $A=[\mu_A, \nu_A]$ 为 S 的区间值 Q-模糊双理想(内理想),则 $A+\theta$ 也是 S 的区间值 Q-模糊双理想(内理想).

定理 2 设 A 为 S 的区间值 Q-模糊集,则 A 为 S 的区间值 Q-模糊双理想当且仅当 μ_A 和 ν_A 都是 S 的 Q-模糊双理想.

证明(必要性) 设 A 为 S 的区间值 Q-模糊双理想,则对任意的 $x, y, z \in S, q \in \Omega$ 有 $A(xy, q) \geqslant \gamma_{\min}(A(x, q), A(y, q))$,$A(xyz, q) \geqslant \gamma_{\min(A(x,q)}, A(z, q))$.

即:

$$[\mu_A(xy, q), \nu_A(xy, q)]=[\mu_A, \nu_A](xy, q) \geqslant \gamma_{\min}([\mu_A(x, q), \nu_A(x, q)], [\mu_A(y, q), \nu_A(y, q)])= [\mu_A(x, q) \wedge \mu_A(y, q), \nu_A(x, q) \wedge \nu_A(y, q)].$$

$$[\mu_A(xyz, q), \nu_A(xyz, q)]=[\mu_A, \nu_A](xyz, q) \geqslant \gamma_{\min}([\mu_A(x, q), \nu_A(x, q)], [\mu_A(z, q), \nu_A(z, q)])= [\mu_A(x, q) \wedge \mu_A(z, q), \nu_A(x, q) \wedge \nu_A(z, q)].$$

因此 $\mu_A(xy, q) \geqslant \mu_A(x, q) \wedge \mu_A(y, q)$, $\mu_A(xyz, q) \geqslant \mu_A(x, q) \wedge \mu_A(z, q)$, $\nu_A(xy, q) \geqslant \nu_A(x, q) \wedge \nu_A(y, q)$,

$\nu_A(xyz,q)\geqslant\nu_A(x,q)\wedge\nu_A(z,q)$.

故由定义 3 可得 μ_A 和 ν_A 都是 S 的 Q-模糊双理想.

(充分性)如果 μ_A 和 ν_A 都是 S 的 Q-模糊双理想,则对任意 $x,y,z\in S,q\in\Omega$ 有

$$\mu_A(xy,q)\geqslant\mu_A(x,q)\wedge\mu_A(y,q),\mu_A(xyz,q)\geqslant\mu_A(x,q)\wedge\mu_A(z,q),$$
$$\nu_A(xy,q)\geqslant\nu_A(x,q)\wedge\nu_A(y,q),\nu_A(xyz,q)\geqslant\nu_A(x,q)\wedge\nu_A(z,q),$$

因此:

$$[\mu_A,\nu_A](xy,q)=[\mu_A(xy,q),\nu_A(xy,q)]\geqslant[\mu_A(x,q)\wedge\mu_A(y,q),\nu_A(x,q)\wedge\nu_A(y,q)]=\gamma_{\min}([\mu_A(x,q),\nu_A(x,q)],[\mu_A(y,q),\nu_A(y,q)]).$$
$$[\mu_A,\nu_A](xyz,q)=[\mu_A(xyz,q),\nu_A(xyz,q)]\geqslant[\mu_A(x,q)\wedge\mu_A(z,q),\nu_A(x,q)\wedge\nu_A(z,q)]=\gamma_{\min}([\mu_A(x,q),\nu_A(x,q)],[\mu_A(z,q),\nu_A(z,q)]).$$

即 $A(xy,q)\geqslant\gamma_{\min}(A(x,q),A(y,q)),A(xyz,q)\geqslant\gamma_{\min}(A(x,q),A(z,q))$. 所以 $A=[\mu_A,\nu_A]$ 为 S 的区间值 Q-模糊双理想.

定理 3　设 A 为 S 的区间值 Q-模糊集,则 A 为 S 的区间值 Q-模糊内理想当且仅当 μ_A 和 ν_A 都是 S 的 Q-模糊内理想.

定理 4　设 A 和 B 都是 S 的区间值 Q-模糊双理想,则 $A\cap B=\gamma_{\min}(A,B)$ 是 S 的区间值 Q-模糊双理想.

证明　由于 A 和 B 都是 S 的区间值 Q-模糊双理想,故对任意 $x,y,z\in S,q\in\Omega$ 有

$$A(xy,q)\geqslant\gamma_{\min}(A(x,q),A(y,q)),B(xy,q)\geqslant\gamma_{\min}(B(x,q),B(y,q)),$$
$$A(xyz,q)\geqslant\gamma_{\min}(A(x,q),A(z,q)),B(xyz,q)\geqslant\gamma_{\min}(B(x,q),B(z,q)),$$

从而

$$A\cap B(xy,q)=\gamma_{\min}(A(xy,q),B(xy,q))\geqslant\gamma_{\min}(\gamma_{\min}(A(x,q),A(y,q)),\gamma_{\min}(B(x,q),B(y,q)))=\gamma_{\min}(\gamma_{\min}(A(x,q),B(x,q)),\gamma_{\min}(A(y,q),B(y,q)))=\gamma_{\min}(A\cap B(x,q),A\cap B(y,q)).$$
$$A\cap B(xyz,q)=\gamma_{\min}(A(xyz,q),B(xyz,q))\geqslant\gamma_{\min}(\gamma_{\min}(A(x,q),A(z,q)),\gamma_{\min}(B(x,q),B(z,q)))=\gamma_{\min}(\gamma_{\min}(A(x,q),B(x,q)),\gamma_{\min}(A(z,q),B(z,q)))=\gamma_{\min}(A\cap B(x,q),A\cap B(z,q)).$$

因此由定义 6 可知,$A\cap B$ 是 S 的区间值 Q-模糊双理想.

定理 5　设 A 和 B 都是 S 的区间值 Q-模糊内理想,则 $A\cap B=\gamma_{\min}(A,B)$ 是 S 的区间值 Q-模糊内理想.

证明　由于 A 和 B 都是 S 的区间值 Q-模糊内理想,故对任意 $x,y,z\in S,q\in\Omega$ 有

$$A(xy,q)\geqslant\gamma_{\min}(A(x,q),A(y,q)),B(xy,q)\geqslant\gamma_{\min}(B(x,q),B(y,q))A(xyz,q)\geqslant A(y,q),B(xyz,q)\geqslant B(y,q).$$

从而

$$A\cap B(xy,q)=\gamma_{\min}(A(xy,q),B(xy,q))=\gamma_{\min}(A\cap B(x,q),A\cap B(y,q)),$$
$$A\cap B(xyz,q)=\gamma_{\min}(A(xyz,q),B(xyz,q))\geqslant\gamma_{\min}(A(y,q),B(y,q))=A\cap B(y,q),$$

因此由定义 7 可知,$A\cap B$ 是 S 的区间值 Q-模糊内理想.

如果给定集合 Q 是单元素集合,则 S 的区间值 Q-模糊集就成为 S 的区间值模糊集,从而可得下面的几个推论.

推论 1　设 $A=[\mu_A,\nu_A]$ 为 S 的区间值模糊集,$A=[\mu_A,\nu_A]$ 为 S 的区间值模糊子半群当且仅当 μ_A 和 ν_A 都是 S 的模糊子半群.

推论 2　设 A 和 B 都是 S 的区间值模糊子半群,则 $A\cap B=\gamma_{\min}(A,B)$ 是 S 的区间值模糊子半群.

推论 3　设 $A_i,i=1,2,\cdots,n$ 是 S 的区间值 Q-模糊双理想,则 $\cap_{i=1}^{n}A_i$ 是 S 的区间值 Q-模糊双理想.

推论 4　设 $A_i,i=1,2,\cdots,n$ 是 S 的区间值 Q-模糊内理想,则 $\cap_{i=1}^{n}A_i$ 是 S 的区间值 Q-模糊内理想.

定义 8　假设 $A=[\mu_A,\nu_A]$ 为 S 的区间值 Q-模糊集,称 $A_{[s,t]}=\{x\in S|A(x,q)\geqslant[s,t],q\in Q\}$ 为 A 的 $[s,t]$ 上水平截集,称 $\tilde{A}_{[s,t]}=\{x\in S|A(x,q)>[s,t],q\in Q\}$ 为 A 的 $[s,t]$ 强上水平截集,其中 $[s,t]\subset[0,1]$.

定理 6　设 A 为 S 的区间值 Q-模糊集,则 A 是 S 的区间值 Q-模糊双理想当且仅当非空集 $A_{[s,t]}$ 是 S 的双理想.

证明(必要性)　设 $A_{[s,t]}$ 非空,且 $x,z\in A_{[s,t]}$,则对任意 $q\in Q$ 有 $A(x,q)\geqslant[s,t],A(z,q)\geqslant[s,t]$. 由于

A 是 S 的区间值 Q-模糊双理想,故对任意 $x,y,z\in S,q\in Q$ 有

$$A(xz,q)\geqslant\gamma_{\min}(A(x,q),A(z,q))\geqslant[s,t],A(xyz,q)\geqslant\gamma_{\min}(A(x,q),A(z,q))\geqslant[s,t].$$

因此 $xz\in A_{[s,t]},xyz\in A_{[s,t]}$,故 $A_{[s,t]}$ 是 S 的双理想.

(充分性)若 $A_{[s,t]}$ 是 S 的双理想,如果存在 $a,b\in S,q\in Q$ 使得 $A(ab,q)<\gamma_{\min}(A(a,q),A(b,q))$,取区间 $[c,d]\subset[0,1]$ 满足 $A(xy,q)<[c,d]<\gamma_{\min}(A(x,q),A(y,q))$,则 $A(x,q)\geqslant[c,d],A(y,q)\geqslant[c,d]$. 由于 $A_{[c,d]}$ 是 S 的双理想,从而 $xy\in A_{[c,d]}$,即 $A(xy,q)\geqslant[c,d]$ 与 $A(xy,q)<[a,b]$ 矛盾. 因此对任意的 $x,y\in S$, $q\in\Omega$ 有 $A(xy,q)\geqslant\gamma_{\min}(A(x,q),A(y,q))$.

如果存在 $x_0,y_0,z_0\in S,q\in Q$ 使得 $A(x_0y_0z_0,q)<\gamma_{\min}(A(x,q),A(z,q))$,取区间 $[e,f]\subset[0,1]$ 满足 $A(x_0y_0z_0,q)<[e,f]<\gamma_{\min}(A(x,q),A(z,q))$,则 $A(x_0,q)\geqslant[e,f],A(z_0,q)\geqslant[e,f]$. 由于 $A_{[e,f]}$ 是 S 的双理想,从而 $x_0y_0z_0\in A_{[e,f]}$,即 $A(x_0y_0z_0,q)\geqslant[e,f]$ 与 $A(x_0y_0z_0,q)<[e,f]$ 矛盾. 因此对于任意的 $x,y,z\in S,q\in Q$ 有 $A(xyz,q)\geqslant\gamma_{\min}(A(x,q),A(z,q))$.

综上由定义 6 可知 A 是 S 的区间值 Q-模糊双理想.

定理 7 设 A 为 S 的区间值 Q-模糊集,则 A 是 S 的区间值 Q-模糊双理想当且仅当非空集 $\tilde{A}_{[s,t]}$ 是 S 的双理想.

定理 8 设 A 为 S 的区间值 Q-模糊集,则 A 是 S 的区间值 Q-模糊内理想当且仅当非空集 $A_{[s,t]}$ 是 S 的内理想.

定理 9 设 A 为 S 的区间值 Q-模糊集,则 A 是 S 的区间值 Q-模糊内理想当且仅当非空集 $\tilde{A}_{[s,t]}$ 是 S 的内理想.

定理 10 设 A 为半群 S 的区间值 Q-模糊双理想,则非空集 $U=\{x\in S|A(x,q)=[1,1],q\in Q\}$ 是 S 的双理想.

证明 设 $U=\{x\in S|A(x,q)=[1,1],q\in Q\}$ 非空,且 $x,y\in U$,则 $A(x,q)=A(y,q)=[1,1]$. 由于 A 为 S 的区间值 Q-模糊双理想,因而 $A(xy,q)\geqslant\gamma_{\min}(A(x,q),A(y,q))=[1,1]$,即 $A(xy,q)=[1,1]$,从而 $xy\in U$,即就是 U 是 S 的子半群. 又对任意 $z\in S$ 有 $A(xzy,q)\geqslant\gamma_{\min}(A(x,q),A(y,q))=[1,1]$,即 $xzy\in U$,故 U 是 S 的双理想.

定理 11 设 A 为半群 S 的区间值 Q-模糊内理想,则非空集 $U=\{x\in S|A(x,q)=[1,1],q\in Q\}$ 是 S 的内理想.

定理 12 假设 I 是半群 S 的子集,定义 S 的区间值 Q-模糊集 A_I 满足:若 $x\in I,A_I(x,q)=[1,1]$;若 $x\notin I,A_I(x,q)=[0,0]$. 则 A_I 是半群 S 的区间值 Q-模糊双理想当且仅当 I 是半群 S 的双理想.

证明(必要性) 设 $x,y\in I$,则 $A_I(x,q)=A_I(y,q)=[1,1]$,由于 A_I 是半群 S 的区间值 Q-模糊双理想,从而 $A(xy,q)\geqslant\gamma_{\min}(A(x,q),A(y,q))=[1,1],A(xzy,q)\geqslant\gamma_{\min}(A(x,q),A(y,q))=[1,1],z\in S$. 即 $A(xy,q)=[1,1],A(xzy,q)=[1,1]$,从而 $xy,xzy\in I$,即 I 是 S 的双理想.

(充分性)假设 I 是 S 的双理想. 下证 A_I 是半群 S 的区间值 Q-模糊双理想,对任意 $x,y,z\in S,q\in Q$ 分下面几种情况:

(1)如果 $x,y\in I,I$ 是 S 的双理想,则 $xy\in I,xzy\in I$,从而 $A_I(xy,q)=A_I(x,q)=A_I(y,q)=[1,1],A_I(xzy,q)=A_I(x,q)=A_I(y,q)=[1,1]$. 即有

$$A(xy,q)\geqslant\gamma_{\min}(A(x,q),A(y,q)),A(xzy,q)\geqslant\gamma_{\min}(A(x,q),A(y,q)).$$

(2)如果 $x\notin I$ 或 $y\notin I$,则 $A_I(x,q)=[0,0]$ 或 $A_I(y,q)=[0,0]$,故

$$A(xy,q)\geqslant\gamma_{\min}(A(x,q),A(y,q)),A(xzy,q)\geqslant\gamma_{\min}(A(x,q),A(y,q)).$$

综上 A_I 是半群 S 的区间值 Q-模糊双理想.

下面,我们讨论半群的区间值 Q-模糊子半群直积的性质. 假设 S 和 R 是两个半群,A 和 B 分别是 S 和 R 上的区间值 Q-模糊集,定义 $S\times R$ 上的区间值 Q-模糊集 $A\times B$ 为

$$A\times B((x,y),q)=\gamma_{\min}(A(x,q),B(y,q)),(x,y)\in S\times R,q\in Q.$$

定理 13 假设 A 和 B 分别是半群 S 和 R 上的区间值 Q-模糊双理想,则 $A\times B$ 是半群 $S\times R$ 的区间值 Q-模糊双理想.

证明 对于任意的 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)\in S\times R,q\in Q$ 有

$$A\times B((x_1,y_1)(x_2,y_2),q)=A\times B((x_1x_2,y_1y_2),q)=\gamma_{\min}(A(x_1x_2,q),B(y_1y_2,q)),$$
$$A\times B((x_1,y_1)(x_2,y_2)(x_3,y_3),q)=A\times B((x_1x_2x_3,y_1y_2y_3),q)=\gamma_{\min}(A(x_1x_2x_3,q),B(y_1y_2y_3,q)),$$

由于 A 和 B 分别是半群 S 和 R 上的区间值 Q-模糊双理想,因此

$$A(x_1x_2,q)\geqslant\gamma_{\min}(A(x_1,q),A(x_2,q)),A(y_1y_2,q)\geqslant\gamma_{\min}(A(y_1,q),A(y_2,q)),$$
$$A(x_1x_2x_3,q)\geqslant\gamma_{\min}(A(x_1,q),A(x_3,q)),A(y_1y_2y_3,q)\geqslant\gamma_{\min}(A(y_1,q),A(y_3,q)),$$

故

$$A\times B((x_1,y_1)(x_2,y_2),q)=\gamma_{\min}(A(x_1x_2,q),B(y_1y_2,q))\geqslant\gamma_{\min}(\gamma_{\min}(A(x_1,q),A(x_2,q)),$$
$$\gamma_{\min}(A(y_1,q),A(y_2,q)))=\gamma_{\min}(\gamma_{\min}(A(x_1,q),A(y_1,q)),\gamma_{\min}(A(x_2,q),A(y_2,q)))=$$
$$\gamma_{\min}(A\times B((x_1,y_1),q),A\times B((x_2,y_2),q))A\times B((x_1,y_1)(x_2,y_2)(x_3,y_3),q)=$$
$$\gamma_{\min}(A(x_1x_2x_3,q),B(y_1y_2y_3,q))\geqslant\gamma_{\min}(\gamma_{\min}(A(x_1,q),A(x_3,q)),$$
$$\gamma_{\min}(A(y_1,q),A(y_3,q)))=\gamma_{\min}(\gamma_{\min}(A(x_1,q),A(y_1,q)),$$
$$\gamma_{\min}(A(x_3,q),A(y_3,q)))=\gamma_{\min}(A\times B((x_1,y_1),q),A\times B((x_3,y_3),q)).$$

因此 $A\times B$ 是半群 $S\times R$ 的区间值 Q-模糊双理想.

定理 14　假设 A 和 B 分别是半群 S 和 R 上的区间值 Q-模糊内理想,则 $A\times B$ 是半群 $S\times R$ 的区间值 Q-模糊内理想.

定理 15　设 A 是 S 上的区间值 Q-模糊集,定义 S 上的区间值模糊集 $\delta_A(x)=\gamma_{\min}\{A(x,q)\mid q\in Q\}$. 如果 A 是 S 上的区间值 Q-模糊内理想,则 δ_A 是 S 上的区间值模糊内理想.

证明　设 A 是 S 的区间值 Q-模糊内理想,则对于任意的 $x,y,z\in S,q\in Q$,有 $A(xy,q)\geqslant\gamma_{\min}(A(x,q),A(y,q))$,$A(xyz,q)\geqslant A(y,q)$. 因此

$$\delta_A(xy)=\gamma_{\min}\{A(xy,q)\mid q\in Q\}\geqslant\gamma_{\min}\{\gamma_{\min}(A(x,q),A(y,q))\mid q\in Q\}=$$
$$\gamma_{\min}(\gamma_{\min}\{A(x,q)\mid q\in Q\},\gamma_{\min}\{A(y,q))\mid q\in Q\})=\gamma_{\min}(\delta_A(x),\delta_A(y)),$$
$$\delta_A(xyz)=\gamma_{\min}\{A(xyz,q)\mid q\in Q\}\geqslant\gamma_{\min}\{A(y,q)\mid q\in Q\}=\delta_A(y).$$

因此 $\delta_A(x)$ 是 S 上的区间值模糊内理想.

在例 1 中,由于 B 是 S 上的区间值 Q-模糊内理想,此时 $\delta_B(a)=[0.4,0.5]$,$\delta_B(b)=[0.6,0.7]$,$\delta_B(c)=[0.3,0.4]$. 由定理 15 可知 $\delta_B(x)=\gamma_{\min}\{B(x,q)\mid q\in Q\}$ 是 S 上的区间值模糊内理想.

定理 16　设 A 是 S 上的区间值 Q-模糊集,定义 S 上的区间值模糊集 $\delta_A(x)=\min\{A(x,q)\mid q\in Q\}$. 如果 A 是 S 上的区间值 Q-模糊双理想,则 δ_A 是 S 上的区间值模糊双理想.

在例 1 中,由于 A 是 S 上的区间值 Q-模糊双理想,此时 $\delta_A(a)=[0.4,0.5]$,$\delta_A(b)=[0.5,0.6]$,$\delta_B(c)=[0.0,0.1]$. 由定理 16 可知 $\delta_A(x)=\gamma_{\min}\{A(x,q)\mid q\in Q\}$ 是 S 上的区间值模糊双理想.

设 A 是 S 上的区间值 Q-模糊集,对固定的 $q\in Q$,定义 $\delta_q(x)=A(x,q)$,则 δ_q 是 S 上的区间值模糊集.

定理 17　A 是 S 上的区间值 Q-模糊双理想当且仅当对任意固定的 $q\in Q$,δ_q 是 S 上的区间值模糊双理想.

证明(必要性)　设 A 是 S 的区间值 Q-模糊双理想,则对于任意的 $x,y,z\in S,q\in Q$,有 $A(xy,q)\geqslant\gamma_{\min}(A(x,q),A(y,q))$,$A(xyz,q)\geqslant\gamma_{\min}(A(x,q),A(z,q))$.

因此对于固定的 $q\in Q$,有

$$\delta_q(xy)=A(xy,q)\geqslant\gamma_{\min}(A(x,q),A(y,q))=\gamma_{\min}(\delta_q(x),\delta_q(y)),$$
$$\delta_q(xyz)=A(xyz,q)\geqslant\gamma_{\min}(A(x,q),A(z,q))=\gamma_{\min}(\delta_q(x),\delta_q(z)).$$

因此 δ_q 是 S 上的区间值模糊双理想.

(充分性)如果对于任意固定的 $q\in Q$,δ_q 是 S 上的区间值模糊双理想. 则对于任意 $x,y,z\in S$ 都有 $\delta_q(xy)\geqslant\gamma_{\min}(\delta_q(x),\delta_q(y))$,$\delta_q(xyz)\geqslant\gamma_{\min}(\delta_q(x),\delta_q(z))$. 即 $A(xy,q)\geqslant\gamma_{\min}(A(x,q),A(y,q))$,$A(xyz,q)\geqslant\gamma_{\min}(A(x,q),A(z,q))$. 因此 A 是 S 的区间值 Ω-模糊双理想.

定理 18　A 是 S 上的区间值 Q-模糊内理想当且仅当对任意固定的 $q\in Q$,δ_q 是 S 上的区间值模糊内理想.

命题 1[10]　若 S^Q 表示从 Q 到半群 S 的映射的集合,在 S^Q 上定义如下运算:对于任意的 $\alpha,\beta\in S^Q$,$\alpha\otimes\beta(q)=\alpha(q)\beta(q)$,$q\in Q$. 则 S^Q 关于运算 $\otimes$ 构成一个半群.

定理 19 设 A 是半群 S 上的区间值模糊双理想,定义 S^Q 的区间值 Q-模糊集 $C:S^Q\times\Omega\to D[0,1]$ 满足 $C(\alpha,q)=A(\alpha(q))$,则 C 是半群 S^Q 的区间值 Q-模糊双理想.

证明 对于任意的 $\alpha,\beta,\gamma\in S^Q,q\in Q$,由于 A 是半群 S 上的区间值模糊双理想,从而有

$C(\alpha\otimes\beta,q)=A(\alpha\otimes\beta(q))=A(\alpha(q)\beta(q))\geqslant\gamma_{\min}(A(\alpha(q)),A(\beta(q)))=\gamma_{\min}(C(\alpha,q),C(\beta,q))$,

$C(\alpha\otimes\beta,q)=A(\alpha\otimes\beta\otimes\gamma(q))=A(\alpha(q)\beta(q)\gamma(q))\geqslant\gamma_{\min}(A(\alpha(q)),A(\gamma(q)))=\gamma_{\min}(C(\alpha,q),C(\gamma,q))$.

故 C 是半群 S^Q 的区间值 Q-模糊子半群.

定理 20 设 A 是半群 S 上的区间值模糊内理想,定义 S^Q 的区间值 Q-模糊集 $C:S^Q\times\Omega\to D[0,1]$ 满足 $C(\alpha,q)=A(\alpha(q))$,则 C 是半群 S^Q 的区间值 Q-模糊内理想.

如果 Q 是一个单元素集合,则区间值 Q-模糊集就是通常的区间值模糊集,从上述主要结果可以看出,区间值 Q-模糊集就是区间值模糊集的一种推广,相关的结论也是区间值模糊子半群相应结论的推广.

3 结论

本文将区间值模糊集与 Q-模糊集相结合,在半群中引入了半群的 Q-区间值模糊双理想和内理想的概念,讨论了它们的相关性质. 相关的结果实际上是半群的区间值模糊双理想和区间值模糊内理想的相应推广,相关结论丰富了模糊半群的相关理论. 另外,Q-区间值模糊集的概念也可以应用于其他代数系统.

[参考文献]

[1] 谢祥云,吴明芬. 半群的模糊理论[M]. 北京:科学出版社,2005.
[2] MORDESON J N,MALIK D S,KOUOKI N. Fuzzy semigroups[M]. Berlin:Springer,2003.
[3] WANG F X. Interval-valued intuitionistic fuzzy ideals of B-algebras[J]. Journal of intelligent & fuzzy systems,2017,33(4):2609-2615.
[4] 王丰效,宋爱丽. 半群的区间值反模糊子半群的性质[J]. 数学的实践与认识,2018,48(5):207-212.
[5] 王丰效. 坡代数的区间值模糊子坡[J]. 数学的实践与认识,2017,47(24):289-293.
[6] KUROKI N. On fuzzy ideals and fuzzy bi-ideals in semigroup[J]. Fuzzy sets and systems,1981(5):203-215.
[7] JUN Y B,KIM,K H,et al. On Ω-fuzzy ideals of BCK/BCI-algebras[J]. Journal of fuzzy mathematics,2001,9(1):173-180.
[8] PENG J Y. Ω-fuzzy H-ideals of BCI-algebras[J]. Journal of Nanjing normal university(natural science edition),2009,24(2):5-10.
[9] 彭家寅. BCH-代数的 Ω-模糊正定关联理想[J]. 数学的实践与认识,2010,40(2):157-163.
[10] 朱晓英,廖祖华,罗晓棠,等. 半群的 Ω-模糊子半群[J]. 江南大学学报(自然科学版),2013,12(6):343-346.

[责任编辑:陆炳新]