第 42 卷第 1 期 南京师大学报(自然科学版) Vol. 42 No. 1
2019 年 3 月 JOURNAL OF NANJING NORMAL UNIVERSITY(Natural Science Edition) Mar,2019

doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2019.01.004

EP 元与方程的解

李德才[1,2],史丽妍[1],魏俊潮[1]

(1.扬州大学数学科学学院,江苏 扬州 225002)
(2.扬州市职业大学科技处,江苏 扬州 225009)

[**摘要**] 证明了如下结论:设 $a\in R^{\#}\cap R^{+}$,则 1) $a\in R^{\mathrm{EP}}$ 当且仅当方程 $axa^{*}=a^{*}xa$ 在 χ_a 中有解;2) $a\in R^{\mathrm{EP}}$ 当且仅当方程 $a^{\#}xa^{*}=a^{+}xa^{*}$ 在 χ_a 中至少有两个解,其中 $\chi_a=\{a,a^{\#},a^{+},a^{*},(a^{\#})^{*},(a^{+})^{*}\}$.

[**关键词**] $*$-环,群可逆元,Moore-Penrose 可逆元,EP 元,方程的解

[**中图分类号**]O153;O154 [**文献标志码**]A [**文章编号**]1001-4616(2019)01-0020-03

EP Elements and Solutions of Equations

Li Decai[1,2],Shi Liyan[1],Wei Junchao[2]

(1.School of Mathematical Science,Yangzhou University,Yangzhou 225002,China)
(2.Science and Technology Department,Yangzhou Polytechnic College,Yangzhou 225009,China)

Abstract:In this paper,some characterizations of EP elements are given. The main results are as follows:let $a\in R^{\#}\cap R^{+}$. then 1) $a\in R^{\mathrm{EP}}$ if and only if the equation $axa^{*}=a^{*}xa$ has at least one solution in χ_a;2) $a\in R^{\mathrm{EP}}$ if and only if the equation $a^{\#}xa^{*}=a^{+}xa^{*}$ has at least two solutions in χ_a,where $\chi_a=\{a,a^{\#},a^{+},a^{*},(a^{\#})^{*},(a^{+})^{*}\}$.

Key words: $*$-ring,group invertible element,Moore-Penrose invertible element,EP element,the solutions of equation

本文中,R 表示有单位元的结合环,用 $E(R)$ 和 $C(R)$ 分别表示 k 的全体幂等元集合及 R 的中心. 设 $a\in R$,用 $l(a)$ 及 $r(a)$ 分别表示 a 在 R 中的左零化子及右零化子;用 $comm(a)$ 及 $comm^2(a)$ 分别表示 a 在 R 中的交换子及双交换子的集合. 设 R 为一个环,$*$ 为环 R 到 R 的一个双射,若满足条件:(1) $(a^{*})^{*}=a$;(2) $(a+b)^{*}=a^{*}+b^{*}$;(3) $(ab)^{*}=b^{*}a^{*}$,其中 $a,b\in R$,则称 R 为一个对合(involution)环,有时也称 R 为 $*$-环.

设 R 为一个环,$a\in R$,若存在 $b\in R$,使得 $a=aba$;$b=bab$;$ab=ba$,则称 a 是 R 的群可逆元,且称 b 为 a 的群逆元. 由文献[1]知 b 是唯一的,记为 $a^{\#}$. 用 $R^{\#}$ 表示环 R 的全体群可逆元的集合. 设 R 为 $*$-环,$a\in R$,若 $a=a^{*}$,则称 a 是 R 的对称元[2];若存在 $x\in R$,满足 $a=axa$;$x=xax$;$(ax)^{*}=ax$;$(xa)^{*}=xa$,则称 a 为 Moore Penrose 可逆元,简称 a 为 MP 可逆元,x 称为 a 的 MP 逆元,由文献[3]知 x 是唯一的,记为 a^{+}. 用 R^{+} 表示 $*$-环 R 的全体 MP 可逆元的集合;若 $a\in R^{\#}\cap R^{+}$ 且 $a^{\#}=a^{+}$,则称 a 为 R 的 EP 元[4-6],用 R^{EP} 表示 R 的全体 EP 元的集合. 关于 EP 元的研究还可参见近期文献[7-9]. 环上 EP 元的研究起源于矩阵理论中的 EP 矩阵及 Banach 空间及 Hilbert 空间中的 EP 线性算子的研究,有兴趣的读者可参见文献[10-12]. 本文主要目的是给出 EP 元的一些新刻画,推广已有的一些结果.

1 主要结果

引理 1 设 $a\in R^{\#}\cap R^{+}$,则 $Ra^{*}=Ra^{2}a^{*}=Raa^{*}=Ra^{\#}aa^{*}$.

证明 注意到 $a^{*}=a^{+}aa^{*}$,所以 $Ra^{*}\subseteq Raa^{*}\subseteq Ra^{*}$,因此 $Ra^{*}=Raa^{*}$. 由于 $a=a^{\#}a^{2}$,所以 $Ra^{*}=Raa^{*}=Ra^{\#}a^{2}a^{*}\subseteq Ra^{2}a^{*}\subseteq Ra^{*}$,从而 $Ra^{*}=Ra^{\#}a^{2}a^{*}$. 注意到 $Ra=Ra^{\#}a$,因此 $Ra^{*}=Raa^{*}=Ra^{\#}aa^{*}$.

根据文献[7,Theorem 1.2],$a\in R^{\mathrm{EP}}$ 当且仅当且 $a^{\#}a$ 是对称元. 因此我们有下面的引理.

引理 2 设 $a\in R^{\#}\cap R^{+}$,若 $Ra^{*}\subseteq Ra$,则 $a\in R^{\mathrm{EP}}$.

收稿日期:2018-07-15.
基金项目:国家自然科学基金(11471282).
通讯联系人:李德才,教授,研究方向:hopf 代数. E-mail:decailee@163.com

证明 由于 $Ra^*\subseteq Ra$,所以 $r(a)\subseteq r(a^*)$. 注意到 $1-a^+a\in r(a)$,所以 $1-a^+a\in r(a^*)$,即有 $a^*=a^*a^+a$,从而 $a=a^+a^2$,$aa^\#=a^+a^2a^\#=a^+a$,即 $a^\#a$ 是对称元,从而 $a\in R^{EP}$.

设 $a\in R^\#\cap R^+$,记 $\mathcal{X}_a=\{a,a^\#,a^+,a^*,(a^\#)^*,(a^+)^*\}$.

定理 1 设 $a\in R^\#\cap R^+$,则 $a\in R^{EP}$ 当且仅当方程 $axa^*=a^*xa$ 在 $\mathcal{X}_a$ 中有解.

证明 必要性是显然的.

充分性:假设方程 $axa^*=a^*xa$ 在 $\mathcal{X}_a$ 中有解.

(1)若 $x=a$ 为解,则 $aaa^*=a^*aa$,从而由引理 1 知 $Ra^*=Ra^2a^*=Ra^*a^2\subseteq Ra$,由引理 2 知 $a\in R^{EP}$;

(2)若 $x=a^\#$为解,则 $aa^\#a^*=a^*a^\#a$,从而由引理 1 知 $Ra^*=Ra^\#aa^*=Raa^\#a^*=Ra^*a^\#a\subseteq Ra$,由引理 2 知 $a\in R^{EP}$;

(3)若 $x=a^+$为解,则 $aa^+a^*=a^*a^+a$,从而 $a^2a^+=(aa^+a^*)^*=(a^*a^+a)^*=a^+a^2$. 注意到 $Ra^+=Ra^*$ 且 $Ra^+=Raa^+=Ra^\#a^2a^+\subseteq Ra^2a^+\subseteq Ra^+$,因此 $Ra^*=Ra^2a^+=Ra^+a^2\subseteq Ra$,由引理 2 知 $a\in R^{EP}$;

(4)若 $x=a^*$ 为解,则 $aa^*a^*=a^*a^*a$,两边取卷积 $*$,则归结到(1);

(5)若 $x=(a^\#)^*$ 为解,则 $a(a^\#)^*a^*=a^*(a^\#)^*a$,两边取卷积 $*$ 得 $a^*a^\#a=aa^\#a^*$,由引理 1 知 $Ra^*=Raa^\#a^*=Ra^*a^\#a\subseteq Ra$,由引理 2 知 $a\in R^{EP}$;

(6)若 $x=(a^+)^*$ 为解,则 $a(a^+)^*a^*=a^*(a^+)^*a$,两边取卷积 $*$ 得 $a^*a^+a=aa^+a^*$,归结为(3).

综上,$a\in R^{EP}$.

定理 2 设 $a\in R^\#\cap R^+$,则 $a\in R^{EP}$ 当且仅当方程 $a^\#xa^*=a^+xa^*$ 在 $\mathcal{X}_a$ 中至少有两个解.

证明 仅需证明充分性:

假设方程 $a^\#xa^*=a^+xa^*$ 在 $\mathcal{X}_a$ 中有至少两个解.

(1)若 $x=a$ 为解,则 $a^\#aa^*=a^+aa^*$. 由于 $a\in R^+$,所以 a 是 $*$-可消的,从而 $a^\#a=a^+a$,$a^\#a$ 是对称元,由文献[7,Theorem 1.2]知 $a\in R^{EP}$;

(2)若 $x=a^\#$为解,则 $a^\#a^\#a^*=a^+a^\#a^*$,从而 $a^\#a^\#a^\#aa^*=a^+a^\#a^\#aa^*$,由 a 的 $*$-可消性得 $a^\#a^\#a^\#a=a^+a^\#a^\#a$,即 $a^\#a^\#=a^+a^\#$. 注意到 $aR=a^\#R=(a^\#)^2R$,所以 $aR\subseteq a^+R$,因此 $1-a^+a\in l(a^+)\subseteq l(a)$,$a=a^+a^2$,从而 $aa^\#=a^+a^2a^\#=a^+a$ 是对称元,由文献[7,Theorem 1.2]知 $a\in R^{EP}$;

(3)若 $x=a^*$ 为解,则 $a^\#a^*a^*=a^+a^*a^*$,两边取卷积 $*$ 得 $a^2(a^\#)^*=a^2(a^+)^*$,左乘 $a^\#$得 $a(a^\#)^*=a(a^+)^*$,再左乘 a^+后两边取卷积 $*$ 得 $a^\#=a^\#a^+a=a^+a^+a$,从而 $aR=a^\#R\subseteq a^+R$,所以$(1-a^+a)aR\subseteq(1-a^+a)a^+R=0$,$a=a^+a^2$,所以 $a\in R^{EP}$;

(4)若 $x=(a^\#)^*$ 为解,则 $a^\#(a^\#)^*a^*=a^+(a^\#)^*a^*$. 两边取卷积 $*$ 得 $aa^\#(a^\#)^*=aa^\#(a^+)^*$,两边左乘 a 得 $a(a^\#)^*=a(a^+)^*$,由(4)知 $a\in R^{EP}$;

(5)若 $x=(a^+)^*$ 为解,则 $a^\#(a^+)^*a^*=a^+(a^+)^*a^*$,从而 $a^\#aa^+=a^+aa^+=a^+$,因此 $a^+R\subseteq a^\#R=aR$,类似于引理 2 可得 $a\in R^{EP}$.

由于该方程在$\mathcal{X}_a$ 中至少有两个解,因此(1)至(5)中至少有 1 条成立,故 $a\in R^{EP}$.

我们不清楚当方程 $a^\#xa^*=a^+xa^*$ 在 $\mathcal{X}_a$ 中有解时是否有 $a\in R^{EP}$? 或者换句话说当 $a^\#a^+a^*=a^+a^+a^*$ 时,是否有 $a\in R^{EP}$?

观察定理 2 的证明过程可得下列推论.

推论 1[9,Theorem 2.1(xx)] 设 $a\in R^\#\cap R^+$,若 $a^\#a^\#=a^+a^\#$,则 $a\in R^{EP}$.

推论 2 设 $a\in R^\#\cap R^+$,若 $aR\subseteq a^+R$,则 $a\in R^{EP}$.

推论 3[9,Theorem 2.1(xiii)] 设 $a\in R^\#\cap R^+$,若 $a^\#=a^+a^+a$,则 $a\in R^{EP}$.

推论 4 设 $a\in R^\#\cap R^+$,若 $a=a^+a^2$,则 $a\in R^{EP}$.

实际上推论 1 可推广为:

推论 5 设 $a\in R^\#\cap R^+$,若 $a^\#a^\#-a^+a^\#\in comm(a)$,则 $a\in R^{EP}$.

证明 由于 $a^\#a^\#-a^+a^\#\in comm(a)$,所以 $a^\#-a^+a^\#a=(a^\#a^\#-a^+a^\#)a=a(a^\#a^\#-a^+a^\#)=a^\#-a^\#=0$,因此 $a^\#=a^+a^\#a$,由[9,Theorem 2.1(xix)]知 $a\in R^{EP}$.

由于当 $a\in R^\#$时,$comm(a)=comm(a^\#)$,因此推论 5 诱导了下面的推论.

推论 6　设 $a\in R^{\#}\cap R^{+}$,若 $a^{\#}a^{\#}-a^{+}a^{\#}\in comm(a^{\#})$,则 $a\in R^{\mathrm{EP}}$.

注意到 $a^{\#}a^{+}a^{\#}=(a^{\#})^{2}aa^{+}a(a^{\#})^{2}=(a^{\#})^{3}$,因此$(a^{\#}a^{\#}-a^{+}a^{\#})^{2}=0$,从而推论 1 导致了下面的推论.

推论 7　设 $a\in R^{\#}\cap R^{+}$,若 $a^{\#}a^{\#}-a^{+}a^{\#}\in R^{\#}$,则 $a\in R^{\mathrm{EP}}$.

由于 $E(R)\subseteq R^{\#}$,因此推论 7 暗示了下面的推论.

推论 8　设 $a\in R^{\#}\cap R^{+}$,若 $a^{\#}a^{\#}-a^{+}a^{\#}\in E(R)$,则 $a\in R^{\mathrm{EP}}$.

命题 1　设 $a\in R^{\#}\cap R^{+}$,则下列条件等价:

(1)$a^{\#}a^{+}a^{*}=a^{+}a^{+}a^{*}$;

(2)$a^{\#}a^{+}a^{+}=a^{+}a^{+}a^{+}$.

证明(1)⇒(2)　由于 $a^{\#}a^{+}a^{*}=a^{+}a^{+}a^{*}$,所以 $a^{\#}a^{+}(a^{+}aa^{*})=a^{+}a^{+}(a^{+}aa^{*})$.注意到 $a\in R^{+}$,所以 a 是 $*$-可消元,从而 $a^{\#}a^{+}a^{+}a=a^{+}a^{+}a^{+}a$,因此 $a^{\#}a^{+}a^{+}=a^{\#}a^{+}(a^{+}aa^{+})=(a^{\#}a^{+}a^{+}a)a^{+}=(a^{+}a^{+}a^{+}a)a^{+}=a^{+}a^{+}a^{+}$.

(2)⇒(1)　若 $a^{\#}a^{+}a^{+}=a^{+}a^{+}a^{+}$,则 $a^{\#}a^{+}a^{*}=a^{\#}a^{+}(a^{+}aa^{*})=(a^{\#}a^{+}a^{+})aa^{*}=(a^{+}a^{+}a^{+})aa^{*}=a^{+}a^{+}a^{*}$.

观察命题 1,则自然有下面的问题.

设 $a\in R^{\#}\cap R^{+}$,若下列条件之一成立,则 $a\in R^{\mathrm{EP}}$吗?

(1)$a^{+}a^{\#}a^{+}=a^{+}a^{+}a^{+}$;

(2)$a^{\#}a^{+}a^{+}=a^{+}a^{+}a^{\#}$;

(3)$a^{\#}a^{+}a^{+}=a^{+}a^{\#}a^{+}$.

观察推论 5 的证明,我们想起了公式 $aa^{+}a^{\#}=a^{\#}=a^{\#}a^{+}a$,因此容易计算出$(a^{\#}-a^{\#}aa^{+})^{2}=0=(a^{\#}-a^{+}aa^{\#})^{2}$,从而有下面的关于 EP 元的刻画.

命题 2　设 $a\in R^{\#}\cap R^{+}$,则下列条件等价:

(1)$a\in R^{\mathrm{EP}}$;

(2)$a^{\#}-a^{\#}aa^{+}\in R^{\#}$;

(3)$a^{\#}-a^{\#}aa^{+}\in E(R)$;

(4)$a^{\#}-a^{+}aa^{\#}\in R^{\#}$;

(5)$a^{\#}-a^{+}aa^{\#}\in E(R)$.

[参考文献]

[1] BEN-ISRAEL A,GREVILLE T N E. Generalized inverses:theory and applications[M]. 2nd ed. New York:Springer,2003.

[2] MOSIC D,DJORDJEVIC D S. Partial isometries and EP elements in rings with involution[J]. Eletron J linear algebra,2009,18(4):761-772.

[3] KOLIHA J J. The Drazin and Moore-Penrose inverse in C^{*}- algebra[J]. Math Proc R Ir Acad Ser A,1999,99(1):17-27.

[4] DJORDJEVIC D S. Products of EP operators on Hilbert spaces[J]. Proc Amer Math Soc,2000,129(6):1727-1731.

[5] KOLIHA J J,PATRICIO P. Elements of rings with equal spectral idempotents[J]. J Austr Math Soc,2002,72(1):137-152.

[6] LESNJAK G. Semigroups of EP linear transformations[J]. Linear Algebra Appl,2000,304(1):109-118.

[7] MOSIC D,DJORDJEVIC D S. Further results on partial isometries and EP elements in rings with involution[J]. Math Comput modelling,2011,54(3):460-465.

[8] CHEN W X. On EP elements,normal elements and partial isometries in rings with involution[J]. Electron J linear Algebra,2012,23(3):553-561.

[9] MOSIC D,DJORDJEVIC D S,KOLIHA J J. EP elements in rings[J]. Linear Algebra Appl,2009,431(4):527-535.

[10] CHENG S,TIAN Y. Two sets of new characterizations for normal and EP matrices[J]. Linear Algebra Appl,2003,375(2):181-195.

[11] DJORDJEVIC D S. Characterization of normal,hyponormal and EP operators[J]. J Math Anal Appl,2007,329(2):1181-1190.

[12] DJORDJEVIC D S,KOLIHA J J. Characterizing Hermitian,normal and EP operators[J]. Filomat,2007,21(1):39-54.

[责任编辑:陆炳新]