doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2019.01.005

三角代数上的非线性(m,n)-Lie 中心化子

费秀海[1],戴　磊[2],张海芳[1]

(1.滇西科技师范学院数学系,云南 临沧 677000)
(2.渭南师范学院数学与信息科学学院,陕西 渭南 714099)

[**摘要**]　设 m,n 是固定的整数且 $(m+n)(m-n)\neq 0$,U 是一个 $|(m+n)(m-n)|$-无挠的三角代数且满足 $\pi_A(Z(U))=Z(A)$ 和 $\pi_B(Z(U))=Z(B)$. 若 L 是 U 上的一个非线性(m,n)-Lie 中心化子,则存在一个中心元 λ 和一个到 U 的中心且在交换子上为零的映射 ξ 使得对任意的 $x\in U$,有 $L(x)=\lambda x+\xi(x)$.

[**关键词**]　三角代数,中心化子,Lie 中心化子,非线性(m,n)-Lie 中心化子

[**中图分类号**]O177.1　[**文献标志码**]A　[**文章编号**]1001-4616(2019)01-0023-05

Nonlinear (m,n)-Lie Centralizers on Triangular Algebras

Fei Xiuhai[1],Dai Lei[2],Zhang Haifang[1]

(1.Department of Mathematics,Dianxi Science and Technology Normal University,Lincang 677099,China)
(2.College of Mathematics and Information Science,Weinan Normal University,Weinan 714099,China)

Abstract:Let m,n be fixed integers with $(m+n)(m-n)\neq 0$,U be a $|(m+n)(m-n)|$-torsion free triangular algebra with $\pi_A(Z(U))=Z(A)$ and $\pi_B(Z(U))=Z(B)$. If L is a nonlinear (m,n)-Lie centralizer from Uinto itself,then there exist a center element λ and a mapping ξ from Uinto $Z(U)$ vanishing on all commutators such that $L(x)=\lambda x+\xi(x)$ for all $x\in U$.

Key words:triangular algebra,centralizer,Lie centralizer,nonlinear (m,n)-Lie centralizer

1　预备知识

设 ε 是一个有单位元的环或代数,L 是 ε 上的一个可加或线性映射,k 是一个大于等于 2 的整数,m 和 n 是固定的整数. 若对任意的 $x\in\varepsilon$ 且 $kx=0$,有 $x=0$,则称 ε 是 k-无挠的. 若对任意的 $x,y\in\varepsilon$,有 $L(xy)=L(x)y$(或 $L(xy)=xL(y)$),则称 L 是左(或右)中心化子;若 L 既是左中心化子又是右中心化子,则称 L 是中心化子;若对任意的 $x\in\varepsilon$,有 $L(x^2)=L(x)x$(或 $L(x^2)=xL(x)$),则称 L 是左(或右)Jordan 中心化子;若 L 既是左 Jordan 中心化子又是右 Jordan 中心化子,则称 L 是 Jordan 中心化子;若对任意的 $x,y\in\varepsilon$,有 $L([x,y])=[L(x),y]$,则称 L 是 Lie 中心化子. 注意到,若 $L([x,y])=[L(x),y]$,则 $L([x,y])=-L([y,x])=-[L(y),x]=[x,L(y)]$,因而 Lie 中心化子没有左右之分. 若 $m+n\neq 0$ 且满足对任意的 $x,y\in\varepsilon$,有 $(m+n)L([x,y])=m[L(x),y]+n[x,L(y)]$,则称 L 是 ε 上的一个(m,n)-Lie 中心化子. 显然,$(1,0)$-Lie(或 $(0,1)$-Lie)中心化子就是 Lie 中心化子. 进一步,若 L 没有可加或线性的假设且满足上式,则称 L 是 ε 上的一个非线性(m,n)-Lie 中心化子.

中心化子是环和代数上的一类重要映射,是研究环和代数的一种重要工具. Zalar[1] 证明了 2-无挠的半素环上 Jordan 中心化子是中心化子. Vukman[2] 中得到半素环 R 上的可加映射 L,若满足对任意的 $x\in R$ 有 $2L(x^2)=L(x)x+xL(x)$,则 L 是中心化子. 随后,Vukman[3] 定义了一种广义的中心化子,即若环 R 上的可加映射 L 满足对任意的 $x\in R$ 有 $(m+n)L(x^2)=mL(x)x+nxL(x)$(其中 m 和 n 是固定的整数且 $m+n\neq 0$),则称 L 为(m,n)-Jordan 中心化子,Vukman 证明了当 $m\geqslant 1$ 和 $n\geqslant 1$ 时,$6mn(m+n)$-无挠的素环上的(m,n)-Jordan 中心化子是中心化子. Li[4] 证明了若 L 是套代数 $\mathrm{Alg}(N)$ 上的 Lie 中心化子,则存在 $\lambda\in F$(F 为数域)以及到中心且在交换子上为零的映射 ξ,使得对任意的算子 $T\in\mathrm{Alg}(N)$,有 $L(T)=\lambda T+$

收稿日期:2018-03-16.
基金项目:国家自然科学基金项目(11471199)、陕西省自然科学基础研究计划资助项目(2014JQ1015).
通讯联系人:费秀海,博士,副教授,研究方向:算子代数与算子理论. E-mail:xiuhaifei@ snnu.edu.cn

$\xi(T)$. 其他相关结论参见[5-11]. 本文主要刻画了三角代数上的非线性(m,n)-Lie 中心化子. 在文中将用到一些关于三角代数的概念性质如下:

设 A 和 B 是交换环 R 上有单位的代数,M 是单位的忠实(A,B)-双边模,即 M 既是忠实左 A-模又是忠实右 B-模. 这里 M 是忠实左 A-模是指:如果对任意的 $a\in A$ 且 $aM=\{0\}$,有 $a=0$. 忠实右 B-模的定义类似. 称 R-代数

$$U=\mathrm{tri}(A,M,B)=\left\{\begin{pmatrix}a & m_1\\ 0 & b\end{pmatrix}: a\in A, m_1\in M, b\in B\right\}$$

在矩阵通常的加法与乘法运算下是一个三角代数. 用 $Z(U)$ 表示 U 的中心,$Z(A)$ 和 $Z(B)$ 表示 A 和 B 的中心. 由文献[12]有

$$Z(U)=\left\{\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}: am_1=m_1b,\ \forall\, m_1\in M\right\}$$

在 U 上定义两个自然投影 $\pi_A:U\to A$ 和 $\pi_B:U\to B$ 如下:

$$\pi_A:\begin{pmatrix}a & m_1\\ 0 & b\end{pmatrix}\to a \text{ 和 } \pi_B:\begin{pmatrix}a & m_1\\ 0 & b\end{pmatrix}\to b,$$

则 $\pi_A(Z(U))\subseteq Z(A)$ 和 $\pi_B(Z(U))\subseteq Z(B)$,且存在唯一的代数同构

$$\sigma:\pi_A(Z(U))\to\pi_B(Z(U))$$

使得对任意的 $m_1\in M$,有 $am_1=m_1\sigma(a)$.

设 1_A 和 1_B 分别是代数 A 和 B 中的单位元,1 是三角代数 U 中的单位元. 用 e_1 和 e_2 分别表示:

$$e_1=\begin{pmatrix}1_A & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \text{和 } e_2=1-e_1=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1_B\end{pmatrix},$$

则由于 e_1Ue_1, e_1Ue_2 和 e_2Ue_2 是 U 的子代数且分别同构于 A, M 和 B,从而三角代数 U 在同构意义下可以被分解成:

$$U=e_1Ue_1+e_1Ue_2+e_2Ue_2=A+M+B,$$

进而对任意的 $x\in U$,可以将 x 分解成 $x=a+m_1+b$,其中 $a\in A$, $m_1\in M$ 和 $b\in B$.

2　结果与证明

定理 1　设 m,n 是固定的整数且 $(m+n)(m-n)\neq 0$,U 是一个$|(m+n)(m-n)|$-无挠的三角代数且满足 $\pi_A(Z(U))=Z(A)$ 和 $\pi_B(Z(U))=Z(B)$. 若 L 是 U 上的一个非线性(m,n)-Lie 中心化子,则存在一个中心元 λ 和一个到 U 的中心且在交换子上为零的映射 ξ 使得对任意的 $x\in U$,有 $L(x)=\lambda x+\xi(x)$.

为证定理 1,我们需要以下几个引理.

引理 1　若 L 是 U 上的一个非线性(m,n)-Lie 中心化子,则

(i) $L(0)=0$;

(ii) $e_1L(e_1)e_1\in Z(A)$, $e_2L(e_1)e_2\in Z(B)$;

(iii) $e_1L(e_2)e_1\in Z(A)$, $e_2L(e_2)e_2\in Z(B)$;

(iv) $e_1L(e_1)e_2=e_1L(e_2)e_2=0$.

证明　(i) 由于 L 是 U 上的一个非线性(m,n)-Lie 中心化子,从而对任意的 $x,y\in U$,有

$$(m+n)L([x,y])=m[L(x),y]+n[x,L(y)],\tag{1}$$

在式(1)中取 $x=y=0$,则有 $(m+n)L(0)=m[L(0),0]+n[0,L(0)]=0$,因为 $m+n\neq 0$,从而 $L(0)=0$.

(ii) 对任意的 $a\in A$,在式(1)中取 $x=a$ 和 $y=e_1$,得

$$0=m[L(a),e_1]+n[a,L(e_1)]=m(L(a)e_1-L(a))+n(aL(e_1)-L(e_1)a),$$

这蕴含了对任意的 $a\in A$,有 $n(ae_1L(e_1)e_1-e_1L(e_1)e_1a)=0$. 类似地,在式(1)中取 $x=e_1$ 和 $y=a$,得 $m(ae_1L(e_1)e_1-e_1L(e_1)e_1a)=0$. 因而有

$$(m+n)(ae_1L(e_1)e_1-e_1L(e_1)e_1a)=0,$$

于是得 $ae_1L(e_1)e_1=e_1L(e_1)e_1a$,故 $e_1L(e_1)e_1\in Z(A)$. 同理可证 $e_2L(e_1)e_2\in Z(B)$和(iii).

(iv)在式(1)中取 $x=y=e_1$,则有

$$0=m[L(e_1),e_1]+n[e_1,L(e_1)]=m(L(e_1)e_1-e_1L(e_1))+n(e_1L(e_1)-L(e_1)e_1),$$

由此可得$(m-n)e_1L(e_1)e_2=0$. 由于 $m-n\neq 0$,从而 $e_1L(e_1)e_2=0$. 同理可证 $e_1L(e_2)e_2=0$. 证毕.

引理 2 若 L 是 U 上的一个非线性(m,n)-Lie 中心化子,则 $L(A)\subseteq A+B$,$L(B)\subseteq A+B$ 且 $L(M)\subseteq M$.

证明 对任意的 $x\in A\cup B$,由引理 1 得 $L(e_1)x-xL(e_1)=0$,从而由式(1)可得 $0=m[L(e_1),x]+n[e_1,L(x)]=ne_1L(x)e_2$. 类似地,由式(1)可得 $me_1L(x)e_2=0$,因此 $(m+n)e_1L(x)e_2=0$. 所以有 $L(A)\subseteq A+B$,$L(B)\subseteq A+B$.

对任意的 $m_1\in M$,由式(1)可得

$$(m+n)L(m_1)=m[L(e_1),m_1]+n[e_1,L(m_1)]=m(L(e_1)m_1-m_1L(e_1))+n(e_1L(m_1)-L(m_1)e_1),$$

这蕴含了$(m+n)e_1L(m_1)e_1=(m+n)e_2L(m_1)e_2=0$,从而

$$e_1L(m_1)e_1=e_2L(m_1)e_2=0,$$

所以有 $L(M)\subseteq M$. 证毕.

引理 3 若 L 是 U 上的一个非线性(m,n)-Lie 中心化子,则对任意的 $a\in A$ 和 $b\in B$,有 $e_2L(a)e_2\in Z(B)$和 $e_1L(b)e_1\in Z(A)$.

证明 对任意的 $a\in A$ 和 $b\in B$,由式(1)可得

$$0=m[L(a),b]+n[a,L(b)]=m(L(a)b-bL(a))+n(aL(b)-L(b)a),$$

这蕴含了

$$m(e_2L(a)e_2b-be_2L(a)e_2)=0 \text{ 和 } n(ae_1L(b)e_1-e_1L(b)e_1a)=0,$$

类似地,由式(1)可得

$$n(e_2L(a)e_2b-be_2L(a)e_2)=0 \text{ 和 } m(ae_1L(b)e_1-e_1L(b)e_1a)=0,$$

因而有

$$ae_1L(b)e_1=e_1L(b)e_1a,\ \forall a\in A \text{ 和 } be_2L(a)e_2=e_2L(a)e_2b,\ \forall b\in B,$$

于是有

$$e_2L(a)e_2\in Z(B) \text{ 和 } e_1L(b)e_1\in Z(A).$$

证毕.

注 1 对任意的 $a\in A$ 和 $b\in B$,分别定义映射 ξ_1 和 ξ_2 如下:

$$\xi_1(a)=e_2L(a)e_2 \text{和 } \xi_2(b)=e_1L(b)e_1,$$

则由引理 3 知,$\xi_1:A\to Z(B)$和 $\xi_2:B\to Z(A)$且对任意的 $a_1,a_2\in A$,

由式(1)有

$$(m+n)\xi_1([a_1,a_2])=(m+n)e_2L([a_1,a_2])e_2=e_2(m+n)L([a_1,a_2])e_2=$$
$$me_2[L(a_1),a_2]e_2+ne_2[a_1,L(a_2)]e_2=0,$$

故 $\xi_1([A,A])=0$. 同理可证 $\xi_2([B,B])=0$.

设 $\sigma:Z(A)\to Z(B)$是一个代数同构且对任意的 $m_1\in M$,$am_1=m_1\sigma(a)$. 对任意的 $x\in U$,定义映射 $\xi_3:U\to U$ 如下:

$$\xi_3(x)=\sigma^{-1}(\xi_1(e_1xe_1))+\xi_2(e_2xe_2)+\xi_1(e_1xe_1)+\sigma(\xi_2(e_2xe_2)),$$

容易验证 ξ_3 是一个从 U 到 $Z(U)$的映射且 $\xi_3([U,U])=0$. 对任意的 $x\in U$,定义映射 $D:U\to U$ 如下:

$$D(x)=L(x)-\xi_3(x),$$

则 D 也是 U 上的一个非线性(m,n)-Lie 中心化子.

引理 4 设 D 是注 1 中所定义的映射,则 $D(A)\subseteq A$,$D(B)\subseteq B$ 和 $D(M)\subseteq M$.

证明 对任意的 $a\in A$,由引理 2 及 D 的定义,有

$$D(a)=L(a)-\xi_3(a)=e_1L(a)e_1+e_2L(a)e_2-\xi_1(a)-\sigma^{-1}(\xi_1(a))=e_1L(a)e_1-\sigma^{-1}(\xi_1(a))\in A,$$

因此,$D(A)\subseteq A$. 类似地,可以证明 $D(B)\subseteq B$. 对任意的 $m_1\in M$,由于 $D(m_1)=L(m_1)-\xi_3(m_1)=L(m_1)\in M$,从而 $D(M)\subseteq M$. 证毕.

引理 5 设 D 是注 1 中所定义的映射,则存在一个中心元 λ 使得对任意的 $a_1\in A$,$m_1\in M$ 和 $b_1\in B$ 有 $D(m_1)=\lambda m_1$,$D(a_1)=\lambda a_1$ 和 $D(b_1)=\lambda b_1$.

证明　对任意的 $m_1\in M$,由式(1)及引理 4,一方面,

$$mD(m_1)+nm_1D(e_2)=(m+n)D(m_1)=mD(e_1)m_1+nD(m_1),\tag{2}$$

另一方面,

$$mm_1D(e_2)+nD(m_1)=-(m+n)D(-m_1)=mD(m_1)+nD(e_1)m_1.\tag{3}$$

由式(2)和(3),得 $(m+n)m_1D(e_2)=(m+n)D(e_1)m_1,\ \forall\, m_1\in M$,因而

$$D(e_1)m_1=m_1D(e_2),\ \forall\, m_1\in M,\tag{4}$$

进而由式(2)和(4),得

$$D(e_1)m_1=D(m_1)=m_1D(e_2),\ \forall\, m_1\in M,\tag{5}$$

且根据式(4)和引理 4,有 $D(e_1)+D(e_2)\in Z(U)$. 令 $\lambda=D(e_1)+D(e_2)$,

则由式(5)和引理 4 可得

$$\lambda m_1=D(e_1)m_1=m_1D(e_2)=D(m_1)=m_1\lambda,\ \forall\, m_1\in M,\tag{6}$$

因此,由引理 4,式(1)及(6),对任意的 $a_1\in A,m_1\in M$,有

$$(m+n)\lambda a_1m_1=(m+n)D(a_1m_1)=m[D(a_1),m_1]+n[a_1,D(m_1)]=mD(a_1)m_1+n\lambda a_1m_1,$$

因而有 $m\lambda a_1m_1=mD(a_1)m_1$,同理可得 $n\lambda a_1m_1=nD(a_1)m_1$. 从而有

$$(m+n)(\lambda a_1m_1-D(a_1)m_1)=0,\ \forall\, m_1\in M,$$

进而由 M 的忠实性及引理 4,得

$$D(a_1)=\lambda a_1,\ \forall\, a_1\in A.$$

类似地可证明 $D(b_1)=\lambda b_1,\ \forall\, b_1\in B$. 证毕.

引理 6　设 D 是注 1 中所定义的映射,则对任意的 $a_1\in A,m_1\in M$ 和 $b_1\in B$ 有

$$D(a_1+m_1+b_1)-D(a_1)-D(m_1)-D(b_1)\in Z(U).$$

证明　对任意的 $a_1\in A,m_1,m_2\in M$ 和 $b_1\in B$,由式(1)及引理 4,有

$$(m+n)D(a_1m_2-m_2b_1)=(m+n)D([a_1+m_1+b_1,m_2])=m[D(a_1+m_1+b_1),m_2]+n[a_1+m_1+b_1,D(m_2)]=$$
$$m[D(a_1+m_1+b_1),m_2]+na_1D(m_2)-nD(m_2)b_1,$$

从而有引理 4 和引理 5,得

$$m[D(a_1),m_2]+m[D(b_1),m_2]=m[D(a_1+m_1+b_1),m_2],$$

同理可得 $n[D(a_1),m_2]+n[D(b_1),m_2]=n[D(a_1+m_1+b_1),m_2]$,从而有

$$(m+n)[D(a_1+m_1+b_1)-D(a_1)-D(b_1),m_2]=0,\ \forall\, m_2\in M,$$

进而由 U 中心的定义及引理 4,得

$$e_1D(a_1+m_1+b_1)e_1-D(a_1)+e_2D(a_1+m_1+b_1)e_2-D(b_1)\in Z(U),\tag{7}$$

下证 $e_1D(a_1+m_1+b_1)e_2=D(m_1)$. 对任意的 $a_1\in A,m_1\in M$ 和 $b_1\in B$,由引理 4 和引理 5,得

$$(m+n)D(m_1)=(m+n)D([e_1,a_1+m_1+b_1])=m[D(e_1),a_1+m_1+b_1]+n[e_1,D(a_1+m_1+b_1)]=$$
$$mD(e_1)m_1+n[e_1,D(a_1+m_1+b_1)]=mD(m_1)+n[e_1,D(a_1+m_1+b_1)],$$

从而有 $nD(m_1)=n[e_1,D(a_1+m_1+b_1)]$. 同理可得

$$mD(m_1)=m[e_1,D(a_1+m_1+b_1)].$$

从而有

$$(m+n)D(m_1)=(m+n)[e_1,D(a_1+m_1+b_1)],$$

进而有

$$D(m_1)=e_1D(a_1+m_1+b_1)e_2,\tag{8}$$

从而由式(7)和(8),得

$$D(a_1+m_1+b_1)-D(a_1)-D(m_1)-D(b_1)\in Z(U).$$

证毕.

定理 1 的证明　对任意的 $x\in U$,由引理 6,定义映射 $\xi_4:U\to Z(U)$ 如下:

$$\xi_4(x)=D(x)-D(e_1xe_1)-D(e_1xe_2)-D(e_2xe_2),$$

则容易验证 ξ_4 在交换子上为零. 事实上,对任意的 $x\in U$,由 ξ_4 的定义及引理 4 可得 $e_1\xi_4(x)e_1=e_1D(x)e_1-D(e_1xe_1)\in Z(A)$,从而对任意的 $x,y\in U$,由式(1)及引理 4 可得

$$(m+n)e_1\xi_4(xy-yx)e_1=(m+n)(e_1D([x,y])e_1)-(m+n)D([e_1xe_1,e_1ye_1])=me_1[D(x),y]e_1+ne_1[x,D(y)]e_1-m[D(e_1xe_1),e_1ye_1]-n[e_1xe_1,D(e_1ye_1)]=m[e_1D(x)e_1,e_1ye_1]+n[e_1xe_1,e_1D(y)e_1]-m[D(e_1xe_1),e_1ye_1]-n[e_1xe_1,D(e_1ye_1)]=m[e_1\xi_4(x)e_1,e_1ye_1]+n[e_1xe_1,e_1\xi_4(y)e_1]=0,$$

因此,$e_1\xi_4(xy-yx)e_1=0$. 类似地,可证 $e_2\xi_4(xy-yx)e_2=0$,从而 $\xi_4(xy-yx)=0$.

再定义映射 $\Phi:U\to U$ 为:$\Phi(x)=D(x)-\xi_4(x)$, $\forall x\in U$. 则对任意的 $x\in U$,由 ξ_4 的定义及引理 5,有

$$\Phi(x)=D(x)-\xi_4(x)=D(e_1xe_1)+D(e_1xe_2)+D(e_2xe_2)=\lambda e_1xe_1+\lambda e_1xe_2+\lambda e_2xe_2=\lambda x,$$

因而由映射 D 和 Φ 的定义有,$L(x)=\lambda x+\xi(x)$, $\forall x\in U$. (其中 $\xi(x)=\xi_3(x)+\xi_4(x)$, $\forall x\in U$). 证毕.

由于套代数和上三角分块矩阵代数是两类特殊的三角代数,因此作为定理 1 的应用有以下两个结论.

设 k,p,q 是任意的 3 个正整数,且 $p\geqslant 2$, $q\leqslant p$, $\boldsymbol{M}_{p\times k}(R)$ 是有单位元的交换环 R 上所有 $p\times k$ 阶矩阵,则上三角分块矩阵代数 $\boldsymbol{T}_p^{\bar{k}}(R)$ 是 $\boldsymbol{M}_p(R)$ 的一个子代数且 $\boldsymbol{T}_p^{\bar{k}}(R)$ 中的矩阵有如下形式:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{M}_{k_1}(R) & \boldsymbol{M}_{k_1\times k_2}(R) & \cdots & \boldsymbol{M}_{k_1\times k_q}(R) \\ 0 & \boldsymbol{M}_{k_2}(R) & \cdots & \boldsymbol{M}_{k_2\times k_q}(R) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{M}_{k_q}(R) \end{pmatrix},$$

式中,$\bar{k}=(k_1,k_2,\cdots k_q)$, $k_1+k_2+\cdots k_i\cdots+k_q=p$, k_i, $i=1,2,\cdots q$ 是正整数.

设 H 是数域 F 上一个维数大于 1 的 Hilbert 空间. $B(H)$ 表示 H 上全体有界线性算子,N 表示 H 中一个包含 $B(H)$ 和 $\{0\}$ 的全序闭子空间链,若 N 在集合的交和闭线性张运算下封闭,则称 N 为套,把 $N=\{H,\{0\}\}$ 称为平凡套,套 N 相应的套代数记为 $\mathrm{Alg}(N)$,定义为:

$$\mathrm{Alg}(N)=\{T\in B(H):TX\subseteq X,\ \forall X\in N\}.$$

推论 1 设 m,n 是固定的整数且 $(m+n)(m-n)\neq 0$, $\boldsymbol{T}_p^{\bar{k}}(R)$ 是一个 $|(m+n)(m-n)|$-无挠的块上三角矩阵代数. 若 L 是 $\boldsymbol{T}_p^{\bar{k}}(R)$ 上的一个非线性(m,n)-Lie 中心化子,则存在 $\lambda\in R$ 以及一个在 $\boldsymbol{T}_p^{\bar{k}}(R)$ 的交换子上为零的映射 $\xi:\boldsymbol{T}_p^{\bar{k}}(R)\to R$ 使得对任意的矩阵 $\boldsymbol{Q}\in\boldsymbol{T}_p^{\bar{k}}(R)$,有 $L(\boldsymbol{A})=\lambda\boldsymbol{A}+\xi(\boldsymbol{A})\boldsymbol{E}_p$.
式中,$\boldsymbol{E}_p$ 是 $\boldsymbol{T}_p^{\bar{k}}(R)$ 中的单位矩阵.

推论 2 设 m,n 是固定的整数且 $(m+n)(m-n)\neq 0$, N 是无限维 Hilbert 空间 H 中的一个非平凡套, $\mathrm{Alg}(N)$ 是套 N 相应的套代数. 若 L 是 $\mathrm{Alg}(N)$ 上的一个非线性(m,n)-Lie 中心化子,则存在 $\lambda\in F$ 以及一个在 $\mathrm{Alg}(N)$ 的交换子上为零的映射 $\xi:\mathrm{Alg}(N)\to F$ 使得对任意的算子 $T\in\mathrm{Alg}(N)$,有 $L(T)=\lambda T+\xi(T)I$.
式中,I 是恒等算子.

[参考文献]

[1] ZALAR B. On centralizers of semiprime rings[J]. Comment Math Univ Carol,1991,32(4):609-614.
[2] VUKMAN J. An identity related to centralizers in semiprime rings[J]. Comment Math Univ Carol,1999,40(3):447-456.
[3] VUKMANA J. On(m,n)-Jordan centralizers in rings and algebras[J]. Glas Mat Ser III,2010,45(1):43-53.
[4] LI Q,LI P. Centralizers of completely distributive CSL algebras[J]. Chinese Ann Math Ser A,2011,32(3):375-384.
[5] BENKOVIC D,EREMITA D. Characterizing left centralizers by their action a polynomial[J]. Publ Math Debrecen,2004,64(3):1-9.
[6] VUKMANA J,KOSI-ULBL I. Centralizers on rings and algebras[J]. Bull Austral Math Soc,2005,71(2):225-234.
[7] VUKMAN J,FOSNER M. A characterization of two-sided centralizers on prime rings[J]. Taiwanese J Math,2007,11(5):1431-1441.
[8] KOSI-ULBL I,VUKMAN J. On centralizers of standard operator algebras and semisimple H-algebras[J]. Acta Math Hungar,2006,110(3):217-223.
[9] YANG C,ZHANG J. Generalized Jordan centralizers on nest algebras[J]. Acta Math Sinica(Chin Ser),2010,53(5):975-980.
[10] ZHU H,ZHANG X,CHEN J. Centralizers and their applications to generalized inverses[J]. Linear Algebra Appl,2014,458:291-300.
[11] LIU L. Characterization of centralizers on nest subalgebras of von Neumann algebras by local action[J]. Linear multilinear Algebra,2016,64(3):383-392.
[12] CHEUNG W S. Commuting maps of triangular algebras[J]. J London Math Soc,2001,63:117-127.

[责任编辑:陆炳新]