doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2019.01.008

Menger PM 空间中隐含 ϕ-压缩自映射的一致点若干结果

宋明亮

(江苏第二师范学院数学与信息技术学院,江苏 南京 210013)

[**摘要**]　本文利用 Γ-型实函数,在 Menger PM 空间中建立了一些满足隐含 ϕ-压缩自映射的一致点和重合不动点定理. 作为应用,我们得到了度量空间中一些满足隐含 ϕ-压缩自映射的一致点和重合不动点定理.

[**关键词**]　一致点,重合不动点,隐含 ϕ-压缩,Menger PM 空间

[**中图分类号**]O177.91　[**文献标志码**]A　[**文章编号**]1001-4616(2019)01-0045-06

Some Coincidence Point Results of Selfmappings Satisfying Implicit ϕ-Contractive Conditions on Menger PM Spaces

Song Mingliang

(School of Mathematics and Information Technology,Jiangsu Second Normal University,Nanjing 210013,China)

Abstract:By using Γ-type real functions,some coincidence point and common fixed point theorems of selfmappings satisfying implicit ϕ-contractive conditions on Menger PM spaces are obtained. As applications,we establish some coincidence point and common fixed point theorems of selfmappings satisfying implicit ϕ-contractive conditions on metric spaces.

Key words:coincidence point,common fixed point,implicit ϕ-contraction,Menger PM space

度量空间中两个映射的一致点及其应用首先被 Jungck 在文献[1-2]考虑,随后许多学者分别在度量空间中获得各种类型映射的一致点结论,关于各种一致点理论的讨论与应用我们可以参考文献[3-5]. 最近,一些学者在 Menger 概率度量空间(简记为 Menger PM 空间)上给出了重合点与一致点的存在性和唯一性的一些新的结果,作为例子我们可以参考文献[6-8].

众所周知,Menger PM 空间是度量空间的一个重要的推广. 本文的目的是在 Menger PM 空间中利用 Γ-型实函数研究 4 个满足隐含 ϕ-压缩自映射的一致点与重合不动点的存在性和唯一性问题,获得几个有用的结论.同时,我们给出度量空间中相应的结论,并且指出本文的结果改进和发展了文献[1-5]中度量空间中有关的结论.

1　预备知识

贯穿本文,设 $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$,$\mathbf{R}^+=[0,+\infty)$,$\mathbf{N}$ 是自然数集. 下面让我们回忆一些 Menger PM 空间的定义和结论.(有关术语参阅文献[8-10])

如果映射 $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^+$是非减的和左连续的,且 $\sup_{t\in\mathbf{R}}F(t)=1$,$\inf_{t\in\mathbf{R}}F(t)=0$,则称 F 是分布函数,其全体记为 Δ. 满足 $F(0)=0$ 的全体记为 Δ_0,Δ_0 中特殊元素 H 定义为 $H(t)=\begin{cases}0, & t\leqslant 0\\ 1, & t>0.\end{cases}$ 如果 $\Delta:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$满足:$\Delta(a,1)=a$;$\Delta(a,b)=\Delta(b,a)$;$a\geqslant b,c\geqslant d\Rightarrow\Delta(a,c)\geqslant\Delta(b,d)$;$\Delta(a,\Delta(b,c))=\Delta(\Delta(a,b),c)$. 则称 Δ 为一个 t-模.

收稿日期:2017-05-27.

基金项目:国家自然科学基金天元项目(11526099)、江苏省自然科学青年基金(BK20140767)、江苏省高校自然科学基金(16KJD110001).

通讯联系人:宋明亮,副教授,研究方向:非线性泛函分析. E-mail:mlsong2004@163.com

定义 1[9]　设(X,F,Δ)是一个 Menger PM 空间. 如果 X 是一个非空集,Δ 是一个 t-模,

$F:X\times X\to\Delta_0$ 满足如下条件(对 $x,y\in X$,我们记 $F(x,y)$ 为 $F_{x,y}$):

$(PM-1)\ F_{x,y}(t)=H(t),\quad \forall t\in\mathbf{R}$ 当且仅当 $x=y$;

$(PM-2)\ F_{x,y}(t)=F_{y,x}(t),\quad \forall t\in\mathbf{R},\quad \forall x、y\in X$;

$(PM-3)\ F_{x,y}(t+s)\geqslant\Delta(F_{z,x}(t),F_{y,z}(s)),\quad \forall t、s\in\mathbf{R}^+,\quad \forall x、y、z\in X.$

注 1　Schweizer B[9] 等指出如果 t-模满足 $\sup_{0<t<1}\Delta(t,t)=1$,则$(X,F,\Delta)$在$(\varepsilon,\lambda)$-拓扑下是一个 Hausdorff 拓扑空间. 同时指出,(X,F,Δ)中序列$\{x_n\}$如果满足:对任意的 $\varepsilon>0$ 及 $\lambda\in(0,1]$,存在 $N(\varepsilon,\lambda)\in\mathbf{N}$,当 $n、m>N$ 时,$F_{x_n,x_m}(\varepsilon)>1-\lambda$. 则它是一个 Cauchy 列. 如果$\lim\limits_{n\to\infty}F_{x_n,x}(t)=1,\forall t\in\mathbf{R}^+$,则称$\{x_n\}$收敛于 x. 如果(X,F,Δ)是完备的,则(X,F,Δ)中每一个 Cauchy 列都收敛.

引理 1[9-10]　设(X,d)是一个度量空间. 定义 $F:X\times X\to\Delta_0$ 如下

$$F(x,y)(t)=F_{x,y}(t)=H(t-d(x,y)),\quad \forall x、y\in X,\forall t>0. \tag{1}$$

则$(X,F,\min)$是一个被(X,d)诱导的 Menger PM 空间,如果(X,d)完备,可知$(X,F,\min)$也完备.

引理 2[8]　设(X,F,Δ)是 Menger PM 空间. 对任一 $\lambda\in(0,1]$,定义 $d_\lambda:X\times X\to\mathbf{R}^+$ 为

$$d_\lambda(x,y)=\inf\{t>0:F_{x,y}(t)>1-\lambda\},\quad x、y\in X. \tag{2}$$

则有

(1) $d_\lambda(x,y)<t\Leftrightarrow F_{x,y}(t)>1-\lambda$;

(2) 如果 $\Delta=\min$,则对每个 $\lambda\in(0,1]$有 $d_\lambda(x,y)\leqslant d_\lambda(x,z)+d_\lambda(z,y),\quad \forall x、y、z\in X.$

注 2　注意到引理 2 的(2),不难得到对每个 $\lambda\in(0,1]$,$d_\lambda(\cdot)$是连续的.

定义 2[1,2]　设 $f、g$ 是 X 中两个自映射. 如果对一些 $x\in X$ 有 $w=fx=gx$. 则称 x 是 $f、g$ 的一个一致点,w 是 $f、g$ 在一致处的点.

定义 3[1,2]　如果 Menger PM 空间(X,F,Δ)中的两个自映射 $f、g$ 在它的一致点处是可交换的,则称 $f、g$ 为弱相容的,意味着如果 $fx=gx$,则 $gfx=fgx$.

定义 4　设 $\phi:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$是不减函数,$\phi^n(t)$是 $\phi(t)$的 n 次迭代,且满足 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\phi^n(t)$收敛. 记它的全体为 $\varPhi$. 另外,设函数 $\varphi:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$满足不减,$\varphi(0)=0$,存在 $M>0$,对任意的 $t\geqslant0$,有 $\varphi(t)\leqslant Mt$.记它的全体为 $\varPhi_0$.

注 3　由文献[7]可知,如果 $\phi\in\varPhi$,则 $\phi(t)<t(t>0)$,且 $\phi(0)=0$. 即 $\varPhi\subset\varPhi_0$.

定义 5　设一个上半连续函数 $G:\mathbf{R}_5^+\to\mathbf{R}^+$满足如下条件:

(1) G 关于第四和第五变元不减;

(2) 存在 $\varphi_1、\varphi_2\in\varPhi_0$,且 $\phi=\varphi_2\circ\varphi_1\in\varPhi$,对任意的 $u、v\geqslant0$,当 $u\leqslant G(v,u,v,v+u,0)$时,有 $u\leqslant\varphi_1(v)$;当 $u\leqslant G(v,v,u,0,v+u)$时,有 $u\leqslant\varphi_2(v)$;

(3) 对于 $u\geqslant0$,当 $u\leqslant G(u,0,0,u,u)$时,有 $u=0$.

则称函数 G 是满足隐含 ϕ-压缩条件的,其全体记为 $\varGamma$.

下面我们给出一些例子说明定义 5 的有效性.

例 1　设 $\phi\in\varPhi$. 定义 $G:\mathbf{R}_5^+\to\mathbf{R}^+$如 $G(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)=\phi(t_1)$. 注意到 $\varPhi\subset\varPhi_0$,不难证得 $G\in\varGamma$.

例 2　设 $a\in(0,1/25)$. 定义 $G:\mathbf{R}_5^+\to\mathbf{R}^+$如

$$G(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)=\sqrt[3]{a(t_1^3+t_2^3+t_3^3+t_4^3+t_5^3)}.$$

如果 $u\leqslant G(v,u,v,v+u,0)$,则 $u^3\leqslant a(v^3+u^3+v^3+(v+u)^3)$. 于是有

$$(1-a)u^3\leqslant 2av^3+a(v+u)^3\leqslant 3a(v+u)^3\Rightarrow u\leqslant\frac{\sqrt[3]{3a/(1-a)}}{1-\sqrt[3]{3a/(1-a)}}v.$$

类似地,如果 $u\leqslant G(v,v,u,0,v+u)$,也有上式成立. 设 $A=\dfrac{\sqrt[3]{3a/(1-a)}}{1-\sqrt[3]{3a/(1-a)}}$,注意到 $A\in(0,1)$,于是有 $\varphi_1(t)=At=\varphi_2(t)\in\varPhi\subset\varPhi_0$. 不难证得 $G\in\varGamma$.

例 3　定义 $G:\mathbf{R}_5^+\to\mathbf{R}^+$如

$$G(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)=\frac{t_1+1}{20t_1+21}t_1+\frac{2t_1+1}{5t_1+6}t_2+\frac{t_1+1}{20t_1+21}t_3+\frac{t_1+1}{40t_1+42}t_4+\frac{t_1+1}{2t_1+3}t_5.$$

如果 $u\leqslant G(v,u,v,v+u,0)$,则 $u\leqslant\frac{v+1}{20v+21}v+\frac{2v+1}{5v+6}u+\frac{v+1}{20v+21}v+\frac{v+1}{40v+42}(v+u)$. 于是有

$$u\leqslant\frac{1}{20}v+\frac{2}{5}u+\frac{1}{20}v+\frac{1}{40}(v+u)\Rightarrow u\leqslant\frac{5}{23}v.$$

类似地,如果 $u\leqslant G(v,v,u,0,v+u)$,我们有 $u\leqslant\frac{19}{9}v$. 设 $\varphi_1(t)=\frac{5}{23}t$, $\varphi_2(t)=\frac{19}{9}t$,注意到$\frac{19}{9}\cdot\frac{5}{23}<1$,我们有 φ_1、$\varphi_2(t)\in\Phi_0$,$\varphi_2\circ\varphi_1\in\Phi$. 不难证得 $G\in\Gamma$.

注 4 在定义 5 中,如果取 $\varphi_1(t)=At$,$\varphi_2(t)=Bt$,且 $0<AB<1$,G 是连续的,则上述隐含关系函数就是文献[11]中的隐含关系函数. 注意到例 1 中取 $\phi(t)=\frac{t}{t+2}$,满足我们的定义 5,但是显然不满足文献[11]中的隐含关系函数. 故我们改进和推广了文献[11]中的隐含关系函数.

2 主要结果

定理 1 设$(X,F,\min)$是 Menger PM 空间,f、g、S、T:$X\to X$ 4 个自映射满足如下条件:

(a)$f(X)\subseteq T(X)$,$g(X)\subset S(X)$以及$f(X)$、$g(X)$、$S(X)$、$T(X)$中至少有一个是 X 的完备子集;

(b)对任意的 x、$y\in X$,存在 $G\in\Gamma$,对任意的 u、v、w、s、$t\geqslant 0$ 有

$$F_{fx,gy}(G(u,v,w,s,t))\geqslant\min\{F_{Sx,Ty}(u),F_{fx,Sx}(v),F_{gy,Ty}(w),F_{fx,Ty}(s),F_{Sx,gy}(t)\}.\tag{3}$$

则$\{f,S\}$和$\{g,T\}$在 X 中有唯一的一致的点. 进一步地,如果$\{f,S\}$和$\{g,T\}$是弱相容的,则 f、g、S、T 有唯一的重合不动点.

证明 首先,我们证明对任意的 x、$y\in X$ 及 $\lambda\in(0,1]$,有

$$d_\lambda(fx,gy)\leqslant G(d_\lambda(Sx,Ty),d_\lambda(fx,Sx),d_\lambda(gy,Ty),d_\lambda(fx,Ty),d_\lambda(Sx,gy)).\tag{4}$$

事实上,设 $d_\lambda(Sx,Ty)=u$,$d_\lambda(fx,Sx)=v$,$d_\lambda(gy,Ty)=w$,$d_\lambda(fx,Ty)=s$,$d_\lambda(Sx,gy)=t$. 据引理 2 的结论(1)可知,对任意的 $\varepsilon>0$,有 $F_{Sx,Ty}(u+\varepsilon)>1-\lambda$,$F_{fx,Sx}(v+\varepsilon)>1-\lambda$,

$$F_{gy,Ty}(w+\varepsilon)>1-\lambda,F_{fx,Ty}(s+\varepsilon)>1-\lambda,F_{Sx,gy}(t+\varepsilon)>1-\lambda.$$

从(3)可得

$$F_{fx,gy}(G(u+\varepsilon,v+\varepsilon,w+\varepsilon,s+\varepsilon,t+\varepsilon))>1-\lambda.$$

再据引理 2 的结论(1),不难得到 $d_\lambda(fx,gy)<G(u+\varepsilon,v+\varepsilon,w+\varepsilon,s+\varepsilon,t+\varepsilon)$. 注意到 $G\in\Gamma$ 以及 G 的上半连续性不难得到式(4).

任取 $x_0\in X$. 由 $f(X)\subseteq T(X)$,$g(X)\subset S(X)$,我们知道存在 x_1、$x_2\in X$ 使得

$$fx_0=Tx_1,gx_1=Sx_2.$$

据归纳法我们能够得到 X 中的两个序列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$满足

$$\begin{aligned}&y_{2n+1}=fx_{2n}=Tx_{2n+1},\\&y_{2n+2}=gx_{2n+1}=Sx_{2n+2}.\end{aligned}\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

对于 $n=0,1,2.\cdots$,由式(4)及引理 2 的结论(2)能够得到,对任意的 $\lambda\in(0,1]$有

$$\begin{aligned}d_\lambda(y_{2n+1},y_{2n+2})=d_\lambda(fx_{2n},gx_{2n+1})\leqslant G(&d_\lambda(Sx_{2n},Tx_{2n+1}),d_\lambda(fx_{2n},Sx_{2n}),d_\lambda(gx_{2n+1},Tx_{2n+1}),d_\lambda(fx_{2n},Tx_{2n+1}),\\d_\lambda(Sx_{2n},gx_{2n+1}))=G(&d_\lambda(y_{2n},y_{2n+1}),d_\lambda(y_{2n+1},y_{2n}),d_\lambda(y_{2n+2},y_{2n+1}),d_\lambda(y_{2n+1},y_{2n+1}),d_\lambda(y_{2n},y_{2n+2}))\leqslant\\G(&d_\lambda(y_{2n},y_{2n+1}),d_\lambda(y_{2n+1},y_{2n}),d_\lambda(y_{2n+2},y_{2n+1}),0,d_\lambda(y_{2n},y_{2n+1})+d_\lambda(y_{2n+1},y_{2n+2})).\end{aligned}$$

这意味着

$$d_\lambda(y_{2n+1},y_{2n+2})\leqslant\varphi_2(d_\lambda(y_{2n+1},y_{2n})).\tag{5}$$

类似地,我们不难说明,对任意的 $\lambda\in(0,1]$有

$$\begin{aligned}d_\lambda(y_{2n+1},y_{2n})=d_\lambda(fx_{2n},gx_{2n-1})\leqslant G(&d_\lambda(Sx_{2n},Tx_{2n-1}),d_\lambda(fx_{2n},Sx_{2n}),d_\lambda(gx_{2n-1},Tx_{2n-1}),d_\lambda(fx_{2n},Tx_{2n-1}),\\d_\lambda(Sx_{2n},gx_{2n-1}))=G(&d_\lambda(y_{2n},y_{2n-1}),d_\lambda(y_{2n+1},y_{2n}),d_\lambda(y_{2n},y_{2n-1}),d_\lambda(y_{2n+1},y_{2n-1}),d_\lambda(y_{2n},y_{2n}))\leqslant\\G(&d_\lambda(y_{2n},y_{2n-1}),d_\lambda(y_{2n+1},y_{2n}),d_\lambda(y_{2n},y_{2n-1}),d_\lambda(y_{2n+1},y_{2n})+d_\lambda(y_{2n},y_{2n-1}),0).\end{aligned}$$

这意味着

$$d_\lambda(y_{2n},y_{2n+1})\leqslant\varphi_1(d_\lambda(y_{2n-1},y_{2n})).\tag{6}$$

现在对 $n=1,2\cdots$,据式(5)和(6),注意到 φ_1、φ_2 的不减性,对任意的 $\lambda\in(0,1]$有

$$d_\lambda(y_{2n+1},y_{2n+2})\leqslant\varphi_2(d_\lambda(y_{2n+1},y_{2n}))\leqslant\varphi_2(\varphi_1(d_\lambda(y_{2n-1},y_{2n})))\leqslant\cdots\leqslant\phi^n(d_\lambda(y_1,y_2)),\tag{7}$$

及

$$d_\lambda(y_{2n+2},y_{2n+3})\leqslant\varphi_1(d_\lambda(y_{2n+1},y_{2n+2}))\leqslant\cdots\leqslant\varphi_1(\phi^n(d_\lambda(y_1,y_2))).\tag{8}$$

接下来,我们证明$\{y_n\}$是 X 中的 Cauchy 列. 对于 $n<k$,据式(6)和(8),以及定义 4 可知,对任意的 $\lambda\in(0,1]$有

$$\begin{aligned}d_\lambda(y_{2n+1},y_{2k+1})\leqslant{}&d_\lambda(y_{2n+1},y_{2n+2})+d_\lambda(y_{2n+2},y_{2n+3})+\cdots+d_\lambda(y_{2k},y_{2k+1})\leqslant\phi^n(d_\lambda(y_1,y_2))+\varphi_1(\phi^n(d_\lambda(y_1,y_2)))+\\&\phi^{n+1}(d_\lambda(y_1,y_2))+\varphi_1(\phi^{n+1}(d_\lambda(y_1,y_2)))+\cdots\phi^{k-1}(d_\lambda(y_1,y_2))+\varphi_1(\phi^{k-1}(d_\lambda(y_1,y_2)))\leqslant\\&\sum_{i=n}^{k-1}\phi^i(d_\lambda(y_1,y_2))+M\Big(\sum_{i=n}^{k-1}\phi^i(d_\lambda(y_1,y_2))\Big)\leqslant(1+M)\Big(\sum_{i=n}^{\infty}\phi^i(d_\lambda(y_1,y_2))\Big),\end{aligned}$$

这里 $M>0$ 是已知的实数. 类似地,可以得到

$$d_\lambda(y_{2n},y_{2k+1})\leqslant(1+M)\Big(\sum_{i=n-1}^{\infty}\phi^i(d_\lambda(y_1,y_2))\Big),$$

$$d_\lambda(y_{2n},y_{2k})\leqslant(1+M)\Big(\sum_{i=n-1}^{\infty}\phi^i(d_\lambda(y_1,y_2))\Big),$$

$$d_\lambda(y_{2n+1},y_{2k})\leqslant(1+M)\Big(\sum_{i=n-1}^{\infty}\phi^i(d_\lambda(y_1,y_2))\Big).$$

于是,对任意的自然数 $p>m>0$,存在 $n\in\mathbf{N}$,满足$\frac{m-1}{2}\leqslant n\leqslant\frac{m}{2}$,使得

$$d_\lambda(y_m,y_p)\leqslant(1+M)\Big(\sum_{i=n-1}^{\infty}\phi^i(d_\lambda(y_1,y_2))\Big).\tag{9}$$

注意到 $\phi\in\Phi$,我们知道,对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $N\in\mathbf{N}$,当 $n\geqslant N$ 时有$(1+M)\Big(\sum_{i=n-1}^{\infty}\phi^i(d_\lambda(y_1,y_2))\Big)<\varepsilon$,即 $d_\lambda(y_m,y_p)<\varepsilon$. 又据注 1 可知,对任意的 $\varepsilon>0,\lambda\in(0,1]$,存在 $N\in\mathbf{N}$,当 $n\geqslant N$ 时有 $F_{y_m,y_p}(\varepsilon)>1-\lambda$,意味着$\{y_n\}$是 X 中的 Cauchy 列.

假设 $T(X)$是完备的,则有 $y_{2n+1}=fx_{2n}=Tx_{2n+1}\to u\in T(X)(n\to\infty)$,且存在 $v\in X$,使得 $Tv=u$.(如果$f(X)$是完备的,则存在 $u\in f(X)\subset T(X)$,于是有同样的结论).

下面我们说明 $gv=u$. 对 $n=0,1,2,\cdots$,应用(4)及引理 2 的结论(2),由定义 5 条件(1),对任意的 $\lambda\in(0,1]$有

$$\begin{aligned}d_\lambda(u,gv)\leqslant{}&d_\lambda(fx_{2n},gv)+d_\lambda(u,fx_{2n})\leqslant G(d_\lambda(Sx_{2n},Tv),d_\lambda(fx_{2n},Sx_{2n}),d_\lambda(gv,Tv),d_\lambda(fx_{2n},Tv),d_\lambda(Sx_{2n},gv))+\\&d_\lambda(u,fx_{2n})=G(d_\lambda(y_{2n},u),d_\lambda(y_{2n+1},y_{2n}),d_\lambda(gv,u),d_\lambda(y_{2n+1},u),d_\lambda(y_{2n},gv))+d_\lambda(u,fx_{2n}).\end{aligned}$$

注意到 G 的上半连续性及 d_λ 的连续性,令 $n\to\infty$,可得

$$d_\lambda(u,gv)\leqslant F(0,0,d_\lambda(gv,u),0,d_\lambda(u,gv)).$$

再据定义 5 条件(2)及定义 4,我们有对任意的 $\lambda\in(0,1]$,$d_\lambda(u,gv)\leqslant\varphi_2(0)=0$ 成立,意味着 $gv=u$.

由于 $u=gv\in g(X)\subset S(X)$,所以存在 $w\in X$,使得 $Sw=u$.应用(4)及引理 2 的结论(2),由定义 5 条件(1),对任意的 $\lambda\in(0,1]$有

$$\begin{aligned}d_\lambda(fw,Sw)=d_\lambda(fw,u)=d_\lambda(fw,gv)\leqslant G(&d_\lambda(Sw,Tv),d_\lambda(fw,Sw),d_\lambda(gv,Tv),d_\lambda(fw,Tv),\\&d_\lambda(Sw,gv))=G(0,d_\lambda(fw,Sw),0,d_\lambda(fw,Sw),0),\end{aligned}$$

意味着 $d_\lambda(fw,Sw)\leqslant\varphi_1(0)=0(\forall\lambda\in(0,1])\Rightarrow fw=Sw$. 因此,$fw=Sw=gv=Tv=u$.

另一方面,如果我们假设 $S(X)$是完备的,则有 $y_{2n+2}=gx_{2n+1}=Sx_{2n+2}\to u\in S(X)(n\to\infty)$,且存在 $v\in X$,使得 $Sv=u$.(如果 $g(X)$是完备的,则存在 $u\in g(X)\subset S(X)$,于是有同样的结论). 下面我们说明 $fv=u$. 对 $n=0,1,2,\cdots$,应用(4)及引理 2 的结论(2),由定义 5 条件(1),对任意的 $\lambda\in(0,1]$有

$$d_\lambda(u,fv)\leqslant d_\lambda(fv,gx_{2n+1})+d_\lambda(u,gx_{2n+1})\leqslant G(d_\lambda(Sv,Tx_{2n+1}),d_\lambda(fv,Sv),d_\lambda(gx_{2n+1},Tx_{2n+1}),$$

$$d_\lambda(fv,Tx_{2n+1}),d_\lambda(Sv,gx_{2n+1}))+d_\lambda(u,gx_{2n+1})=G(d_\lambda(u,y_{2n+1}),d_\lambda(fv,u),d_\lambda(y_{2n+2},y_{2n+1}),d_\lambda(fv,y_{2n+1}),d_\lambda(u,y_{2n+2}))+d_\lambda(u,y_{2n+2}).$$

注意到 G 的上半连续性及 d_λ 的连续性,令 $n\to\infty$,可得

$$d_\lambda(u,fv)\leqslant F(0,d_\lambda(u,fv),0,d_\lambda(u,fv),0).$$

再据定义 5 条件(2)及定义 4,我们有对任意的 $\lambda\in(0,1]$,$d_\lambda(u,fv)\leqslant\varphi_1(0)=0$,意味着 $fv=u$. 由于 $u=fv\in f(X)\subset T(X)$,故存在 $w\in X$,使得 $Tw=u$. 类似于上述证明,不难证得 $fv=Sv=gw=Tw=u$.

接下来,我们说明 $\{f,S\}$ 与 $\{g,T\}$ 的一致的点唯一. 为此,假设存在另一个点 $u^*\in X$,使得 $fv^*=Sv^*=gw^*=Tw^*=u^*$. 据式(4),对任意的 $\lambda\in(0,1]$有

$$d_\lambda(u,u^*)=d_\lambda(fv,gw^*)\leqslant G(d_\lambda(Sv,Tw^*),d_\lambda(fv,Sv),d_\lambda(gw^*,Tw^*),d_\lambda(fv,Tw^*),d_\lambda(Sv,gw^*)=G(d_\lambda(u,u^*),0,0,d_\lambda(u,u^*),d_\lambda(u,u^*)).$$

注意到定义 5 的条件(3)可知,$d_\lambda(u,u^*)=0(\forall\lambda\in(0,1])$,意味着 $u=u^*$,唯一性得证.

进一步,如果$\{f,S\}$和$\{g,T\}$是弱相容的,据 $fv=Sv=gw=Tw=u$,我们有

$$Sfv=fSv=fu=Su,Tgw=gTw=gu=Tu.$$

据式(4)可知,对任意的 $\lambda\in(0,1]$有

$$d_\lambda(fu,u)=d_\lambda(ffv,fv)=d_\lambda(ffv,gw)\leqslant G(d_\lambda(Sfv,Tw),d_\lambda(ffv,Sfv),d_\lambda(gw,Tw),d_\lambda(fv,Tw),d_\lambda(Sfv,gw))=G(d_\lambda(fu,u),d_\lambda(fu,fu),d_\lambda(u,u),d_\lambda(fu,u),d_\lambda(fu,u))=G(d_\lambda(fu,u),0,0,d_\lambda(fu,u),d_\lambda(fu,u)).$$

注意到定义 5 的条件(3)可知,$d_\lambda(fu,u)=0(\forall\lambda\in(0,1])$,意味着 $fu=u=Su$. 类似地可以证明 $gu=Tu=u$,即 $gu=Tu=fu=Su=u$.这些说明 u 是 f、g、S、T 的重合不动点. 再注意到$\{f,S\}$与$\{g,T\}$的一致的点的唯一性,显然,f、g、S、T 的重合不动点唯一.

推论 1 设$(X,F,\min)$是 Menger PM 空间,f、g、T:$X\to X$ 3 个自映射满足如下条件:

(a)$f(X)\subseteq T(X)$以及$f(X)$,$g(X)$,$T(X)$中至少有一个是 X 的完备子集;

(b)对任意的 $x,y\in X$,存在 $G\in\Gamma$,对任意的 u、v、w、s、$t\geqslant0$ 有

$$F_{fx,gy}(G(u,v,w,s,t))\geqslant\min\{F_{x,Ty}(u),F_{fx,x}(v),F_{gy,Ty}(w),F_{fx,Ty}(s),F_{x,gy}(t)\}.\tag{10}$$

则$\{g,T\}$在 X 中有唯一的一致的点. 进一步地,如果$\{g,T\}$是弱相容的,则f,g,T 有唯一的重合不动点.

证明 在定理 1 中令 $S=I$,这里 I 是恒等映射. 显然,推论 1 满足定理 1 的全部条件,故结论成立.

推论 2 设$(X,F,\min)$是 Menger PM 空间,f、g:$X\to X$ 两个自映射满足如下条件:

(a)$f(X)$、$g(X)$中至少有一个是 X 的完备子集;

(b)对任意的 x、$y\in X$,存在 $G\in\Gamma$,对任意的 u、v、w、s、$t\geqslant0$ 有

$$F_{fx,gy}(G(u,v,w,s,t))\geqslant\min\{F_{x,y}(u),F_{fx,x}(v),F_{gy,y}(w),F_{fx,y}(s),F_{x,gy}(t)\}.\tag{11}$$

则 f、g 有唯一的重合不动点.

证明 在定理 1 中令 $S=I$,$T=I$,这里 I 是恒等映射. 显然,推论 2 满足定理 1 的全部条件,故结论成立.

接下来我们建立度量空间中相应的一致点与不动点定理.

定理 2 设(X,d)是度量空间,f、g、S、T:$X\to X$ 4 个自映射满足如下条件:

(a)$f(X)\subseteq T(X)$,$g(X)\subset S(X)$以及$f(X)$,$g(X)$、$S(X)$、$T(X)$中至少有一个是 X 的完备子集;

(b)对任意的 x、$y\in X$,存在 $G\in\Gamma$,有

$$d(fx,gy)\leqslant G(d(Sx,Ty),d(fx,Sx),d(gy,Ty),d(fx,Ty),d(Sx,gy)).\tag{12}$$

则定理 1 的结论成立.

证明 据引理 1 可知,$(X,F,\min)$是一个被(X,d)诱导的 Menger PM 空间. 此时,对任意的 $\lambda\in(0,1]$,有 $d_\lambda(x,y)=d(x,y)$. 这些说明(12)等价于(4),于是据定理 1 立证本定理成立.

类似于推论 1,推论 2 立即得到如下推论

推论 3 设(X,d)是度量空间,f、g、T:$X\to X$ 3 个自映射满足如下条件:

(a)$f(X)\subseteq T(X)$以及$f(X)$、$g(X)$、$T(X)$中至少有一个是 X 的完备子集;

(b)对任意的 x、$y\in X$,存在 $G\in\Gamma$,有

$$d(fx,gy)\leqslant G(d(x,Ty),d(fx,x),d(gy,Ty),d(fx,Ty),d(x,gy)).\tag{13}$$

则推论 1 的结论成立.

推论 4　设(X,d)是度量空间,f、g:$X\to X$ 两个自映射满足如下条件:

(a)$f(X)$、$g(X)$中至少有一个是 X 的完备子集;

(b)对任意的 x、$y\in X$,存在 $G\in\Gamma$,有

$$d(fx,gy)\leqslant G(d(x,y),d(fx,x),d(gy,y),d(fx,y),d(x,gy)). \tag{14}$$

则f、g 有唯一的重合不动点.

推论 5　设(X,d)是度量空间,f、g、S、T:$X\to X$ 4 个自映射满足如下条件:

(a)$f(X)\subseteq T(X)$,$g(X)\subset S(X)$以及$f(X)$,$g(X)$,$S(X)$,$T(X)$中至少有一个是 X 的完备子集;

(b)对任意的 x、$y\in X$,有

$$d(fx,gy)\leqslant ad(Sx,Ty)+bd(fx,Sx)+cd(gy,Ty)+sd(fx,Ty)+td(Sx,gy). \tag{15}$$

这里 a、b、c、s、$t\geqslant 0$,$\delta>0$,$a+b+c+s+t=1+\delta$,且 $a+s+t<1$,$b+s<1$,$c+t<1$,$(b-c)(t-s)>2\delta$. 则定理 2 的结论成立.

证明　令 $G(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)=at_1+bt_2+ct_3+st_4+tt_5$,我们只需要证明 $G\in\Gamma$ 即可. 定义 5 的条件(1)和(3)显然成立. 只需验证条件(2). 如果 $u\leqslant av+bu+cv+s(v+u)$以及 $u\leqslant av+bv+cu+t(v+u)$,则有 $u\leqslant\frac{a+c+s}{1-b-s}v=\varphi_1(v)$,$u\leqslant\frac{a+b+t}{1-c-t}v=\varphi_2(v)$. 注意到 $a<1$,$(b-c)(t-s)>2\delta$,我们有 $a(1+\delta)+ct+bs<a+\delta+ct+bs<a-\delta+cs+bt$. 据 $a+b+c+s+t=1+\delta$,能够得到

$$a(a+b+c+s+t)+ct+bs+bc+st<1-b-c-s-t+cs+bt+bc+st,$$

意味着 $0<\frac{a+c+s}{1-b-s}\cdot\frac{a+b+t}{1-c-t}<1$,即 $\varphi_2\circ\varphi_1\in\Phi_0$. 再据定理 2 可得结论成立.

注 5　推论 5 中的数字是有的,例如 $a=\frac{1}{20}$,$b=\frac{2}{5}$,$c=\frac{1}{20}$,$s=\frac{1}{40}$,$t=\frac{1}{2}$,$\delta=\frac{1}{40}$. 这些说明压缩系数的和可以大于 1. 注意到文献[1-5]中的压缩系数的和都小于 1,且适当地取隐含函数 G,可以利用本文的定理和推论证明文献[1-5]中相应的结论,因此,本文的结论改进和发展了[1-5]中的结论

[参考文献]

[1] JUNGCK G. Common fixed points for noncontinuous nonself maps on non-metric spaces[J]. Far East J Math Sci,1996,4:199-215.

[2] JUNGCK G,RHOADES B E. Fixed point for set valued functions without continuity[J]. Indian J Pure Appl Math,1998,29(3):227-238.

[3] JUNGCK G. Common fixed points for commuting and compatible maps on compacta[J]. Proc Amer Math Soc,1988,103:977-983.

[4] BEG I,ABBAS M. Coincidence point and invariant approximation for mappings satisfying generalized weak contractive condition[J]. Fixed point theory Appl,2006:1-7,Article ID 74503.

[5] PANT R P. Common fixed points of noncommuting mappings[J]. J Math Anal Appl,1994,188:436-440.

[6] BINAYAK S,CHOUDHURY D KRISHNAPADA. A coincidence point result in Menger spaces using a control function[J]. Chaos,solitons & fractals,2009,42(5):3058-3063.

[7] FANG J X. Common fixed point theorems of compatible and weakly compatible maps in Menger spaces[J]. Nonlinear Anal TMA,2009,71:1833-1843.

[8] FANG J X. Fixed point theorems of local contraction mappings on menger spaces[J]. Appl Math Mech,1991,12:363-372.

[9] SCHWEIZER B,SKLAR A. Probabilistic Metric spaces[M]. Yew York:Elsevier North-Holland,1983.

[10] HADZIC O,PAP E. Fixed point theory in probabilistic Metric spaces[M]. Dordrecht:Kluwer Academic Publishers,2001.

[11] NASHINE H K,ABBAS M. Common fixed point of mappings satisfying implicit contractive conditions in TVS-valued ordered cone metric spaces[J]. J Nonlinear Sci Appl,2013,6(3):205-215.

[责任编辑:陆炳新]