doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2019.02.008

基于极大似然的马尔可夫链初始状态估计的数学规划

楼振凯[1],侯福均[1],楼旭明[2]

(1.北京理工大学管理与经济学院,北京 100081)
(2.西安邮电大学经济与管理学院,陕西 西安 710121)

[摘要] 参数估计是马尔可夫模型中的常见问题. 基于初始状态的重要性,本文对初始状态未知的马尔可夫链模型的初始状态进行估计,并根据状态可见与否将模型分成一般马尔可夫模型和隐马尔可夫模型. 考虑观测状态或观测符号的数量,基于极大似然原理分别建立了线性规划和非线性规划模型,并证明各阶段状态的概率满足规范性. 对于线性规划模型,指出其可以用单纯形法求解,并给出了解的表达. 对于非线性模型,指出其最优解的存在性,并利用库恩-塔克条件(K-T 条件)将模型转化成方程组的形式. 算例分析中,在基于库恩-塔克条件的方程组不易求解的情形下,运用 lingo 得到了满足模型的解.

[关键词] 初始状态估计,极大似然,数学规划模型,K-T 条件

[中图分类号] O221 **[文献标志码]** A **[文章编号]** 1001-4616(2019)02-0050-07

Mathematical Programming Models for Estimating the Initial States of Markov Chains by Maximum Likelihood

Lou Zhenkai[1], Hou Fujun[1], Lou Xuming[2]

(1. School of Management and Economics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)
(2.School of Economics and Management, Xi'an University of Posts and Telecommunications, Xi'an 710121, China)

Abstract: Parameters estimationis a common issue in Markov models. Owing to the importance of the initial state, in this paper we estimate the initial state for Markov chain models which the initial state is unknown. According to whether the states are visible, we divide the models into general Markov models and hidden Markov models. We build linear programming models and non-linear programming models by maximum likelihood with considering the amount of states or observation symbols, and prove that the probabilities of state at each stage meet the normalization of probability. For linear programming models, we point out that they can be solved by the simplex method, and show the expression of solution. For non-linear programming models, we account for the existence of the optimal solution, and turn models into equations by K-T condition. In the examples, we apply lingo to obtain the optimal solution while the equations are hard to solve.

Key words: estimation of the initial state, maximum likelihood, mathematical programming models, K-T condition

马尔可夫模型在各个领域的应用十分广泛. 在许多实际问题中,马尔可夫模型中的参数,如状态、转移概率等并不是准确的给出,因此需要对参数进行估计,估计的准确性将影响马尔可夫模型的应用效果. Nilim 等[1]在估计了参数的不确定程度之后,对有限状态且参数不确定的马尔可夫决策过程提出了一种鲁棒性动态规划算法,以减小参数带来的影响. Delage 等[2]将参数作为随机变量,基于贝叶斯决策的方法提出了一种处理不确定参数的方法.

状态估计是参数估计中的一类重要问题. Yu 等[3]提出了一种前向-后向递推算法,预测单个时刻的最可能状态. Xie 等[4]研究了隐马尔可夫模型的一类鲁棒状态估计问题,将之表达成一个带约束的优化模

收稿日期:2019-01-07.
基金项目:国家自然科学基金面上项目(71571019).
通讯联系人:侯福均,副教授,博士生导师,研究方向:群决策、博弈论. E-mail:houfj@ bit.edu.cn

型,并利用拉格朗日乘数法和正则条件下的相对熵将模型转化成无约束优化模型予以求解. 此外,Evans 等[5]、Liang 等[6]和 Shi 等[7]分别对不同的实际问题建立对应的马尔可夫模型,研究其中的状态估计问题. 对于估计和预测问题,极大似然是一种常用的方法,一些学者对隐马尔可夫模型的状态估计问题采用极大似然方法做了有意义的研究[8-10].

在有些实际问题对应的马尔可夫模型中,初始状态并不是已知的. 然而,初始状态又是十分重要的. 在遍历的马尔可夫链中,平稳状态分布不依赖于初始状态,但是在非遍历的马尔可夫链中,平稳状态分布与初始状态有关[11-13]. 另外,在有限阶段马尔可夫决策过程中,最优期望报酬的值同样依赖于初始状态[14]. 因此,对于初始状态未知的马尔可夫模型,准确估计其初始状态,是一项十分有意义的工作. MacDonald 等[15]和 Ching 等[16]对隐马尔可夫链模型的初始状态估计问题进行过有意义的研究,通过模型的稳态分布,建立带约束的二次函数模型,寻找能获得与该稳态分布离差最小的初始状态概率分布. 但是在初始状态未知的情况下,稳态分布往往较难获得.

本文关心初始状态未知的马尔可夫模型,根据可见信息的不同将模型分成一般马尔可夫模型和隐马尔可夫模型两类. 基于极大似然原理,对两类模型的初始状态估计建立了线性规划模型和非线性规划模型,并给出求解方法. 在建模和求解过程中,对模型中的马尔可夫链是否可分割进行了分类讨论. 下文的内容安排如下:第 2 节介绍了马尔可夫链、状态空间的分割和隐马尔可夫模型的基础知识. 第 3 节和第 4 节分别研究了一般马尔可夫链模型和隐马尔可夫链模型的初始状态估计问题,建立了相应的模型并给出可行的求解方法. 第 5 节对非线性模型解的性状进行分析,并给出了算例.

1 基础知识

本文研究的马尔可夫链为有限状态、离散时间且齐次的. 记有限状态空间 $\Omega=\{1,2,\cdots,q\}$,第 n 时刻的状态记为 $S_n=i,i\in\Omega$. 记 $a_{ij}=P(S_{n+1}=j|S_n=i)$ 为马尔可夫链的一步转移概率,i、$j\in\Omega$,$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是一步转移概率矩阵. 进一步,定义 m 步转移概率为 $a_{ij}^{(m)}=P(S_{m+n}=j|S_n=i)$,$\boldsymbol{A}^{(m)}=(a_{ij}^{m})$ 是 m 步转移概率矩阵. 由马尔可夫链的性质可知,$\boldsymbol{A}^{(m)}=\boldsymbol{A}^{m}$.

接下来描述马尔可夫链状态空间的分解. 若从状态 i 经过若干步后能够到达 j,则记为 $i\to j$. 如果 $i\to j$ 且 $j\to i$,则称状态 i 和状态 j 互通,记为 $i\leftrightarrow j$. 从状态 i 出发,经过 n 步后首次到达状态 j 的概率记为 $f_{ij}^{(n)}$:

$$f_{ij}^{(n)}=P(S_n=j,S_k\neq j,1\leqslant k<n|S_0=i),$$

并记 f_{ij} 为从状态 i 出发经过有限次最终到达状态 j 的概率,$f_{ij}=\sum_{n=1}^{+\infty}f_{ij}^{(n)}$. 特别地,当 $i=j$,称 f_{ii} 为从状态 i 出发经过有限次能返回 i 的概率. 当 $f_{ii}=1$ 时,称状态 i 是常返的,否则称 i 是非常返的. 对一个有限状态的马尔可夫链的状态空间,总可以根据状态相通关系划分成一个非常返状态集合 J 和若干个常返状态集合 $K_u,u=1,\cdots,l$,且有:

$$J\cap K_u=\varnothing,K_u\cap K_v=\varnothing,\forall u,v\in\{1,\cdots,l\},u\neq v.$$

若 $i\leftrightarrow j$,则状态 i 和状态 j 必属于同一个集合. 显然,某非常返态可能可达某常返态,但是任何常返态必不可达任一非常返态.

另外,对隐马尔可夫模型做一些描述. 在一般的马尔可夫链中,状态是可以被观测到的. 但是在隐马尔可夫模型中,状态是不可见的,每个状态对应一些观测符号,每个阶段能观测到的是这些观测符号,本文假设观测符号数量有限. 时刻 n 的观测符号记为 $O_n=v_j,v_j\in V,j=1,\cdots,p$,$V$ 为观测符号集合. 记 $b_{ij}=P(O_n=v_j|S_n=i)$ 为 n 时刻状态为 i 的条件下观测符号为 v_j 的概率,$i\in\Omega,v_j\in V_j$,记 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 为观测分布矩阵. 在决策问题中,隐马尔可夫又称部分可观测马氏问题[17].

2 一般马尔可夫模型的初始状态估计

考虑一个初始状态未知且状态空间不可分割的一般马尔可夫链模型,状态空间 $\Omega=\{1,2,\cdots,q\}$ 和一步转移概率矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 已知,若观测到时刻 k 模型的状态为 $S_k=i_k\in\Omega$,此时无法准确估计初始状态,不妨记 $\boldsymbol{\pi}=\{\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_q\}$ 为初始状态的概率分布,$\sum_{i=1}^{q}\pi_i=1$. 基于极大似然原理,寻找合适的 $\boldsymbol{\pi}$,使 k 时刻

状态为 i_k 的概率最大. 由基础知识可知,k 步状态转移概率矩阵 $\boldsymbol{A}^{(k)}=\boldsymbol{A}^k$,其中:

$$\boldsymbol{A}^{(k)}=\boldsymbol{A}^k=\begin{bmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \cdots & a_{1q}^{(k)} \\ a_{21}^{(k)} & a_{22}^{(k)} & \cdots & a_{2q}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{q1}^{(k)} & a_{q2}^{(k)} & \cdots & a_{qq}^{(k)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1^{(k)} \\ \boldsymbol{A}_2^{(k)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_q^{(k)} \end{bmatrix}. \tag{1}$$

在初始状态概率分布 $\boldsymbol{\pi}=\{\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_q\}$ 下得到 k 步加权状态转移概率矩阵,记为 $\boldsymbol{\pi A}^{(k)}$:

$$\boldsymbol{\pi A}^{(k)}=\begin{bmatrix} \pi_1\boldsymbol{A}_1^{(k)} \\ \pi_2\boldsymbol{A}_2^{(k)} \\ \vdots \\ \pi_q\boldsymbol{A}_q^{(k)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \pi_1 a_{11}^{(k)} & \pi_1 a_{12}^{(k)} & \cdots & \pi_1 a_{1q}^{(k)} \\ \pi_2 a_{21}^{(k)} & \pi_2 a_{22}^{(k)} & \cdots & \pi_2 a_{2q}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_q a_{q1}^{(k)} & \pi_q a_{q2}^{(k)} & \cdots & \pi_q a_{qq}^{(k)} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

式(2)的矩阵中,元素 $\pi_i a_{ij}^{(k)}$ 表示初始状态为 i 且经过 k 步转移到状态 j 的概率. 根据极大似然原理,得到一个线性规划模型:

$$\max \sum_{i=1}^{q}\pi_i a_{ii_k}^{(k)}, \tag{3}$$

$$\text{s.t.} \sum_{i=1}^{q}\pi_i=1, \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{q}\pi_i a_{ij}^{(k)}=1, \tag{5}$$

$$0\leqslant\pi_i\leqslant 1, i\in\Omega, \tag{6}$$

从式(3)可以看出,目标函数为式(2)中矩阵的第 i_k 列各元素之和. 式(4)为初始状态概率分布规范性约束,式(5)为 k 时刻各状态发生概率的规范性约束,式(6)为各变量的取值范围.

命题 1　无论初始状态概率分布 π 如何取值,式(5)总是成立的.

证明　因为 $\sum_{i=1}^{q}\pi_i=1$,且 $\forall i\in\Omega$, $\sum_{j=1}^{q}a_{ij}^{(k)}=1$,且 q 有限,因此我们有

$$\sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{q}\pi_i a_{ij}^{(k)}=\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q}\pi_i a_{ij}^{(k)}=\sum_{i=1}^{q}\pi_i\sum_{j=1}^{q}a_{ij}^{(k)}=\sum_{i=1}^{q}\pi_i=1.$$

因此,上述线性规划模型的有效约束只有式(4). 根据单纯形法不难得知,求解模型只需寻找式(1)矩阵中第 i_k 列中最大的元素:

$$t\in\arg\max_{i\in\Omega} a_{ii_k}^{(k)} \tag{7}$$

则模型的解为:$\pi_t=1,\pi_i=0,i\neq t$.

若式(7)中的 t 存在多个值,不妨设存在 h 个这样的 t,并记其集合为 T. 记为 $\boldsymbol{\pi}'=(i_1,i_2,\cdots,i_q)$,其中:

$$i_x=\begin{cases}1, & \text{if } i_x\in T,\\ 0, & \text{if } i_x\notin T.\end{cases}$$

则初始状态概率分布可表示为:$\boldsymbol{\pi}=\dfrac{\boldsymbol{\pi}'}{h}$.

观测到多个状态的情况下估计初始状态,只需要适当调整目标函数. 举例来说,观测到时刻 k_j 模型的状态为 $S_{k_j}=i_{k_j},i_{k_j}\in\boldsymbol{\Omega},j=1,\cdots,h$,则模型的目标函数为:

$$\max\prod_{j=1}^{h}\sum_{i=1}^{q}\pi_i a_{ii_{k_j}}^{(k_j)}, \tag{8}$$

约束条件同样是式(4)、(6),但此时目标函数变成非线性函数,问题变成一个带线性约束的非线性规划. 由于式(6)中对每个变量都有约束区间,故用拉格朗日松弛算法求得的解未必是可行解.

我们考虑将上述模型利用 K-T 条件转化成方程组的形式. 记 $f(\pi)=-\prod_{j=1}^{h}\sum_{i=1}^{q}\pi_i a_{ii_{k_j}}^{(k_j)}$,我们可以将模型转化成:

$$\begin{cases} \min f(\pi), \\ \pi_i \geqslant 0, \\ 1 - \pi_i \geqslant 0, \\ 1 - \sum_{i=1}^{q} \pi_i \geqslant 0, \\ \sum_{i=1}^{q} \pi_i - 1 \geqslant 0, \\ i = 1, \cdots, q. \end{cases} \tag{9}$$

由式(9)中模型容易得到 K-T 条件下的方程组:

$$\begin{cases} f'_{\pi_i}(\pi) - \sum_{j=1}^{q} \lambda_j (\pi_j)'_{\pi_i} + \sum_{j=1}^{q} \mu_j (\pi_j)'_{\pi_i} - \gamma \left(\sum_{j=1}^{q} \pi_j \right)'_{\pi_i} = 0, \quad i = 1, \cdots q. \\ \lambda_j \pi_j = 0, \qquad j = 1, \cdots, q. \\ \mu_j (1 - \pi_j) = 0, \quad j = 1, \cdots, q. \\ \lambda_j \geqslant 0, \mu_j \geqslant 0, \quad j = 1, \cdots, q. \end{cases} \tag{10}$$

下面分析式(10)中方程组解的存在性. 由于式(9)中目标函数是连续函数,其可行域是凸集、闭集,因此目标函数的最优解必然存在. 又由 K-T 条件的性质可知,式(9)中目标函数的最优解必是(10)中方程组的解,因此(10)中方程组的解必然存在.

进一步分析(10)中方程组的可解性. 当有两个或三个可见状态时,(10)中方程组分别是一元、二元方程组,此时方程组都有实数解. 当有更多的状态可见时,(10)中对应的方程组将是一个高次方程组,此时难以求得精确解,我们可以用数学软件求其近似解.

下面考虑可分割的一般马尔可夫链模型. 将模型对应的马氏链根据状态相通关系划分成一个非常返状态集合 J 和若干个常返状态集合 K_u, $u=1,\cdots,l$. 如果观测到时刻 k 模型的状态为 $S_k=i_k\in\Omega$,判断 i_k 属于哪个集合.

情况 1 若 $i_k\in J$,则初始状态必定属于集合 J 中可达状态 i_k 的那些非常返状态所组成的子集,并将这些状态包括 i_k 的转移概率矩阵从原矩阵中分块出来,运用本节中的规划模型不难得到初始状态的估计.

情况 2 若 $i_k\in K_g$, $g\in\{1,\cdots,l\}$,则初始状态必属于集合 K_g 和可达 K_g 中状态的非常返状态所组成的集合. 将这些状态的转移概率矩阵从原矩阵中分块出来,运用本节的模型和算法可以得到基于极大似然的初始状态的估计.

在观测到多个状态的情况下,显然这些状态只可能属于某一个集合,因此同样可以运用上述方法估计初始状态.

3 隐马尔可夫模型的初始状态估计

考虑一个初始状态未知且状态空间不可分割的隐马尔可夫链模型,状态空间 $\Omega=\{1,2,\cdots,q\}$,一步转移概率矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 和观测分布概率矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 已知. 若观测到时刻 k 模型的观测符号为 $O_k=v_n$, $v_n\in V$,为了估计初始状态,不妨记 $\boldsymbol{\pi}=\{\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_q\}$ 为初始状态的概率分布, $\sum_{i=1}^{q}\pi_i=1$, k 步状态转移概率矩阵见式(1).

观测符号分布的概率矩阵给出如下:

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{q1} & b_{q2} & \cdots & b_{qp} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2, \cdots, \boldsymbol{B}_p], \tag{11}$$

式中, $\boldsymbol{B}_j$ 为 q 维列向量.

根据式(1)中矩阵以及状态与观测符号概率矩阵的关系可以得到,时刻 k 时状态为 j 且观测符号为 v_n

的概率为:

$$\boldsymbol{P}_{jn}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\pi}_1 a_{1j}^{(k)}\\ \boldsymbol{\pi}_2 a_{2j}^{(k)}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\pi}_q a_{qj}^{(k)}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\times\begin{bmatrix}b_{jn}\\ b_{jn}\\ \vdots\\ b_{jn}\end{bmatrix}=\sum_{i=1}^{q}\boldsymbol{\pi}_i a_{ij}^{(k)} b_{jn}. \tag{12}$$

由式(12)进一步可得,时刻 k 时观测符号为 v_n 的概率为:

$$P_n=\sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{q}\boldsymbol{\pi}_i a_{ij}^{(k)} b_{jn}, \tag{13}$$

根据式(13),基于极大似然原理,可以得到初始状态估计的一个线性规划模型如下:

$$\max \sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{q}\boldsymbol{\pi}_i a_{ij}^{(k)} b_{jn}, \tag{14}$$

$$\text{s.t.} \sum_{i=1}^{q}\boldsymbol{\pi}_i=1,$$

$$\sum_{n=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{q}\boldsymbol{\pi}_i a_{ij}^{(k)} b_{jn}=1, \tag{15}$$

$$0\leqslant\boldsymbol{\pi}_i\leqslant 1, i\in\Omega.$$

类似于状态概率的规范性约束,式(15)保证了 k 时刻所有可能观测符号出现的概率满足概率的规范性.

命题 2　无论初始状态概率分布 $\boldsymbol{\pi}$,状态转移概率 $a_{ij}^{(k)}$ 和观测概率 b_{jn} 如何取值,式(15)总是成立的.

证明　因为 $\sum_{i=1}^{q}\boldsymbol{\pi}_i=1, \forall i\in\Omega$, $\sum_{j=1}^{q}a_{ij}^{(k)}=1, \forall j\in\Omega$, $\sum_{n=1}^{p}b_{jn}=1$,且 p、q 有限,因此我们有:

$$\sum_{n=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{q}\boldsymbol{\pi}_i a_{ij}^{(k)} b_{jn}=\sum_{i=1}^{q}\boldsymbol{\pi}_i\sum_{j=1}^{q}\sum_{n=1}^{p}a_{ij}^{(k)} b_{jn}=\sum_{i=1}^{q}\boldsymbol{\pi}_i\sum_{j=1}^{q}a_{ij}^{(k)}=\sum_{i=1}^{q}\boldsymbol{\pi}_i=1.$$

因此上述模型也是一个只含一个等式约束的线性规划模型,通过单纯形法可以求解,形式上类似于整数规划中的隐枚举法:

$$t\in\arg\max_{i\in\Omega}\sum_{j=1}^{q}a_{ij}^{(k)} b_{jn}. \tag{16}$$

模型解的表达与上节的一样.

观测到多个观测符号的情况下估计初始状态概率分布,只需要适当调整目标函数. 观测到时刻 k_m 模型的观测符号为 $O_{k_m}=v_{n_m}, v_{n_m}\in V, m=1,\cdots,h$,则模型的目标函数为:

$$\max\prod_{m=1}^{h}\sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{q}\boldsymbol{\pi}_i a_{ij}^{(k_m)} b_{jn_m}. \tag{17}$$

同样地,令 $f(\boldsymbol{\pi})=-\prod_{m=1}^{h}\sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{q}\boldsymbol{\pi}_i a_{ij}^{(k_m)} b_{jn_m}$,再利用 K-T,可以得到式(10)中的方程组.

下面考虑可分割的隐马尔可夫链模型. 跟上节类似,将模型对应的马氏链根据状态相通关系划分成一个非常返状态集合 J 和若干个常返状态集合 $K_u, u=1,\cdots,l$. 如果观测到时刻 k 模型的观测符号为 $O_k=v_n, v_n\in V$,与上一节不同的是,多个状态集合中的状态可能观测到 v_n.

对于这个问题,本文采用一种基于概率保证程度的初始状态的估计. 找到能观测到 v_n 的概率最大的状态:

$$s\in\arg\max_{j\in\Omega} b_{jn}, \tag{18}$$

并记录概率 b_{sn}. 这里若存在多个 b_{jn} 相等的 j,取 j 较小的那个作为 s. 判断 s 属于哪个状态集合,则在 b_{sn} 的概率保证下,运用上节给出的集合分割情形下的方法,不难得到初始状态的估计.

另外,对观测到多个观测符号的情形,由于不同阶段观测到的符号都能得到一个最大概率的状态,而且这些状态可以是属于不同集合的. 为此,本文给出一种二次估计的方法.

采用本节的假设,观测到时刻 k_m 模型的观测符号为 $O_{k_m}=v_{n_m}, v_{n_m}\in V, m=1,\cdots,h$,其中 $k_1<k_2<\cdots<k_h$. 首

先根据 $O_{k_1}=v_{n_1}$,得到 k_1 时刻每个状态的估计:

$$P(S_{k_1}=j\mid O_{k_1}=v_{n_1})=b_{jn_1},\quad j\in\Omega. \tag{19}$$

运用后面的 $h-1$ 个观测符号,状态转移概率矩阵 $\boldsymbol{A}_{(j)}$ 和观测概率分布矩阵 $\boldsymbol{B}$ 对式(19)中的概率进行修正,其中 $\boldsymbol{A}_{(j)}$ 为状态 j 所属的状态集合对应的 $\boldsymbol{A}$ 的分块子矩阵. 用 $\boldsymbol{A}_{(j),i}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}_{(j)}$ 的第 i 行向量,通过式(1)、(11)得到以下修正概率的公式:

$$P_{k_1j}=P(S_{k_1}=j\mid O_{k_1}=v_{n_1},\cdots,O_{k_h}=v_{n_h})=b_{jn_1}\sum_{i=1}^{q}A_{(j),i}^{(k_2-k_1)}B_{v_{n_2}}\cdots\sum_{i=1}^{q}A_{(j),i}^{(k_h-k_1)}B_{v_{n_h}},\ \forall j\in\Omega. \tag{20}$$

对 k_1 时刻各个不同状态的修正概率规范化:

$$P_{k_1j}^{*}=\frac{P_{k_1j}}{\sum_{j=1}^{q}P_{k_1j}}, \tag{21}$$

运用式(21),找到 k_1 时刻概率最大的状态 t:

$$t\in\arg\max_{j\in\Omega}P_{k_1j}^{*}, \tag{22}$$

重复上文的步骤,基于 $P_{k_1t}^{*}$ 的概率保证程度寻找状态 t 所属的集合,然后根据 k_1 时刻的观测符号,运用本节提出的方法对初始状态进行估计.

4 解的性状分析及算例

首先,我们给出式(8)中目标函数在边界点取得最优解的充分条件. 令 1_w 表示初始状态为第 w 个状态的情况,我们有如下结论:

命题 3 若 $\exists w\in\Omega$,使得 $a_{wi_{k_j}}^{(k_j)}\geqslant a_{ii_{k_j}}^{(k_j)}$, $\forall j\in\{1,\cdots,h\}$, $\forall i\in\Omega$,则式(8)中目标函数的最优解为 $\boldsymbol{\pi}_{(w)}=(0,\cdots,1_w,\cdots,0)$.

证明 根据假设,可以得到

$$\prod_{j=1}^{h}\sum_{i=1}^{q}\pi_i a_{ii_{k_j}}^{(k_j)}\leqslant\prod_{j=1}^{h}\sum_{i=1}^{q}\pi_i a_{wi_{k_j}}^{(k_j)}=\prod_{j=1}^{h}a_{wi_{k_j}}^{(k_j)},$$

从而可以得到

$$\max\prod_{j=1}^{h}\sum_{i=1}^{q}\pi_i a_{ii_{k_j}}^{(k_j)}\leqslant\max\prod_{j=1}^{h}a_{wi_{k_j}}^{(k_j)},$$

且当取边界点 $\boldsymbol{\pi}_{(w)}=(0,\cdots,1_w,\cdots,0)$ 时,上述不等式的等号成立.

我们给出一个观测到两个状态的马尔可夫链模型的算例. 考虑一条状态空间为 $\Omega=\{1,2,3\}$ 的马氏链,初始状态分布为 $\boldsymbol{\pi}=\{\pi_1,\pi_2,\pi_3\}$,观测到 $S_1=2,S_3=3$. 一步和三步状态转移概率矩阵如下:

$$\boldsymbol{A}^{(1)}=\begin{bmatrix}0.5&0.2&0.3\\0.2&0.2&0.6\\0.2&0.8&0\end{bmatrix},\boldsymbol{A}^{(3)}=\begin{bmatrix}0.305&0.362&0.333\\0.278&0.308&0.414\\0.278&0.524&0.198\end{bmatrix}.$$

基于极大似然原理,我们建立模型如下:

$$\begin{aligned}&\max\{(0.2\pi_1+0.2\pi_2+0.8\pi_3)\cdot(0.333\pi_1+0.414\pi_2+0.198\pi_3)\},\\&\text{s.t.}\sum_{i=1}^{3}\pi_i=1,\\&0\leqslant\pi_i\leqslant1,i\in\Omega.\end{aligned}$$

对应的 K-T 条件方程组为:

$$\begin{cases}0.133\,2\pi_1+0.149\,4\pi_2+0.306\pi_3-\lambda_1+\mu_1-\gamma=0,\\0.149\,4\pi_1+0.165\,6\pi_2+0.370\,8\pi_3-\lambda_2+\mu_2-\gamma=0,\\0.306\pi_1+0.370\,8\pi_2+0.316\,8\pi_3-\lambda_3+\mu_3-\gamma=0,\\\lambda_j\pi_j=0,\qquad j=1,2,3.\\\mu_j1-\pi_j=0,\qquad j=1,2,3.\end{cases}$$

讨论 λ_j 和 μ_j 大于 0 和等于 0 的情况,可以得到上述方程组的解为 $(\pi_1,\pi_2,\pi_3)=(0,0.208\,3,0.791\,7)$,这也是模型的最优解.

当有 4 个以上状态可观测时,式(10)中方程组将含一个三次以上方程,此时一般无实数解,我们借助 lingo 软件进行求解.

以本节中的算例为背景,进一步给出 $S_2=2,S_4=2$,二步和四步状态转移概率矩阵如下:

$$\boldsymbol{A}^{(2)}=\begin{bmatrix}0.35 & 0.38 & 0.27\\ 0.26 & 0.56 & 0.18\\ 0.26 & 0.2 & 0.54\end{bmatrix},\boldsymbol{A}^{(4)}=\begin{bmatrix}0.291\,5 & 0.399\,8 & 0.308\,7\\ 0.283\,4 & 0.448\,4 & 0.268\,2\\ 0.283\,4 & 0.318\,8 & 0.397\,8\end{bmatrix}.$$

运用 lingo,我们得到结果如下:

从运行结果可以看到,当 $(\pi_1,\pi_2,\pi_3)\approx(0,0.74,0.26)$ 时,似然概率取最大.

5 结论

由于初始状态的重要性,本文基于极大似然原理,对不同情况下马尔可夫链的初始状态进行估计. 本文所做的贡献可以总结如下:

(1)在已知其他参数的条件下,对一般马尔可夫链模型一个、多个状态可见的情况进行分析,分别建立了对应的线性和非线性规划模型,并给出了相应的求解方法. 在研究的过程中,根据马尔可夫链状态是否可分割的特点对问题进行了分类讨论.

(2)在已知其他参数的条件下,对隐马尔可夫链模型一个、多个状态可见的情况进行分析,同样给出了问题的模型和算法. 在进一步研究可分割的马尔可夫链的过程中,提出了概率保证程度的概念并给出初始状态的估计方法.

(3)基于高次方程解的特点,在两个或三个观测状态下可以直接通过求解 K-T 条件方程组得到初始状态概率分布,在 4 个以上观测状态下建议运用工具软件求解.

由于极大似然估计是寻找使发生事件概率最大的参数,因此若发生的事件是小概率事件,则基于极大似然原理得到的估计值显然也是不准确的,因此本文的估计方法也存在一定的缺陷.

另外,基于极大似然的数学规划模型还可以为其他参数缺失的马尔可夫链的参数估计问题提供一种求解思路. 比如对应许多实际问题建立的马尔可夫模型中,给出的状态转移概率往往是部分缺失的. 此时,我们同样可以根据可见状态建立线性和非线性的数学规划模型对缺失概率进行估计. 在后续的研究中,我们将对这个问题进行研究.

[参考文献]

[1] ARNAB N,LAURENT E G. Robust control of Markov decision processes with uncertain transition matrices[J]. Operations research,2005,53(5):780-798.

[2] ERICK D,SHIE M. Percentile optimization for Markov decision processes with parameter uncertainty[J]. Operations research,2009,58(1):203-213.

[3] YU S Z,HISASHI K. An efficient forward-backward algorithm for an explicit-duration hidden Markov model[J]. IEEE signal processing letters,2003,10:11-14.

[4] XIE L,UGRINOVSKII V A,PETERSEN I R. Petersen. Finite horizon robust state estimation for uncertain finite alphabet hidden Markov models with conditional relative entropy constraints[J]. SIAM journal on control and optimization,2008,4(1):4497-4502.

[5] JAMIE S E,VIKRAM K. Hidden Markov model state estimation with randomly delayed observations[J]. IEEE transactions on signal processing,1999,47(8):2157-2166.

[6] LIANG J L,WANG Z D,LIU X H. Distributed state estimation for uncertain Markov-type sensor networks with mode-dependent distributed delays[J]. International journal of robust and nonlinear control,2012,22(3):331-346.

[7] SHI D W,ROBERT J E,CHEN T W. Event-based state estimation of discrete-state hidden Markov models[J]. Automatica,2016,65:12-26.

(下转第 60 页)

推论 1 范畴 Ω-DOM 是范畴 Ω-$CONT$ 的反射子范畴.

由引理 1、命题 1、推论 1 可得

定理 3 范畴 Ω-$Poset$ 与范畴 Ω-Cat^T 同构.

推论 2 范畴 Ω-DOM 与范畴 Ω-$CONT^T$ 同构.

[参考文献]

[1] WAGNER K R. Solving recursive domain equations with enriched categories[D]. Pittsburgh:Garnegie Mellon University, 1994.

[2] 赖洪亮. Ω-范畴序结构性质的研究[D]. 成都:四川大学,2007.

[3] 苏淑华. Ω-范畴在量化 Domain 理论中的应用研究[D]. 长沙:湖南大学,2014.

[4] 耿俊,汤建钢,聂晓艳. 范畴 Ω-Cat 的完备性[J]. 模糊系统与数学,2012,26(2):147-151.

[5] 耿俊,汤建钢,聂晓艳. 范畴 Ω-Cat 的极限和余极限[J]. 模糊系统与数学,2012,26(4):90-93.

[6] 耿俊,汤建钢. 范畴 Ω-Cat 的函数空间及其性质[J]. 模糊系统与数学,2014,28(5):71-75.

[7] LAI H,ZHANG D. Complete and directed complete Ω-categories[J]. Theoretical computer science,2007,388:1-25.

[8] ROSENTHAL K I. Quantales and their applications[M]. New York:Longman Scientific and Technical,1990.

[9] YAO W. Quantitative domain via fuzzy sets:part Ⅰ:continuity of fuzzy directed-complete poset[J]. Fuzzy sets and systems, 2010,161:973-987.

[10] 贺伟. 范畴论[M]. 北京:科学出版社,2006.

[责任编辑:陆炳新]

(上接第 56 页)

[8] BRIAN G L. Maximum-likelihood estimation for hidden Markov models[J]. Stochastic processes and their applications,1992, 40:127-143.

[9] SUN Q,LIM C C,LIU F. Maximum likelihood state estimation for Markov jump systems with uncertain mode-dependent delays[J]. Journal of the Franklin institute,2016,353:594-614.

[10] 张虎,胡淑兰. 马尔可夫转换模型的极大似然估计的算法[J]. 统计与决策,2011,6:26-27.

[11] RICHARD Z,ZHOU M C. Petri nets and industrial applications:a tutorial[J]. IEEE transactions on industrial electronics, 1994,41(6):567-583.

[12] PHUC D V,ANNE B,CHRISTOPHE B. Reliability importance analysis of Markovian systems at stead state using perturbation analysis[J]. Reliability engineering and system safety,2013,93(11):1605-1615.

[13] 荣腾中,肖智. 高阶马尔可夫链平稳分布的存在唯一性[J]. 系统工程理论与实践,2013,33(8):2015-2020.

[14] MEDER Z Z,FLESCH J,PEETERS R. Optimal choice for finite and infinite horizons[J]. Operations research letters,2012, 40(6):469-474.

[15] MACDONALD I,ZUCCHINI W. Hidden Markov and other models for discrete-valued time series[M]. London:Chapman and Hall,1997.

[16] CHING W K,MICHAEL K N. Markov chains:models,algorithms and applications[M]. New York:Publications of the American Statistical Association,2006.

[17] 刘克,曹平. 马尔可夫决策过程理论与应用[M]. 北京:科学出版社,2015.

[责任编辑:陆炳新]