doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2019.02.010

自由半群作用的拓扑熵的研究

张文达[1],薛丽翠[2]

(1.重庆交通大学数学与统计学院,重庆 400074)
(2.河北师范大学信息与计算机科学学院,河北 石家庄 050024)

[**摘要**] 本文给出了三种自由半群作用的动力系统的拓扑熵的定义,首先证明了这三种定义的等价性. 在此定义的基础上对拓扑熵性质进行了讨论. 主要包括以下结论:在等度拓扑共轭下拓扑熵的不变性以及这种拓扑熵的 power rule 性质.

[**关键词**] 自由半群作用,生成集,分离集,开覆盖,拓扑熵,等度拓扑共轭

[**中图分类号**]37A35,37B40 [**文献标志码**]A [**文章编号**]1001-4616(2019)02-0061-04

Topological Entropy of Free Semigroup Actions

Zhang Wenda[1],Xue Licui[2]

(1.College of Mathematics and Statistics,Chongqing Jiaotong University,Chongqing 400074,China)
(2.College of Mathematics and Information Science,Hebei Normal University,Shijiazhuang 050024,China)

Abstract:In this paper,we define the entropy and preimage entropy of free semigroup actions in a new method. Based on these definitions,we get some relations between topological entropy and measure entropy,and the relations among kinds of preimage entropies. The main results of this paper are as follows:(1)The topological entropy is invariant under equi-conjugacy;(2)The power rule for the measure-theoretic entropy holds.

Key words:free semigroup action,separated set,spanning set,open cover,topological entropy,equitopological conjugate

对于群作用的熵的研究,已有大量丰富的成果. 1967 年 Kirillov[1]介绍了保测变换的有限生成群作用的熵的概念,Conze[2],Katznelson 和 Weiss[3]对阿贝尔群作用的情形进行了研究,1998 年,Burton,Dajani 和 Meester 利用了类似的思想,定义了保测变换的阿贝尔群作用的熵的一种新的定义. Stepin 和 Tagi-Zade[4]对于顺从群作用的拓扑熵进行了研究. 特别地,对于自由半群作用的熵的研究,有 Bi′s[5]对离散与连续动力系统上的半群作用的熵的研究. Bufetov[6]给出了一种不同的方法对自由半群作用的拓扑熵进行了研究,讨论了由此定义的自由半群作用的拓扑熵与斜积变换作用的熵之间的关系.关于高维群作用的熵的更多研究结果读者可以参考文献[6-11].

本文中,将给出自由半群作用的熵及其原像熵的一种新的定义. 在新的定义中对不同轨道作用下得到的(ω,ε)-生成集以及(ω,ε)-分离集的指数增长率取平均,这样的定义不仅有利于对自由半群作用的熵作进一步的研究,而且更具有现实意义. 拓扑熵 $h(G)$应用的是系统在不同路径作用下正向轨道个数的指数增长率的平均值.

1 基本记号

设 $F_m^+=\{0,1,2,\cdots,m-1\}$,$F=\cup_{n=1}^{\infty}F_n$ 表示由字符 $0,1,\cdots,m-1$ 组成的有限字符串的集合,其中

$$F_n=\{\omega_1\omega_2\cdots\omega_n\,|\,\omega_i\in F_m^+,i=0,1,\cdots,n\}$$

表示长度为 n 的字符串. $|\omega|$表示 $\omega\in F=\cup_{n=1}^{\infty}F_n$的长度,即含有字符的个数. 对任意的 $\omega,\omega'\in F$,$\omega\omega'$代表将 ω 写在 ω'的右侧,显然 F 按照这种法则构成自由半群,记 $\omega\leqslant\omega'$,如果存在 $\omega'\in F$,满足 $\omega'=\omega''\omega$. 设

收稿日期:2019-02-16.
基金项目:国家自然科学基金(11501066)、重庆市教委项目(KJ1705122).
通讯联系人:张文达,博士,研究方向:动力系统. E-mail:wendazhang951@ aliyun.com

(X,d)为紧度量空间,$f_i:X\to X$ 为 X 上的连续自映射,$i=0,1,\cdots,m-1$,称 G 为 X 上连续自映射集 G_1 的有限生成群,如果存在 $G_1=\{f_0,f_1,\cdots,f_{m-1}\}$,使得 $G=\cup_{n=1}^{\infty}G_n$,其中 $G_n=\{g_0\cdot g_1\cdots g_{n-1}\mid g_i\in G_1,i=0,1,\cdots,n-1\}$,令 $\omega\in F=\cup_{n=1}^{\infty}F_n$,$\omega=\omega_1\omega_2\cdots\omega_n$,$f_\omega=f_{\omega_1}f_{\omega_2}\cdots f_{\omega_n}$.

2　自由半群作用的拓扑熵的定义

本节中借助分离集、生成集、开覆盖给出自由半群作用的拓扑熵的 3 种定义,并讨论这 3 种定义的等价性.

下面主要考虑紧致度量空间 X,设 $d_\omega(x,y)=\max_{\omega'\leqslant\omega}d(f_{\omega'}(x),f_{\omega'}(y))$,称紧度量空间 X 中的两个点 x,y 是(ω,G_1,ε)-分离的,如果存在 $\omega'\leqslant\omega$,满足 $d_{\omega'}(x,y)\geqslant\varepsilon$. 称空间 X 的子集 A 为(ω,G_1,ε)-分离集,如果对任意的 $x,y\in A$ 都有 x,y 是(ω,G_1,ε)-分离的. 根据 X 的紧致性可知,X 的任意分离集都是有限集,记

$$s(\omega,G_1,\varepsilon)=\max\{\mathrm{card}(A):A\text{ 为 }X\text{ 的}(\omega,G_1,\varepsilon)\text{-分离集}\},$$

$\mathrm{card}(A)$表示集合 A 中所含元素的个数.

下面 给出自由半群作用的拓扑熵的分离集的定义.

定义 1　由 G_1 生成的自由半群 G 的拓扑熵为

$$h(G)=\lim_{\varepsilon\to0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{m^n}\sum_{|\omega|=n}\log s(\omega,G_1,\varepsilon).$$

类似与 Z^1-作用的拓扑熵的定义,也可以通过生成集来定义自由半群作用的拓扑熵. 称 X 的子集 A 为(ω,G_1,ε)-生成集,如果对于任意的 $x\in X$,都有 $y\in A$,使得 $d_\omega(x,y)\leqslant\varepsilon$. 记 $r(\omega,G_1,\varepsilon)$为 X 的具有最小基数的(ω,G_1,ε)-生成集的基数.

首先,有如下引理.

引理 1　设 G 为由有限集 G_1 生成的自由半群,对任意的 $\varepsilon>0$ 以及 $\omega\in F=\cup_{n=1}^{\infty}F_n$,都有

$$\lim_{\varepsilon\to0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{m^n}\sum_{|\omega|=n}\log s(\omega,G_1,\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{m^n}\sum_{|\omega|=n}\log r(\omega,G_1,\varepsilon).$$

证明　与 Z^1-作用的动力系统类似,首先可以证明

$$r(\omega,G_1,\varepsilon)\leqslant s(\omega,G_1,\varepsilon)\leqslant r(\omega,G_1,\varepsilon/2).$$

一方面,设 E 为 X 的具有最大基数的(ω,G_1,ε)-分离集,则 E 也是 X 的(ω,G_1,ε)-生成集,所以有

$$r(\omega,G_1,\varepsilon)\leqslant s(\omega,G_1,\varepsilon).\tag{1}$$

另一方面,设 H 为 X 的具有最小基数的$(\omega,G_1,\varepsilon/2)$-分离集,定义映射 $\varphi:E\to H$,对任意的 $x\in E$,定义 $\varphi(x)\in H$,使得对于 $\omega\in F=\cup_{n=1}^{\infty}F_n$,有 $d_\omega(x,\varphi(x))<\varepsilon/2$,则根据度量的三角不等式可知,映射 φ 为单射,因此分离集 E 的基数小于等于生成集 H 的基数,即

$$s(\omega,G_1,\varepsilon)\leqslant r(\omega,G_1,\varepsilon/2).\tag{2}$$

结合式(1)、(2),取极限证得

$$\lim_{\varepsilon\to0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{m^n}\sum_{|\omega|=n}\log s(\omega,G_1,\varepsilon)\lim_{\varepsilon\to0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{m^n}\sum_{|\omega|=n}\log r(\omega,G_1,\varepsilon).$$

因此 也可以给出自由半群作用的拓扑熵的生成集的定义.

定义 2　由 G_1 生成的自由半群 G 的拓扑熵为

$$h(G)=\lim_{\varepsilon\to0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{m^n}\sum_{|\omega|=n}\log r(\omega,G_1,\varepsilon).$$

设(X,d)为紧度量空间,$f_i:X\to X$ 为 X 上的连续自映射,$i=0,1,\cdots,m-1$,$G_1=\{f_0,f_1,\cdots,f_{m-1}\}$,$G$ 为 X 上的连续自映射集 G_1 的有限生成群,α 为 X 的有限开覆盖. 记

$$N(\alpha)=\min_{\gamma}\{\mathrm{card}(\gamma)\mid\gamma\subset\alpha,\cup_{B\in\gamma}B=X\},N(\omega,G_1,\alpha)=N(\bigvee_{\omega'\leqslant\omega}f_{\omega'}^{-1}\alpha).$$

下面给出自由半群作用的拓扑熵的开覆盖的定义.

定义 3　由 G_1 生成的自由半群 G 关于开覆盖 α 的拓扑熵为

$$h(G_1,\alpha)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{m^n}\sum_{|\omega|=n}\log N(\omega,G_1,\alpha).$$

由 G_1 生成的自由半群 G 的拓扑熵为

$$h(G)=\sup\nolimits_{\alpha\in O(X)}h(G_1,\alpha),$$

式中,$O(X)$ 表示空间 X 的所有开覆盖构成的集合.

引理 2 设 X 为紧度量空间, α 为 X 的有限开覆盖,勒贝格常数为 $\delta,\omega\in\cup_{n=1}^{\infty}F_n$,则

$$N(\bigvee_{\omega'\leqslant\omega}f_{\omega'}^{-1}\alpha)\leqslant r(\omega,G_1,\delta/2)\leqslant s(\omega,G_1,\delta/2).$$

证明 设 E 为 X 的具有最小基数的$(\omega,G_1,\delta/2)$-生成集,$\mathrm{card}(E)=r(\omega,G_1,\delta/2)$,则

$$X=\bigcup_{x\in E}\bigcap_{\omega'\leqslant\omega}f_{\omega'}^{-1}B(f_{\omega'}(x),\delta/2),$$

式中,$B(f_{\omega'}(x),\delta/2)$表示以 $f_{\omega'}(x)$为中心,以 $\delta/2$ 为半径的开球. 由于 α 的勒贝格常数为 δ,$B(f_{\omega'}(x),\delta/2)$包含于 $A_{\omega'}$,其中 $A_{\omega'}\in\alpha$. 因此

$$\bigcap_{\omega'\leqslant\omega}f_{\omega'}^{-1}B(f_{\omega'}(x),\delta/2)\subset\bigcap_{\omega'\leqslant\omega}f_{\omega'}^{-1}A_{\omega'}\in\bigvee_{\omega'\leqslant\omega}f_{\omega'}^{-1}\alpha.$$

进而, $N(\bigvee_{\omega'\leqslant\omega}f_{\omega'}^{-1}\alpha)\leqslant r(\omega,G_1,\delta/2)\leqslant s(\omega,G_1,\delta/2)$.

引理 3 设 X 为紧度量空间, $\varepsilon>0,\alpha$ 为 X 的有限开覆盖,且 $\mathrm{diam}(\alpha)<\varepsilon,\omega\in\cup_{n=1}^{\infty}F_n$,则

$$r(\omega,G_1,\varepsilon)\leqslant s(\omega,G_1,\varepsilon)\leqslant N(\bigvee_{\omega'\leqslant\omega}f_{\omega'}^{-1}\alpha).$$

证明 设 E 为 X 的具有最大基数的(ω,G_1,ε)-分离集,$\mathrm{card}(E)=r(\omega,G_1,\varepsilon)$. 因为 $\mathrm{diam}(\alpha)<\varepsilon$, $\bigvee_{\omega'\leqslant\omega}f_{\omega'}^{-1}\alpha$ 每个集合中最多包含集合 E 中一个点,从而 $s(\omega,G_1,\varepsilon)\leqslant N(\bigvee_{\omega'\leqslant\omega}f_{\omega'}^{-1}\alpha)$.

下面的定理表明,所给出的 G_1 生成的自由半群 G 的拓扑熵的 3 种定义方式是等价的.

定理 1 设(X,d)为紧度量空间,$f_i:X\to X$ 为 X 上的连续自映射,$i=0,1,\cdots,m-1$,$G_1=\{f_0,f_1,\cdots,f_{m-1}\}$,$G$ 为 X 上的连续自映射集 G_1 的有限生成群. 则

$$h(G)=\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{m^n}\sum_{|\omega|=n}\log s(\omega,G_1,\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{m^n}\sum_{|\omega|=n}\log r(\omega,G_1,\varepsilon)=$$

$$\sup\nolimits_{\alpha\in O(X)}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{m^n}\sum_{|\omega|=n}\log N(\omega,G_1,\alpha).$$

证明 对任意的 $\varepsilon>0,\alpha_\varepsilon$ 表示 X 的勒贝格常数小于 ε 且直径小于 2ε 的有限开覆盖,即对任意的 $\alpha\in\alpha_\varepsilon$,都有 $\mathrm{Leb}(\alpha)<\varepsilon$. β 为 X 的直径小于 $\varepsilon/2$ 任意有限开覆盖. 根据引理 2 和 3,对任意的 $\omega\in\cup_{n=1}^{\infty}F_n$,

$$N(\omega,G_1,\alpha)\leqslant r(\omega,G_1,\varepsilon/2)\leqslant s(\omega,G_1,\varepsilon/2)\leqslant N(\omega,G_1,\beta).$$

从而,

$$h(G_1,\alpha)\leqslant\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{m^n}\sum_{|\omega|=n}\log s(\omega,G_1,\varepsilon/2)\leqslant h(G_1,\beta)\leqslant h(G).$$

由于,$\sup_{\alpha\in O(X)}h(G_1,\alpha)=\lim_{\varepsilon\to 0}h(G_1,\alpha_\varepsilon)$,令 $\varepsilon\to 0$,结论得证.

3 自由半群作用的拓扑熵的基本性质

在本节中主要讨论拓扑熵的基本性质.

性质 1 设 $f_i:X\to X$ 为紧度量空间 X 上的同胚映射,$0\leqslant i\leqslant m-1$,且对任意的 $i,j\in\{0,1,\cdots,m-1\}$,都有 $f_if_j=f_jf_i$,$G_1=\{f_0,f_1,\cdots,f_{m-1}\}$,$G$ 为 X 上的连续自映射集 G_1 的有限生成群,则

$$h(G)=h(G^{-1}),$$

式中,G^{-1}为有限生成群.

证明 设 α 为 X 的任意有限开覆盖,

$$h(G_1,\alpha)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{m^n}\sum_{|\omega|=n}\log N(\omega,G_1,\alpha)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{m^n}\sum_{|\omega|=n}\log N(\bigvee_{\omega'\leqslant\omega}f_{\omega'}^{-1}\alpha)\leqslant$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{m^n}\sum_{|\omega|=n}\log N(f_\omega(\bigvee_{\omega'\leqslant\omega}f_{\omega'}^{-1})\alpha)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{m^n}\sum_{|\omega|=n}\log N(\bigvee_{\omega'\leqslant\omega}f_{\omega'}\alpha)=h(G_1^{-1},\alpha),$$

故 $h(G_1,\alpha)\leqslant h(G_1^{-1},\alpha)$.

同理可证 $h(G_1^{-1},\alpha)\leqslant h(G_1,\alpha)$,根据 α 的任意性,有

$$h(G)=h(G^{-1}).$$

定义 4 设 X,Y 为紧度量空间,$f_i:X\to X$ 为 X 上的连续自映射, $g_i:Y\to Y$ 为 Y 上的连续自映射 $i=0,1,\cdots,m-1$. 设由 $G_1=\{f_0,f_1,\cdots,f_{m-1}\}$ 生成的群为 G,由 $G_2=\{g_0,g_1,\cdots,{}_{m-1}\}$ 生成的群为 G'. 若存在等度连续映射 $\pi_i:X\to Y$,以及 $\pi_i^{-1}:Y\to X$,满足 $\pi_i^{-1}f_i=g_i\pi_i$. 则称系统(G,X)与系统(G',Y)是等度拓扑共轭的.

性质 2 系统(G,X)与系统(G',Y)是等度拓扑共轭的,则

$$h(G)=h(G').$$

众所周知,Z^1-作用的动力系统(X,f)的拓扑熵满足 power rule 性质,即:$h_{\text{top}}(f^k)=kh_{\text{top}}(f)$,该性质对于在证明熵的变分原理时发挥了重要作用. 下面 将证明自由半群作用的拓扑熵也满足 power rule 性质.

性质 3 设(X,d)为紧度量空间,$f_i:X\to X$ 为 X 上的连续自映射,$i=0,1,\cdots,m-1$,$G_1=\{f_0,f_1,\cdots,f_{m-1}\}$,$G$ 为 X 上的连续自映射集 G_1 的有限生成群. $G_k=\{g_i=f_\omega:|\omega|=k,i=0,1,\cdots,m^k-1\}$,$G^k$ 为 X 上的连续自映射集 G_k 的有限生成群,则

$$h(G^k)=kh(G).$$

证明 α 为 X 的任意有限开覆盖,

$$h(G_k,\alpha)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{(m^k)^n}\sum_{|\omega|=n}\log N(\omega,G_k,\alpha)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{(m^k)^n}\sum_{|\omega|=n}\log N(\bigvee_{\omega'\leqslant\omega}g_{\omega'}^{-1}\alpha)=$$

$$k\lim_{n\to\infty}\frac{1}{nk}\frac{1}{(m^k)^n}\sum_{|\omega|=nk}\log N\bigvee_{\omega'\leqslant\omega}f_{\omega'}^{-1}\alpha=kh(G_1,\alpha)$$

从而,$h(G^k)=kh(G)$.

[参考文献]

[1] DINABURG E I. The relation between topological entropy and metric entropy[J]. Soviet Math Dokl,1970,11:13-16.

[2] WALTERS P. An Introduction to Ergodic Theory[M]. New York,Heidel-Berg,Berlin:Springer-Verlag,1982.

[3] ADLER R,KONHEIM A,MCANDREW M. Topological entropy[J]. Trans Amer Math Soc,1965,114:303-319.

[4] BOWEN R. Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces[J]. Trans AMS,1971,181:509-510.

[5] KOLYADA S,SNOHA L. Topological entropy of nonautonomous dynamical systems[J]. Random and Compu Dynam,1996,4(2/3):205-223.

[6] KATOK A,HASSELBLATT B. Introduction to the modern theory of dynamical systems[M]. New York:Cambridge University Press,1995.

[7] RUELLE D. Statistical mechanics on a compact set with Z-action satisfying expansiveness and specication[J]. Trans Amer Math Soc,1973,185:237-251.

[8] FRIEDLAND S. Entropy of graphs,semi-groups and groups[M]//Schmidt M,Pollicott K. Ergodic theory of Zd-actions. London Math Soc Lecture Note Ser 228. Cambridge:Cambridge University Press,1996:319-343.

[9] GELLER W,POLLICOTT M. An entropy for Z2-actions with finite entropy generators[J]. Fund Math,1998,157:209-220.

[10] ZHU Y,ZHANG W. On an entropy of Zk+-actions[J]. Acta Math Sinica Chin Ser,2014,30:467-480.

[11] ZHANG W,ZHANG J. The upper bounds of Friedland's entropy for certain Zk+-actions[J]. Dyn Syst,2014,29:67-77.

[责任编辑:陆炳新]