

一类时滞互惠模型的稳定性及 Hopf 分支研究

何 舜, 李 梅

(南京财经大学应用数学学院, 江苏 南京 210023)

[摘要] 本文研究一类带有时滞的互惠种群模型. 首先利用比较定理证明了在 $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \neq 0$ 时解的有界性, 通过构造 Lyapunov 函数, 给出了正平衡解具有全局稳定性的充分条件. 利用特征值理论且以时滞为参数, 研究系统 Hopf 分支的存在性, 并给出了分支值存在的充分条件. 最后用 Matlab 绘制出模型数值解的图像, 验证所得结论的正确性.

[关键词] 时滞, 互惠模型, 全局稳定性, Hopf 分支

[中图分类号] O175.1 [文献标志码] A [文章编号] 1001-4616(2019)02-0065-08

Stability and Hopf Bifurcation Analysis in a Mutualistic Model with Time-Delay

He Shun, Li Mei

(School of Applied Mathematics, Nanjing University of Finance and Economics, Nanjing 210023, China)

Abstract: This paper considers a mutualistic model with time-delay. The boundedness of solution is proved by comparison principle when $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \neq 0$, and sufficient conditions for the global asymptotical stability of the positive equilibrium of the model are obtained by constructing Lyapunov function. Then by using the eigenvalue theory and taking the time delay as the parameter, the existence of Hopf branch of the system is studied, and the sufficient conditions for the existence of branch value are given. Finally, numerical simulations are given to verify the correctness of the theory.

Key words: time-delay, mutualistic model, global stability, Hopf bifurcation

种群模型的研究在生物数学的领域里有着举足轻重的地位, 通过种群间的捕食、竞争、共生等关系建立相应的数学模型来研究其渐近行为, 已经成为大多数学者所接受的研究方法^[1-9]. 其中最为经典的模型则是 Lotka-Volterra 模型:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t)(a_1 + b_1 x(t) + c_1 y(t)), \\ \dot{y}(t) = y(t)(a_2 + b_2 x(t) + c_2 y(t)). \end{cases}$$

许多学者对这样的模型进行了研究, 然而在自然界中, 种群实际也会受到年龄结构等因素的影响, 例如昆虫有从幼年到成年的发育阶段. 时滞的存在可能会对原有种群系统的渐近行为产生影响, 甚至会让原本稳定的系统变得不稳定, 产生周期解. 因此, 不少学者以[10]为理论基础对这一方面做了较深入的研究, 例如 May^[1]讨论了具有离散时滞的捕食与被捕食模型

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t)[a_1 - b_1 x_1(t) - c_1 x_2(t-\tau)], \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = x_2(t)[-a_2 + b_2 x_1(t) - c_2 x_2(t)] \end{cases}$$

的稳定性和 Hopf 分支问题, 其中 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 分别表示食饵和捕食者在 t 时刻的种群密度, 时滞 $\tau \geq 0$ 表示食饵对捕食者种群增长率的反馈时间.

2006 年, Yaneta^[2]研究了具有单个时滞的模型

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t) [a_1 - b_1 x_1(t-\tau) - c_1 x_2(t-\tau)], \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = x_2(t) [-a_2 + b_2 x_1(t-\tau) - c_2 x_2(t)] \end{cases}$$

的局部稳定性和 Hopf 分支问题.

2016 年,吕堂红,周林华,周瑞梅^[4]等人研究了具有四时滞的互惠模型

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) [r_1 - a_{11}x(t-\tau_1) + a_{12}y(t-\tau_2)], \\ \dot{y}(t) = y(t) [r_2 + a_{21}x(t-\tau_3) - a_{22}y(t-\tau_4)] \end{cases}$$

的稳定性和 Hopf 分支问题. 其中 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 分别表示食饵和捕食者在 t 时刻的种群密度,系数 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, r_1, r_2$ 均为正数,它们的生物意义见文献[9], τ_1, τ_4 分别代表两个种群的生长孕育期, τ_2, τ_3 分别代表两个种群的成熟期. 文章基于对特征方程根的分析 and 规范型理论,研究两种情形下平衡点的稳定性及局部 Hopf 分支产生的充分条件,得出确定分支周期解稳定性及分支方向的算法及计算公式.

2017 年, Hu Zhidong, Li Zhaoxing^[5]研究了具有双时滞的捕食模型

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = rx(t) - kx^2(t) - \frac{mx(t)}{a+x(t)}y(t-\tau_1), \\ \dot{y}(t) = \frac{cmx(t)}{a+x(t)}y(t-\tau_2) - Sy(t) \end{cases}$$

的稳定性及 Hopf 分支问题. 同上述时滞问题类似,利用特征值理论,研究系统的稳定性及 Hopf 分支产生的充分条件.

可见,多数学者在时滞系统研究工作中,关心的主要问题是时滞对系统的稳定性影响及 Hopf 分支问题.

1976 年, May 在文献[6]中提出了如下的一类互惠模型:

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = r_1 u \left(1 - \frac{u}{K_1 + \alpha_1 v} - \varepsilon_1 u \right), \\ \dot{v}(t) = r_2 v \left(1 - \frac{v}{K_2 + \alpha_2 u} - \varepsilon_2 v \right). \end{cases} \quad (1)$$

式中, $r_i, K_i, \alpha_i, (i=1,2)$ 是严格正的常数, $\varepsilon_i (i=1,2)$ 是非负的常数. 文献[7]对系统(1)奇点的局部稳定性做了研究,证明了在正奇点处系统是局部渐近稳定的. 但在时滞系统中,考虑其中一个种群在有成熟期和孕育期的条件下,系统的稳定性和分支值的存在性问题尚未研究,因此,本文将探究如下带有时滞的互惠模型:

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = r_1 u \left(1 - \frac{u(t-\tau_1)}{K_1 + \alpha_1 v} - \varepsilon_1 u \right), \\ \dot{v}(t) = r_2 v \left(1 - \frac{v}{K_2 + u(t-\tau_2)} - \varepsilon_2 v \right). \end{cases} \quad (2)$$

式中, $r_i, K_i, \alpha_i, (i=1,2)$ 是严格正的常数, $\varepsilon_i, \tau_i (i=1,2)$ 是非负的常数,考虑到实际问题,系统(2)初始值 $u(0) = u_0 > 0, v(0) = v_0 > 0$.

由于当 $\tau = 0$ 时,文献[7]中已经证明了系统在正平衡点 $E^*(u^*, v^*)$ 是局部渐近稳定的,因此本文将讨论 $\tau \neq 0$ 时,系统正平衡点的全局稳定性;在第二节讨论系统(2) Hopf 分支的存在性;最后一节利用 Matlab 软件将第二节讨论的结果进行数值模拟,验证理论的正确性.

1 正平衡点的全局稳定性

首先我们利用比较定理,讨论当 $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \neq 0$ 时系统(2)解的有界性.

引理 1(第一比较定理)(证明见文献[11]) 设有 Cauchy 问题

$$(E_1) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \quad (E_2) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = F(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

式中,数量值函数 f 与 F 均在 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 内连续且对 y 满足局部 Lipschitz 条件, $(x_0, y_0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. 并设 (E_1) 与 (E_2) 的解均在区间 (a, b) 内存在,分别记作

$$y = y(x) \text{ 与 } y = Y(x).$$

若

$$f(x, y) < F(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R},$$

则

$$y(x) < Y(x), \quad x_0 < x < b,$$

$$y(x) > Y(x), \quad a < x < x_0.$$

定理 1 当 $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \neq 0$ 时,系统的解 $u(t), v(t)$ 是有界的.

证明 当 $t > \tau = \max\{\tau_1, \tau_2\}$ 时,由(2)第二个等式推出

$$\frac{dv(t)}{dt} \leq v(r_2 - r_2 \varepsilon_2 v), \quad (3)$$

根据比较定理得

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} v(t) \leq \frac{1}{\varepsilon_2} \triangleq M_3. \quad (4)$$

则 $\exists T_1 > 0, M_2 > M_3$, 当 $t > T_1 > \tau$ 时,有

$$v(t) \leq M_2.$$

由(2)的第一个方程及上式,当 $t > T_1$ 时,得到

$$\frac{du(t)}{dt} \leq r_1 u \left(1 - \frac{u(t - \tau_1)}{K_1 + \alpha_1 M_2} - \varepsilon_1 u \right), \quad (5)$$

根据 $\frac{du(t)}{dt} \leq r_1 u(t)$ 推出 $\frac{du(t)}{u(t)} \leq r_1 dt$, 两边在 $[t - \tau_1, t]$ 积分得

$$\int_{t-\tau_1}^t \frac{du(t)}{u(t)} \leq \int_{t-\tau_1}^t r_1 dt = r_1 \tau_1.$$

即

$$\ln u(t) - \ln u(t - \tau_1) = \ln \frac{u(t)}{u(t - \tau_1)} \leq r_1 \tau_1, \quad (6)$$

$$u(t - \tau_1) \geq u(t) e^{-r_1 \tau_1},$$

故

$$\frac{du(t)}{dt} \leq r_1 u \left(1 - \frac{u(t) e^{-r_1 \tau_1}}{K_1 + \alpha_1 M_2} - \varepsilon_1 u \right). \quad (7)$$

由比较定理得

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} u(t) \leq \frac{K_1 + \alpha_1 M_2}{e^{-r_1 \tau_1} + \varepsilon_1 (K_1 + \alpha_1 M_2)} \triangleq M_4. \quad (8)$$

则 $\exists T_2 > T_1, M_1 > M_4$, 使得当 $t > T_2$ 时,有

$$0 < u(t) \leq M_1, 0 < v(t) \leq M_2.$$

解的有界性得证.

受文献[12]启发,构造 Lyapunov 函数 $x(t) = \ln \frac{u(t)}{u^*}, y(t) = \ln \frac{v(t)}{v^*}$, 给出系统(2)正平衡点 $E^*(u^*, v^*)$

具有全局稳定性的充分条件.

定理 2 若

$$a_{11} + a_{13} - a_{21} - a_{11}(a_{11} + a_{13})M_1\tau_1 - a_{21}a_{21}M_1\tau_2 > 0, \quad (9a)$$

$$a_{22} + a_{23} - a_{12} - a_{21}(a_{22} + a_{23})M_1\tau_2 - a_{11}a_{12}M_1\tau_1 > 0. \quad (9b)$$

式中, $a_{11} = \frac{r_1}{K_1 + \alpha_1 v^*}, a_{12} = \frac{r_1 \alpha_1 u^*}{(K_1 + \alpha_1 v^*)^2}, a_{13} = r_1 \varepsilon_1, a_{21} = \frac{r_2 \alpha_2 v^*}{(K_2 + \alpha_2 u^*)^2}, a_{22} = \frac{r_2}{K_2 + \alpha_2 u^*}, a_{23} = r_2 \varepsilon_2.$

则系统(2)的正平衡点 $E^*(u^*, v^*)$ 是全局渐近稳定的.

证明 构造 Lyapunov 函数 $x(t) = \ln \frac{u(t)}{u^*}, y(t) = \ln \frac{v(t)}{v^*}$.

即

$$u(t) = u^* e^{x(t)}, v(t) = v^* e^{y(t)}.$$

则系统(2)的第一个方程可化为

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{u(t)} \frac{du(t)}{dt} = r_1 \left[1 - \frac{u^*}{K_1 + \alpha_1 v^*} - \varepsilon_1 u^* - \left(\frac{u(t-\tau_1)}{K_1 + \alpha_1 v} - \frac{u^*}{K_1 + \alpha_1 v^*} \right) - (\varepsilon_1 u - \varepsilon_1 u^*) \right]. \quad (10)$$

令

$$f(u, v) = \frac{u}{K_1 + \alpha_1 v} - \frac{u^*}{K_1 + \alpha_1 v^*},$$

则 $f(u^*, v^*) = 0$, 利用泰勒展式将 $f(u, v)$ 在 (u^*, v^*) 处展开得

$$f(u, v) = f(u^*, v^*) + \left[(u - u^*) \frac{\partial}{\partial u} + (v - v^*) \frac{\partial}{\partial v} \right] f(u^*, v^*) + o(\rho) = \frac{-\alpha_1 u^*}{(K_1 + \alpha_1 v^*)^2} (v - v^*) + \frac{1}{K_1 + \alpha_1 v^*} (u - u^*) + o(\rho), \quad (11)$$

式中, $\rho = \sqrt{(u - u^*)^2 + (v - v^*)^2}$.

将 $f(u, v)$ 在 (u^*, v^*) 处的展式(11)代入(10)有

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left[\frac{r_1 \alpha_1 u^*}{(K_1 + \alpha_1 v^*)^2} v^* (e^{y(t)} - 1) - \frac{r_1}{K_1 + \alpha_1 v^*} u^* (e^{x(t-\tau_1)} - 1) - r_1 \varepsilon_1 u^* (e^{x(t)} - 1) \right] =$$

$$-(a_{11} + a_{13}) u^* (e^{x(t)} - 1) + a_{12} v^* (e^{y(t)} - 1) + a_{11} u^* (e^{x(t)} - e^{x(t-\tau_1)}).$$

又

$$e^{x(t)} - e^{x(t-\tau_1)} = \int_{t-\tau_1}^t e^{x(s)} \frac{dx(s)}{ds} ds = \int_{t-\tau_1}^t e^{x(s)} [-a_{11} u^* (e^{x(s-\tau_1)} - 1) + a_{12} v^* (e^{y(s)} - 1) - a_{13} u^* (e^{x(s)} - 1)] ds,$$

代入得

$$\frac{dx(t)}{dt} = -(a_{11} + a_{13}) u^* (e^{x(t)} - 1) + a_{12} v^* (e^{y(t)} - 1) +$$

$$a_{11} u^* \int_{t-\tau_1}^t e^{x(s)} [-a_{11} u^* (e^{x(s-\tau_1)} - 1) + a_{12} v^* (e^{y(s)} - 1) - a_{13} u^* (e^{x(s)} - 1)] ds. \quad (12)$$

类似地我们可以将系统(2)的第二个方程化为

$$\frac{dy(t)}{dt} = a_{21} u^* (e^{x(t)} - 1) - (a_{22} + a_{23}) v^* (e^{y(t)} - 1) - a_{21} u^* \int_{t-\tau_2}^t e^{x(s)} [a_{21} u^* (e^{x(s-\tau_2)} - 1) - (a_{22} + a_{23}) v^* (e^{y(s)} - 1)] ds. \quad (13)$$

由定理 2 知, $\exists T > \tau, M_1 > 0, M_2 > 0$, 当 $t > T$ 时, 有 $u(t) \leq M_1, v(t) \leq M_2$.

令 $V_{11}(t) = |x(t)|$, 由(12)沿着系统(12)、(13)的解计算 $V_{11}(t)$ 上的右导数. 当 $t > T$ 时, 有

$$D_{V_{11}(t)}^+ \leq -(a_{11} + a_{13}) u^* |e^{x(t)} - 1| + a_{12} v^* |e^{y(t)} - 1| + a_{11} M_1 \int_{t-\tau_1}^t [a_{11} u^* |e^{x(s-\tau_1)} - 1| + a_{12} v^* |e^{y(s)} - 1| +$$

$$a_{13} u^* |e^{x(s)} - 1|] ds \leq -(a_{11} + a_{13}) u^* |e^{x(t)} - 1| + a_{12} v^* |e^{y(t)} - 1| + a_{11}^2 M_1 u^* \int_{t-\tau_1}^t |e^{x(s-\tau_1)} - 1| ds +$$

$$a_{11} a_{12} M_1 v^* \int_{t-\tau_1}^t |e^{y(s)} - 1| ds + a_{11} a_{13} M_1 u^* \int_{t-\tau_1}^t |e^{x(s)} - 1| ds. \quad (14)$$

令

$$V_{12}(t) = a_{11}^2 M_1 u^* \left\{ \int_{t-\tau_1}^t \int_s^t |e^{x(\theta-\tau_1)} - 1| d\theta ds + \tau_1 \int_{t-\tau_1}^t |e^{x(s)} - 1| ds \right\} +$$

$$a_{11} a_{12} M_1 v^* \int_{t-\tau_1}^t \int_s^t |e^{y(\theta)} - 1| d\theta ds + a_{11} a_{13} M_1 u^* \int_{t-\tau_1}^t \int_s^t |e^{x(\theta)} - 1| d\theta ds,$$

则

$$D_{V_{12}(t)}^+ = a_{11}^2 M_1 u^* \left\{ \int_{t-\tau_1}^t |e^{x(t-\tau_1)} - 1| ds + 0 - \int_{t-\tau_1}^t |e^{x(\theta-\tau_1)} - 1| d\theta + \tau_1 [|e^{x(t)} - 1| - |e^{x(t-\tau_1)} - 1|] \right\} +$$

$$a_{11} a_{12} M_1 v^* \left[\int_{t-\tau_1}^t |e^{y(t)} - 1| ds + 0 - \int_{t-\tau_1}^t |e^{y(\theta)} - 1| d\theta \right] +$$

$$a_{11} a_{13} M_1 u^* \left[\int_{t-\tau_1}^t |e^{x(t)} - 1| ds + 0 - \int_{t-\tau_1}^t |e^{x(\theta)} - 1| d\theta \right]. \quad (15)$$

由(14),(15)得

$$D_{(V_{11}(t)+V_{12}(t))}^+ \leq -[(a_{11}+a_{13})u^* - a_{11}^2 M_1 u^* \tau_1 - a_{11} a_{13} M_1 u^* \tau_1] |e^{x(t)} - 1| + (a_{12} v^* + a_{11} a_{12} M_1 v^* \tau_1) |e^{y(t)} - 1|. \quad (16)$$

类似地令 $V_{21}(t) = |y(t)|$,

则

$$D_{V_{21}(t)}^+ \leq a_{21} u^* |e^{x(t)} - 1| - (a_{22} + a_{23}) v^* |e^{y(t)} - 1| +$$

$$a_{21}^2 M_1 u^* \int_{t-\tau_2}^t [|e^{x(s-\tau_2)} - 1| ds + a_{21} (a_{22} + a_{23}) M_1 v^* \int_{t-\tau_2}^t |e^{y(s)} - 1|] ds.$$

令

$$V_{22}(t) = a_{21}^2 M_1 u^* \left\{ \int_{t-\tau_2}^t \int_s^t |e^{x(\theta-\tau_2)} - 1| d\theta ds + \tau_2 \int_{t-\tau_2}^t |e^{x(s)} - 1| ds \right\} +$$

$$a_{21} (a_{22} + a_{23}) M_1 v^* \int_{t-\tau_2}^t \int_s^t |e^{y(\theta)} - 1| d\theta ds,$$

则

$$D_{V_{22}(t)}^+ = a_{21}^2 M_1 u^* \left\{ \int_{t-\tau_2}^t |e^{x(t-\tau_2)} - 1| ds + 0 - \int_{t-\tau_2}^t |e^{x(\theta-\tau_2)} - 1| d\theta + \tau_2 [|e^{x(t)} - 1| - |e^{x(t-\tau_2)} - 1|] \right\} +$$

$$a_{21} (a_{22} + a_{23}) M_1 v^* \left[\int_{t-\tau_2}^t |e^{y(t)} - 1| ds + 0 - \int_{t-\tau_2}^t |e^{y(\theta)} - 1| d\theta \right].$$

于是

$$D_{(V_{21}(t)+V_{22}(t))}^+ \leq -(-a_{21}^2 M_1 u^* \tau_2 - a_{21} u^*) |e^{x(t)} - 1| + [-(a_{22} + a_{23}) v^* + a_{21} (a_{22} + a_{23}) M_1 v^* \tau_2] |e^{y(t)} - 1|. \quad (17)$$

令

$$V(t) = V_{11}(t) + V_{12}(t) + V_{21}(t) + V_{22}(t),$$

有

$$D_{V(t)}^+ \leq -\sigma_1 u^* |e^{x(t)} - 1| - \sigma_2 v^* |e^{y(t)} - 1|,$$

式中

$$\sigma_1 = a_{11} + a_{13} - a_{21} - a_{11} (a_{11} + a_{13}) M_1 \tau_1 - a_{21} a_{21} M_1 \tau_2,$$

$$\sigma_2 = a_{22} + a_{23} - a_{12} - a_{21} (a_{22} + a_{23}) M_1 \tau_2 - a_{11} a_{12} M_1 \tau_1.$$

取

$$\min \{ \sigma_1, \sigma_2 \} = \sigma,$$

则

$$D_{V(t)}^+ \leq -\sigma [|e^{x(t)} - 1| + |e^{y(t)} - 1|],$$

故

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (|x(t)| + |y(t)|) = 0.$$

得 $x(t) = 0, y(t) = 0$, 即当 $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$ 时, 系统(12)、(13)的零解全局渐近稳定, 从而系统(2)的正奇点 $E^*(u^*, v^*)$ 是全局稳定的, 得证.

2 Hopf 分支的存在性

本节我们将通过特征值理论讨论系统(2) Hopf 分支的存在性, 文献[3-5]均是利用特征值理论来分析给出了分支值存在的充分条件, 我们也采用同样的方法来给出系统(2)分支值存在的充分条件.

定理 3 若 $P+R>0, Q>S, |Q|>|S|$ 且 $H_0>0$ (H_0 在计算中给出), 则:

(1) 存在分支值 τ_0 , 当 $\tau \in [0, \tau_0)$ 时, 正奇点 $E^*(u^*, v^*)$ 渐近稳定;

(2) 当 $\tau > \tau_0$ 时, 系统(2)存在一个 Hopf 分支, 即当 $\tau > \tau_0$ 时, 系统产生周期解.

$$\text{式中, } P = r_1 \varepsilon_1 u^* + r_2 \varepsilon_2 v^* + \frac{r_2 v^*}{K_2 + \alpha_2 u^*}, R = \frac{r_1 u^*}{K_1 + \alpha_1 v^*}, S = -\varepsilon_1 \varepsilon_2 r_1 r_2 u^* v^* - \frac{\varepsilon_1 r_1 r_2 u^* v^*}{K_2 + \alpha_2 u^*}, Q = \frac{\varepsilon_2 r_1 r_2 u^* v^*}{K_1 + \alpha_1 v^*} + \frac{r_1 r_2 u^* v^*}{\alpha_1 \alpha_2 r_1 r_2 u^{*2} v^{*2}} - \frac{r_1 r_2 u^* v^*}{(K_1 + \alpha_1 v^*)(K_2 + \alpha_2 u^*)(K_1 + \alpha_1 v^*)^2 (K_2 + \alpha_2 u^*)^2}.$$

证明 首先根据特征值理论给出分支值的计算公式, 最后通过对特征根的分析, 利用微分方程稳定性理论给出分支值存在的充分条件.

(1) 在 E^* 处的线性渐近方程

令 $x(t) = u(t) - u^*, y(t) = v(t) - v^*$, (2) 等式一可化为:

$$\frac{dx(t)}{dt} = r_1 u \left[1 - \frac{u^*}{K_1 + \alpha_1 v^*} - \varepsilon_1 u^* - \left(\frac{u(t-\tau_1)}{K_1 + \alpha_1 v} - \frac{u^*}{K_1 + \alpha_1 v^*} \right) - (\varepsilon_1 u - \varepsilon_1 u^*) \right].$$

令 $f(u, v) = \frac{u}{K_1 + \alpha_1 v} - \frac{u^*}{K_1 + \alpha_1 v^*}$, 则 $f(u^*, v^*) = 0$, 利用泰勒展式将 $f(u, v)$ 在 (u^*, v^*) 处展开得

$$f(u, v) = f(u^*, v^*) + \left[(u - u^*) \frac{\partial}{\partial u} + (v - v^*) \frac{\partial}{\partial v} \right] f(u^*, v^*) + o(\rho) = \frac{-\alpha_1 u^*}{(K_1 + \alpha_1 v^*)^2} (v - v^*) + \frac{1}{K_1 + \alpha_1 v^*} (u - u^*) + o(\rho),$$

式中, $\rho = \sqrt{(u - u^*)^2 + (v - v^*)^2}$.

则

$$\frac{dx(t)}{dt} = r_1 (x(t) + u^*) \left[-\varepsilon_1 x(t) + \frac{\alpha_1 u^*}{(K_1 + \alpha_1 v^*)^2} y(t) - \frac{1}{K_1 + \alpha_1 v^*} x(t - \tau_1) \right]. \quad (18)$$

同样的方法我们可以求出

$$\frac{dy(t)}{dt} = r_2 (y(t) + v^*) \left[-\varepsilon_2 y(t) + \frac{\alpha_2 v^*}{(K_2 + \alpha_2 u^*)^2} x(t - \tau_2) - \frac{1}{K_2 + \alpha_2 u^*} y(t) \right]. \quad (19)$$

于是其一阶线性渐近方程为

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = r_1 u^* \left[-\varepsilon_1 x(t) + \frac{\alpha_1 u^*}{(K_1 + \alpha_1 v^*)^2} y(t) - \frac{1}{K_1 + \alpha_1 v^*} x(t - \tau_1) \right], \\ \frac{dy(t)}{dt} = r_2 v^* \left[-\varepsilon_2 y(t) + \frac{\alpha_2 v^*}{(K_2 + \alpha_2 u^*)^2} x(t - \tau_2) - \frac{1}{K_2 + \alpha_2 u^*} y(t) \right]. \end{cases} \quad (20a)$$

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = r_1 u^* \left[-\varepsilon_1 x(t) + \frac{\alpha_1 u^*}{(K_1 + \alpha_1 v^*)^2} y(t) - \frac{1}{K_1 + \alpha_1 v^*} x(t - \tau_1) \right], \\ \frac{dy(t)}{dt} = r_2 v^* \left[-\varepsilon_2 y(t) + \frac{\alpha_2 v^*}{(K_2 + \alpha_2 u^*)^2} x(t - \tau_2) - \frac{1}{K_2 + \alpha_2 u^*} y(t) \right]. \end{cases} \quad (20b)$$

(2) 线性方程的特征方程

令 $x(t) = c_1 e^{\lambda t}, y(t) = c_2 e^{\lambda t}$, 约定 $\tau_1 = \tau_2 = \tau$, 则(20a)可化为

$$\begin{aligned} \lambda c_1 e^{\lambda t} &= -r_1 u^* \varepsilon_1 e^{\lambda t} c_1 + \frac{\alpha_1 r_1 u^{*2}}{(K_1 + \alpha_1 v^*)^2} e^{\lambda t} c_2 - \frac{r_1 u^*}{K_1 + \alpha_1 v^*} e^{\lambda(t-\tau)} c_1, \\ \lambda c_1 &= -r_1 u^* \varepsilon_1 c_1 + \frac{\alpha_1 r_1 u^{*2}}{(K_1 + \alpha_1 v^*)^2} c_2 - \frac{r_1 u^*}{K_1 + \alpha_1 v^*} e^{-\lambda \tau} c_1. \end{aligned}$$

同理(20b)可化为

$$\lambda c_2 = -r_2 v^* \varepsilon_2 c_2 + \frac{\alpha_2 r_2 v^{*2}}{(K_2 + \alpha_2 u^*)^2} e^{-\lambda \tau} c_1 - \frac{r_2 v^*}{K_2 + \alpha_2 u^*} c_2,$$

整理得到关于 c_1, c_2 的方程组

$$\begin{cases} c_1 \left(\lambda + r_1 u^* \varepsilon_1 + \frac{r_1 u^*}{K_1 + \alpha_1 v^*} e^{-\lambda \tau} \right) - c_2 \frac{\alpha_1 r_1 u^{*2}}{(K_1 + \alpha_1 v^*)^2} = 0, \\ c_1 \frac{\alpha_2 r_2 v^{*2}}{(K_2 + \alpha_2 u^*)^2} e^{-\lambda \tau} - c_2 \left(\lambda + r_2 v^* \varepsilon_2 + \frac{r_2 v^*}{K_2 + \alpha_2 u^*} \right) = 0, \end{cases} \quad (21a)$$

$$\begin{cases} c_1 \left(\lambda + r_1 u^* \varepsilon_1 + \frac{r_1 u^*}{K_1 + \alpha_1 v^*} e^{-\lambda \tau} \right) - c_2 \frac{\alpha_1 r_1 u^{*2}}{(K_1 + \alpha_1 v^*)^2} = 0, \\ c_1 \frac{\alpha_2 r_2 v^{*2}}{(K_2 + \alpha_2 u^*)^2} e^{-\lambda \tau} - c_2 \left(\lambda + r_2 v^* \varepsilon_2 + \frac{r_2 v^*}{K_2 + \alpha_2 u^*} \right) = 0, \end{cases} \quad (21b)$$

则方程组关于 c_1, c_2 有非零解的充要条件是

$$\begin{vmatrix} \lambda + r_1 \varepsilon_1 u^* + \frac{r_1 u^*}{K_1 + \alpha_1 v^*} e^{-\lambda \tau} & -\frac{\alpha_1 r_1 u^{*2}}{(K_1 + \alpha_1 v^*)^2} \\ \frac{\alpha_2 r_2 v^{*2}}{(K_2 + \alpha_2 u^*)^2} e^{-\lambda \tau} & -\left(\lambda + r_2 v^* \varepsilon_2 + \frac{r_2 v^*}{K_2 + \alpha_2 u^*} \right) \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$\lambda^2 + P\lambda + Qe^{-\lambda \tau} + R\lambda e^{-\lambda \tau} - S = 0. \quad (22)$$

(3) 求分支值

令 $\lambda = iy (y > 0)$, 代入(22)并分离实部虚部得

$$\begin{cases} Ry \sin(y\tau) + Q \cos(y\tau) = y^2 + S, \\ Q \sin(y\tau) - Ry \cos(y\tau) = Py. \end{cases}$$

解得

$$\sin(y\tau) = \frac{-Ry^3 - (PQ + RS)y}{-R^2y^2 - Q^2}, \cos(y\tau) = \frac{(PR - Q)y^2 - QS}{-R^2y^2 - Q^2}. \quad (23)$$

由 $\sin^2(y\tau) + \cos^2(y\tau) = 1$, 得

$$R^2y^6 + (2R^2S + P^2R^2 + Q^2 - R^4)y^4 + (P^2Q^2 + R^2S^2 + 2Q^2S - 2Q^2R^2)y^2 + Q^2S^2 - Q^4 = 0.$$

设 $Z = y^2$, 则上式变为

$$R^2Z^3 + (2R^2S + P^2R^2 + Q^2 - R^4)Z^2 + (P^2Q^2 + R^2S^2 + 2Q^2S - 2Q^2R^2)Z + Q^2S^2 - Q^4 = 0. \quad (24)$$

可知, 当 $|S| < |Q|$ 时, (24) 至少有一个正根, 最多 3 个正根, 不失一般性, 设上式有 3 个正实根 Z_1, Z_2, Z_3 ,

于是 $y_p = \sqrt{Z_p} \quad (p=1, 2, 3)$, 代入(23)得

$$\begin{aligned} \cos(y_p \tau) &= \frac{(PR - Q)y_p^2 - QS}{-R^2y_p^2 - Q^2}, \\ \tau_p^i &= \frac{1}{y_p} \left[\arccos \frac{(PR - Q)y_p^2 - QS}{-R^2y_p^2 - Q^2} + 2j\pi \right] \quad p=1, 2, 3; j=0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (25)$$

(4) 分支值存在的条件

记 $\tau_0 = \tau_{p_0}^0 = \min_{1 \leq p \leq 3} \{ \tau_p^0 \}, y_0 = y_{p_0}$.

当 $\tau = 0$ 时, (21) 式变为

$$\lambda^2 + \lambda(P + R) + Q - S = 0, \quad (26)$$

于是当 $P + R > 0$, 且 $Q - S > 0$ 即 $Q > S$ 时, (26) 的根具有负实部, 从而正奇点渐近稳定. 并且由文献[4-5]

知, 若分支值存在, 则要求 $\operatorname{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right) \Big|_{\tau=\tau_0}^{y=y_0} > 0$.

视 $\lambda = \lambda(\tau)$, 由(22)求 λ 关于 τ 的导数:

$$2\lambda \frac{d\lambda}{d\tau} + P \frac{d\lambda}{d\tau} + Qe^{-\lambda \tau} \left(-\tau \frac{d\lambda}{d\tau} - \lambda \right) + R \left[e^{-\lambda \tau} \frac{d\lambda}{d\tau} + \lambda e^{-\lambda \tau} \left(-\tau \frac{d\lambda}{d\tau} - \lambda \right) \right] = 0,$$

即 $\frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{\lambda Q e^{-\lambda \tau} + \lambda^2 R e^{-\lambda \tau}}{2\lambda + P + R e^{-\lambda \tau} - \tau Q e^{-\lambda \tau} - R \tau \lambda e^{-\lambda \tau}}$, 当 $\lambda = iy, y = y_0, \tau = \tau_0$ 时, 有

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} = \left[\frac{2\lambda + P + R e^{-\lambda \tau} - \tau Q e^{-\lambda \tau} - R \tau \lambda e^{-\lambda \tau}}{\lambda Q e^{-\lambda \tau} + \lambda^2 R e^{-\lambda \tau}} \right]_{\tau=\tau_0}^{y=y_0} = \frac{H_0 + iH_1}{[y_0 Q \sin(y_0 \tau_0) - y_0^2 R \cos(y_0 \tau_0)]^2 + [y_0 Q \cos(y_0 \tau_0) + y_0^2 R \sin(y_0 \tau_0)]^2},$$

式中

$$\begin{aligned} H_0 &= [P - y_0 \tau_0 R \sin(y_0 \tau_0) - \tau_0 Q \cos(y_0 \tau_0) + R \cos(y_0 \tau_0)] [y_0 Q \sin(y_0 \tau_0) - y_0^2 R \cos(y_0 \tau_0)] + \\ &\quad [2y_0 + \tau_0 Q \sin(y_0 \tau_0) - R \sin(y_0 \tau_0) - y_0 \tau_0 R \cos(y_0 \tau_0)] [y_0 Q \cos(y_0 \tau_0) + y_0^2 R \sin(y_0 \tau_0)], \\ H_1 &= [2y_0 + \tau_0 Q \sin(y_0 \tau_0) - R \sin(y_0 \tau_0) - y_0 \tau_0 R \cos(y_0 \tau_0)] [y_0 Q \sin(y_0 \tau_0) - y_0^2 R \cos(y_0 \tau_0)] - \\ &\quad [P - y_0 \tau_0 R \sin(y_0 \tau_0) - \tau_0 Q \cos(y_0 \tau_0) + R \cos(y_0 \tau_0)] [y_0 Q \cos(y_0 \tau_0) + y_0^2 R \sin(y_0 \tau_0)]. \end{aligned}$$

即 $P + R > 0, Q > S, |Q| > |S|$ 且 $H_0 > 0$ 时, 分支值 τ_0 存在, 且 $\tau \in [0, \tau_0)$ 时, 正奇点 $E^*(u^*, v^*)$ 渐近稳定;

$\tau > \tau_0$ 时,系统(2)存在一个 Hopf 分支.

3 数值模拟

本节通过 MATLAB 软件,取定一些数值,来验证定理 3 理论的正确性.

令 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0; \alpha_1 = \alpha_2 = 0.5; K_1 = K_2 = 10; r_1 = r_2 = 1$.

得 $P=1, Q=0.75, R=1, S=0$,显然满足定理条件,由(24)得 Z 的唯一正实根 $Z_0=0.75$,则 $y_0 = \sqrt{Z_0} \approx 0.866\ 025$,代入式(24)得 $\tau_0 \approx 1.979\ 27$.

取 $\tau=1.5$ 与 $\tau=2.0$ 进行数值模拟:

由图 1 可以清楚地看到,当 $\tau=1.5 < \tau_0$ 时,系统在 $E^*(u^*, v^*) = (20, 20)$ 处渐近稳定;当 $\tau=2.0 > \tau_0$ 时,系统产生周期解.

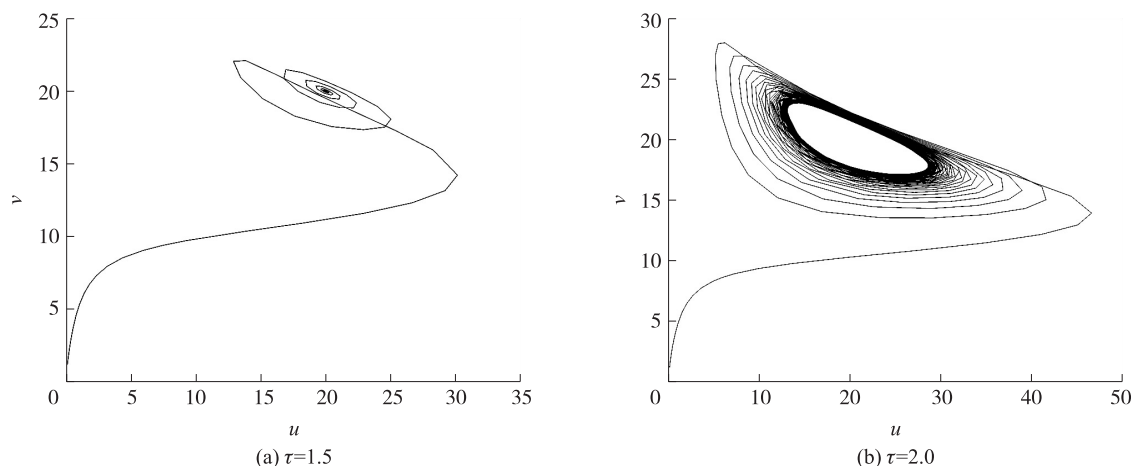


图 1 解轨迹线

Fig. 1 The trajectory of the solution

[参考文献]

- [1] MAY R M. Time delay versus stability in population models with two and three trophic levels[J]. Ecology, 1973, 4:315-325.
- [2] YAN X P, ZHANG C H. Hopf bifurcation in a delayed Lotka-Volterra predator-prey system[J]. Nonlinear analysis: RWA, 2006, 9(1):114-127.
- [3] 贾艳丽, 陈斯养. 具有时滞的 Lotka-Volterra 模型的 Hopf 分支与数值模拟[J]. 科学技术与工程, 2011(5):1671-1815.
- [4] 吕堂红, 周林华, 高瑞梅. 一类四时滞互惠合作模型的稳定性及 Hopf 分支分析[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2016, 33(5):571-580.
- [5] HU Z D, LI Z X. Stability and Hopf bifurcation analysis in a predator-prey system with two-delays[J]. Journal of biomathematics, 2017, 32(4):409-420.
- [6] MAY R M. Models of two interacting populations, in theoretical ecology: principles and application[M]. Philadelphia, PA: Saunders, 1976:78-104.
- [7] LI M. Dynamics of a mutualistic model with diffusion[J]. Anal Theory Appl, 2017, 33:206-218.
- [8] HOLLAND J N, DEANGELIS D L. A consumer-resource approach to the density-dependent population dynamics of mutualism[J]. Ecology, 2010, 91:1286-1295.
- [9] 魏章志, 王良龙. 多时滞合作系统的稳定性与全局 Hopf 分支[J]. 大学数学, 2010, 27(1):80-84.
- [10] HOPF E. Abzweigung einer priodischen losung von einer stationaren losung einer differential systems[J]. Ber Math Phys Sachs Akad Wiss Leipzig, 1942:1-22.
- [11] 马知恩, 周义仓. 常微分方程定性稳定性方法[M]. 北京: 科学出版社, 2001.
- [12] 林支桂. 数学生态学导引[M]. 北京: 科学出版社, 2013.

[责任编辑: 陆炳新]