doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2019.03.020

切模丛的构造及其性质研究

张飞军

(陕西师范大学数学与信息科学学院,陕西 西安 710119)

[**摘要**] 本文在流形上构造了切模丛,在切模丛上给出了光滑结构使它成为一个光滑流形,然后讨论了切模丛的性质并给出了该模丛上的 Poisson 括号积使它成为一个李代数.

[**关键词**] 流形,向量丛,模丛,切模丛

[**中图分类号**]O189.3 [**文献标志码**]A [**文章编号**]1001-4616(2019)03-0151-06

Study on Constructions and Properties of Tangent Module Bundles

Zhang Feijun

(School of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710119, China)

Abstract: In this paper, the tangent module bundles are constructed on a manifold. It gives a smooth structure on the tangent module bundles which makes it a smooth manifold. Then we discuss the properties of the tangent module bundles and give the bracket product of Poisson on the module bundles such that it is a Lie algebra.

Key words: manifold, vector bundles, module bundles, tangent module bundles

纤维丛理论是研究现代微分几何、大范围分析、拓扑与理论物理等的重要工具,其中的切丛是应用最广的一种纤维丛. 代数拓扑中的 Tairy ball theorem 定理即通俗称为毛球定理[1]就是纤维丛理论中很有实用特性的一个定理,在气象学上对它有个有趣的理想化状态下的应用解释:如果我们把大气的运动-风看为地球表面的一个向量,那么这个向量场连续,覆盖地球表面的大气层可以看作是连续分布的切丛的某一截面. 我们如果忽略空气的垂直运动,作为理想化的模型,毛球定理说明零点存在,即必然有空气静止的点,并且是孤立点,这就是旋风的中心点.但在现实中我们知道,当空气围绕地面向树木、丘陵、建筑物等不平的地方流动时,或者空气和地面发生摩擦时,要急速地改变它的前进方向,于是就会产生随气流一同移动的涡旋,就刮起了旋风. 就这个现实来说,空气总在运动,而零点是在某个区域某一时刻瞬间存在的,这个存在的点是受局地气候、复杂地形等的影响,一般情况下它不是一个理想化状态. 为了考察某一区域内随时间、周围环境、地形地貌等变化的向量场的规律,较为精准的反映出这个事实,我们引入模丛理论[2],在流形上建立切模丛使这个向量场的变化与局域函数有关系是很有必要性的.

1 切模丛的建立

设 M 是 m 维光滑流形,(U_α, x_α^i) 是 M 的局部坐标系,对任意点 $p \in U_\alpha$,记 T_pM 是 p 点处的切空间,$\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_\alpha^i}: 1 \leqslant i \leqslant m\right\}$ 是 T_pM 的一个基底,$C_p^\infty(U_\alpha)$ 表示 p 点某一邻域 U_α 上的光滑函数,在 $C_p^\infty(U_\alpha)$ 中定义关系 $\sim$ 如下:

设 $f, g \in C_p^\infty(U_\alpha)$,则 $f \sim g$ 当且仅当 $f(p) = g(p)$,$\dfrac{\partial}{\partial x_\alpha^i}(f) = \dfrac{\partial}{\partial x_\alpha^i}(g)$,$i = 1, \cdots, m$.

显然,关系 $\sim$ 是 $C_p^\infty(U_\alpha)$ 中的等价关系,记 $D_p^\infty(U_\alpha) = C_p^\infty(U_\alpha)/\sim$,即 $D_p^\infty(U_\alpha)$ 是 $C_p^\infty(U_\alpha)$ 按关系 $\sim$ 分类

收稿日期:2018-09-03.

基金项目:国家自然科学基金(11571214).

通讯联系人:张飞军,副教授,研究方向:微分几何理论及其应用. E-mail:fjzhang@snnu.edu.cn

的商空间. 这种分类与坐标以及切空间的基选取都无关,因为若(U_β,x_β^i)是点 p 的另一局部坐标系,即 $p\in U_\alpha\cap U_\beta$,则也有

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta^i}(f)=\sum_{k=1}^m\frac{\partial}{\partial x_\alpha^k}(f)\frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_\beta^i}=\sum_{k=1}^m\frac{\partial}{\partial x_\alpha^k}(g)\frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_\beta^i}=\frac{\partial}{\partial x_\beta^i}(g).$$

所以在局部坐标系(U_α,x_α^i),(U_β,x_β^i)下,$f\sim g$,文献[3]称此为切空间中的函数芽.

设 $\boldsymbol{X}\in T_pM,f\in D_p^\infty(U_\alpha),g\in C_p^\infty(U_\alpha)$, 映射 $f\boldsymbol{X}$ 定义为

$$f\boldsymbol{X}(g)=\boldsymbol{X}(f\cdot g)=\boldsymbol{X}(f)\cdot g(p)+f(p)\cdot\boldsymbol{X}(g).\tag{1}$$

在此定义下容易验证 $f(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})=f\boldsymbol{X}+f\boldsymbol{Y}$ 和 $(f+h)\boldsymbol{X}=f\boldsymbol{X}+h\boldsymbol{X}$ 是成立的,其中 $h\in D_p^\infty(U_\alpha)$. 此时 T_pM 可以看作是环 $D_p^\infty(U_\alpha)$ 上的模,为了和切向量空间 T_pM 作一区别,我们记该模空间为 D_pM.特别地,若 f 是常函数,则 $f\boldsymbol{X}\in T_pM$,说明上述定义是切空间定义的推广.

令 $DM=\bigcup_{p\in M}D_pM$,它是光滑流形 M 上全体模空间 D_pM 的集合.下面我们给它赋予一个拓扑结构和光滑流形结构,使它成为一个光滑流形.

设映射 $\boldsymbol{\pi}:DM\to M$ 定义如下:对于任意的 $f\boldsymbol{X}\in D_pM,p\in M$, 令 $\boldsymbol{\pi}(f\boldsymbol{X})=p$.这样对于每一点 $p\in M$, $\boldsymbol{\pi}^{-1}(p)=D_pM$.

假定 M 的光滑结构是 $\mathscr{A}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha):\alpha\in I\}$,令

$$W_\alpha=\boldsymbol{\pi}^{-1}(U_\alpha)=\bigcup_{p\in U_\alpha}D_pM,$$

于是 $\bigcup_{\alpha\in I}W_\alpha=DM$.对于每一个指标 $\alpha\in I$,定义映射 $\psi_\alpha:U_\alpha\times R^{2m+1}\to\boldsymbol{\pi}^{-1}(U_\alpha)$ 如下:

$$p\in U_\alpha,t=(c,z^1,\cdots,z^m,y^1,\cdots,y^m)\in R^{2m+1},$$

则

$$\psi_\alpha(p,t)=f\boldsymbol{X}.$$

式中 $x^i=(\varphi_\alpha)^i,1\leqslant i\leqslant m$ 是 U_α 上由坐标映射 φ_α 给出的局部坐标系,$f(p)=c,\frac{\partial}{\partial x^i}(f)=\left.\frac{\partial(f\circ\varphi_\alpha^{-1})}{\partial x^i}\right|_p=z^i$, $\boldsymbol{X}=\sum_{i=1}^m y_i\frac{\partial}{\partial x^i}$. 这样的映射 f 显然是 $D_p^\infty(U_\alpha)$ 中唯一确定的元素,因此映射

$$\psi_\alpha:U_\alpha\times R^{2m+1}\to\boldsymbol{\pi}^{-1}(U_\alpha)$$

是 1-1 映射.

考虑 DM 的子集族

$$\mathscr{B}=\bigcup_{\alpha\in I}\{\psi_\alpha(W):W\text{ 是 }U_\alpha\times R^{2m+1}\text{中任意开集}\}.$$

下面验证 $\mathscr{B}$ 是 DM 的一个拓扑基.因为 $\boldsymbol{\pi}^{-1}(U_\alpha)$ 构成 DM 的一个开覆盖.

假定 $f\boldsymbol{X}\in DM$, 并且属于 B 中两个成员的交集.设这两个成员是 $\psi_\alpha(D_1\times V_1)$ 和 $\psi_\alpha(D_2\times V_2)$,其中 D_1、D_2分别是 U_α、U_β 中的开子集,V_1,V_2是 R^{2m+1}中的开子集.

设 $p=\boldsymbol{\pi}(f\boldsymbol{X})\in D_1\cap D_2\subset U_\alpha\cap U_\beta$,

并且

$$f\boldsymbol{X}=\psi_\alpha(p,t)=\psi_\alpha(\varphi_\alpha^{-1}(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^m),(c,z^1,\cdots,z^m,y^1,\cdots,y^m))=$$
$$\psi_\beta(p,\tilde{t})=\psi_\beta(\varphi_\beta^{-1}(x_\beta^1,\cdots,x_\beta^m),(c,\tilde{z}^1,\cdots,\tilde{z}^m,\tilde{y}^1,\cdots,\tilde{y}^m)).$$

其中$(c,z^1,\cdots,z^m,y^1,\cdots,y^m)\in V_1$,$(c,\tilde{z}^1,\cdots,\tilde{z}^m,\tilde{y}^1,\cdots,\tilde{y}^m)\in V_2$,因而它们之间有关系式

$$x_\alpha^j=(\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1})^j(x_\beta^1,\cdots,x_\beta^m),\frac{\partial}{\partial x_\alpha^j}(f)=\sum_{i=1}^m\frac{\partial(f\circ\varphi_\beta^{-1})}{\partial x_\beta^i}\frac{\partial x_\beta^i}{\partial x_\alpha^j},y^j=\sum_{i=1}^m\tilde{y}^i\frac{\partial x_\alpha^j}{\partial x_\beta^i}.$$

这个对应关系关于变量是光滑的,其中$\left(\frac{\partial x_\alpha^j}{\partial x_\beta^i}\right)$是光滑流形 M 上从局部坐标系(U_β,x_β^i) 到局部坐标系(U_α,x_α^i)的坐标变换的 Jacobi 矩阵.如果设$\frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}(f)=z^i$,$\frac{\partial}{\partial x_\beta^i}(f)=\tilde{z}^i$,则上述关系式为

$$z^j=\sum_{i=1}^{m}\tilde{z}^i\frac{\partial x_\beta^i}{\partial x_\alpha^j},y^j=\sum_{i=1}^{m}\tilde{y}^i\frac{\partial x_\alpha^j}{\partial x_\beta^i},\quad j=1,\cdots,m. \tag{2}$$

式(2)中第一个变换表达式是1阶反变张量,第二个变换表达式是1阶共变张量,它们都是关于变量的光滑函数.

定义映射 $\Phi_{\alpha\beta}:(U_\alpha\times U_\beta)\times R^{2m+1}\to(U_\alpha\times U_\beta)\times R^{2m+1}$ 使得

$$\Phi_{\alpha\beta}(p,(,\tilde{z}^1,\cdots,\tilde{z}^m,\tilde{y}^1,\cdots,\tilde{y}^m))=(p,(z^1,\cdots,z^m,y^1,\cdots,y^m)),$$

其中 $(z^1,\cdots,z^m,y^1,\cdots,y^m)$ 是从 $(\tilde{z}^1,\cdots,\tilde{z}^m,\tilde{y}^1,\cdots,\tilde{y}^m)$ 按照(1)式计算的结果.因此 z^i 和 y^i 是关于 $\tilde{z}^1,\cdots,\tilde{z}^m$, $\tilde{y}^1,\cdots,\tilde{y}^m$ 的光滑函数.由于 $\det\left(\frac{\partial x_\alpha^j}{\partial x_\beta^i}\right)\neq0$,所以 $\Phi_{\alpha\beta}$ 有逆映射 $\Phi_{\beta\alpha}=\Phi_{\alpha\beta}^{-1}$,它也是光滑的,所以 $\Phi_{\alpha\beta}$ 是光滑同胚,它将开集映为开集.由定义可知,$\Phi_{\alpha\beta}$ 与 ψ_α,ψ_β 之间的关系是

$$\psi_\alpha\circ\Phi_{\alpha\beta}\circ\psi_\beta^{-1}=id:\pi^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)\to\pi^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta),$$

即

$$\psi_\alpha\circ\Phi_{\alpha\beta}=\psi_\beta:(U_\alpha\cap U_\beta)\times R^{2m+1}\to\pi^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta).$$

不妨取 $D_1=D_2=D_1\cap D_2$,则 $\Phi_{\alpha\beta}(D_2\times V_2)$ 是 $U_\alpha\times R^{2m+1}$ 中的开子集,并且

$$\Phi_{\alpha\beta}\circ\psi_\beta^{-1}(f\boldsymbol{X})=\psi_\alpha^{-1}(f\boldsymbol{X})\in D_1\times V_1.$$

又因为 $\psi_\beta^{-1}(f\boldsymbol{X})\in D_2\times V_2$, 就有 $\Phi_{\alpha\beta}\circ\psi_\beta^{-1}(f\boldsymbol{X})\in\Phi_{\alpha\beta}(D_2\times V_2)$.

所以 $\Phi_{\alpha\beta}(D_2\times V_2)\cap(D_1\times V_1)\neq\varnothing$.

因此,存在 $\psi_\alpha^{-1}(f\boldsymbol{X})$ 在 $U_\alpha\times R^{2m+1}$ 中的开邻域

$$D\times V\subset\Phi_{\alpha\beta}(D_2\times V_2)\cap(D_1\times V_1),$$

其中 D 是 U_α 中的开集,V 是 R^{2m+1} 中的开子集.这样 $\psi_\alpha(D\times V)\in\mathscr{B}$,并且

$$f\boldsymbol{X}\in\psi_\alpha(D\times V)\subset\psi_\beta(D_2\times V_2)\quad\psi_\alpha(D_1\times V_1).$$

这样就证明了 $\mathscr{B}$ 是 DM 的拓扑基.下面我们在 DM 建立光滑结构,使它成为微分流形.

因为 $\{\pi^{-1}(U_\alpha):\alpha\in I\}$ 构成 DM 的一个开覆盖.对每一个指标 $\alpha\in I$,定义映射 $\xi_\alpha:\pi^{-1}(U_\alpha)\to R^{3m+1}$ 如下:

$$\zeta_\alpha(f\boldsymbol{X})=(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^m,c,z_\alpha^1,\cdots,z_\alpha^m,y_\alpha^1,\cdots,y_\alpha^m),$$

这样,ξ_α 是从 $\pi^{-1}(U_\alpha)$ 到开集 $\varphi_\alpha(U_\alpha)\times R^{2m+1}\subset R^{3m+1}$ 中的同胚,因此 $(\pi^{-1}(U_\alpha),\zeta_\alpha)$ 是 DM 的一个坐标卡.若 $\pi^{-1}(U_\alpha)\cap\pi^{-1}(U_\beta)\neq\varnothing$, 则 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$,于是当 $\pi^{-1}(U_\alpha)\cap\pi^{-1}(U_\beta)\neq\varnothing$ 时,坐标变换

$$\zeta_\beta\circ\zeta_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\times R^{2m+1}\to\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)\times R^{2m+1}$$

由下式给出:

$$\zeta_\beta\circ\zeta_\alpha^{-1}(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^m,c,z^1,\cdots,z^m,y^1,\cdots,y^m)=(x_\beta^1,\cdots,x_\beta^m,c,\tilde{z}^1,\cdots,\tilde{z},\tilde{y}^1,\cdots,\tilde{y}^m),$$

结合变换表达式(1)这样就使得 DM 成为一个 $3m+1$ 维的光滑流形.由此有下列定理:

定理1 设 $DM=\bigcup\limits_{p\in M}D_pM$ 是光滑流形 M 上全体模空间 D_pM 的集合,则它构成了一个 $3m+1$ 维的光滑流形.

这样,我们就称 DM 为光滑流形 M 上的切模丛,其上的光滑结构简记为 $(\pi^{-1}(U_\alpha),\zeta_\alpha)$.在(1)中,我们把 $D_p^\infty(U_\alpha)$ 取作是 $C_p^\infty(U_\alpha)$ 的商空间,其中的函数分类是按照在该点处的取值和基底作用在函数上的值对应都相等进行的,下面定理说明这样选取商空间的合理性.

定理2 若 $\boldsymbol{X}\in T_pM,f,h\in C_p^\infty(U_\alpha)$,且 $f\sim h$,则对任意的 $g\in C_p^\infty(U_\alpha)$ 在(1)的定义下都有 $(f\boldsymbol{X})(g)=(h\boldsymbol{X})(g)$.

证明 设光滑流形 M 在 p 点的容许坐标卡为 (U,φ),相应的局部坐标系是 x^i,即有 $x^i(p)=x_0^i=(\varphi(p))_0^i,x^i(q)=(\varphi(q))^i$, $\forall q\in U$.

记 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}:1\leqslant i\leqslant m\right\}$ 为 p 点处的切空间 T_pM 的基,则 $\boldsymbol{X}=\sum\limits_{i=1}^{m}y^i\frac{\partial}{\partial x^i}$.又因为

$$f(q)=f\circ\varphi^{-1}(x^1,\cdots,x^m)=f\circ\varphi^{-1}(x_0^1,\cdots,x_0^m)+\sum_{j=1}^{m}(x^j-x_0^j)(f_j\circ\varphi^{-1})(x^1,\cdots,x^m),$$

其中 $f_j\circ\varphi^{-1}\in C^\infty(\varphi(U))$,且

$$(f_j\circ\varphi^{-1})(x_0^1,\cdots,x_0^m)=\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^j}\bigg|_{\varphi(x_0^1,\cdots,x_0^m)}=\frac{\partial}{\partial x^j}(f)\quad(\text{见文献[4]}).$$

根据切向量所满足的条件以及函数 f 的表达式就有,

$$\boldsymbol{X}(f)=\sum_{i=1}^{m}y^i\frac{\partial}{\partial x^i}(f)=\left(\sum_{i=1}^{m}y^i\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\left(\sum_{j=1}^{m}(x^j-x_0^j)(f_j\circ\varphi^{-1})(x^1,\cdots,x^m)\right)=$$

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}y^i\frac{\partial}{\partial x^i}(x^j)\cdot(f_j\circ\varphi^{-1})(x_0^1,\cdots,x_0^m)=\sum_{i=1}^{m}y^i\cdot(f_i\circ\varphi^{-1})(x_0^1,\cdots,x_0^m)=\sum_{i=1}^{m}y^i\cdot\frac{\partial}{\partial x^i}(f).$$

同理 $\boldsymbol{X}$ 作用在 g、h 上分别是 $\boldsymbol{X}(g)=\sum_{i=1}^{m}y^i\cdot\frac{\partial}{\partial x^i}(g)$,$\boldsymbol{X}(h)=\sum_{i=1}^{m}y^i\cdot\frac{\partial}{\partial x^i}(h)$.

因为 $f\sim h$,所以有 $f(q)=h(q)$,$\frac{\partial}{\partial x^i}(f)=\frac{\partial}{\partial x^i}(h)$,$i=1,\cdots,m$. 根据(1)$(f\boldsymbol{X})(g)=\boldsymbol{X}(f)g(p)+\boldsymbol{X}(g)f(p)$,$(h\boldsymbol{X})(g)=\boldsymbol{X}(h)g(p)+\boldsymbol{X}(g)h(p)$,要使 $(f\boldsymbol{X})(g)=(h\boldsymbol{X})(g)$,只需得出 $\boldsymbol{X}(f)=\boldsymbol{X}(h)$. 由上述 $\boldsymbol{X}$ 作用在函数上的推导得知这是显然相等的,该命题得证.

2　切模丛的性质

切模丛是特殊的纤维丛,也是微分流形,在流形上有了微分结构以后,就可以讨论切模丛的一些性质.

定义 1　光滑流形 M 上的一个切模丛场 ξ 是指在流形 M 的每一点 p,都指定了一个 D_pM 中元素,即切模丛场 X 是一个映射 $\xi:M\to DM$,使得 $\xi(p)\in D_pM$.

定义 2　设 ξ 是光滑流形 M 上的一个切模丛场.若在点 $p\in M$,有局部坐标系 (U,x^i),使得当切模丛场 ξ 在 U 上的限制 $\xi|_U=f\boldsymbol{X}$ 满足:$\boldsymbol{X}$ 是光滑流形 M 上的一个 C^r 切向量场,f 是 U 上的 C^r 函数,则称 ξ 是 M 上的 C^r-切模丛场,也称它为切模丛 DM 上的一个 C^r 截面.当 $r=\infty$ 时,称此截面为光滑截面,记 $\Gamma(DM)$ 为全体光滑截面的集合.

定理 3　设 M 是一个光滑流形,DM 是 M 上的切模丛,ξ 是 M 上的切模丛场,则 ξ 是 M 上的 C^r 切模丛场的充要条件为 ξ 是 $M\to DM$ 的 C^r 映射,且 $\pi\circ\xi=id:M\to M$.

证明　根据切模丛场的定义,映射 $\xi:M\to DM$ 满足条件 $\pi\circ\xi=id:M\to M$.任取一点 $p\in M$,设它的局部坐标系为 $(U;\varphi^i(p)=x^i)$,根据切模丛的定义有 $\xi(p)=f\boldsymbol{X}$,由定理 1 的证明中 DM 上光滑结构 ζ 知,

$$\zeta(f\boldsymbol{X})=(x^1,\cdots,x^m,c,z^1,\cdots,z^m,y_1,\cdots,y^m),$$

所以我们可以写出映射 ξ 的局部变换表达式为

$$\zeta\circ\xi\circ\varphi^{-1}(x^1,\cdots,x^m)=(x^1,\cdots,x^m,c,z^1,\cdots,z^m,y_1,\cdots,y^m).$$

显然有每个 x^i 是 $(x^1,\cdots,x^m)$ 的光滑函数,$c=f(x^1,\cdots,x^m)\in C^r$.又由于 $z^i=\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}$,所以 z^i 关于 $(x^1,\cdots,x^m)$ 是光滑函数.又因为其中的 $\boldsymbol{X}=\sum_{i=1}^{m}y^i\frac{\partial}{\partial x^i}$,显然也有 y^i 关于 $(x^1,\cdots,x^m)$ 是 C^r 函数.因此

$$\zeta\circ\xi\circ\varphi^{-1}(x^1,\cdots,x^m)=(x^1,\cdots,x^m,c,z^1,\cdots,z^m,y_1,\cdots,y^m)$$

是关于 $(x^1,\cdots,x^m)$ 的 $3m+1$ 个 C^r 函数,即 ξ 是 M 上的 C^r 切模丛场.

在 $\Gamma(DM)$ 中定义自然的加法和数乘法,即 ξ、$\eta\in\Gamma(DM)$,$\lambda\in R$,在任意点 $p\in M$ 处令

$$(\xi+\eta)(p)=\xi(p)+\eta(p),(\lambda\xi)(p)=\lambda\cdot\xi(p),$$

显然 $\xi+\eta$、$\lambda\xi$ 仍然是光滑流形 M 上的 C^r 切模丛场.这样 $\Gamma(DM)$ 就成为 $\mathbf{R}$ 上的实向量空间.特别地,$r=\infty$ 时光滑切模丛场就可以看作是以光滑的方式依赖于点的一"场"模,而(1)给出了其定义,故光滑切模丛场可以看作是作用在 $C^\infty(M)$ 上一个微分算子.设 $\xi\in\Gamma(DM)$,$g\in C^\infty(M)$,可以定义 $\xi(g)$ 为 M 上的一个函数,它在 p 处的值是 $\xi(g)(p)=(\xi(p))(g|_U)$,其中 U 是包含点 p 的某一邻域.容易检验这个定义与点 p 的邻域 U 选取无关,$\xi(g)(p)\in\mathbf{R}$,也有 $\xi(g)\in C^\infty(M)$.下面给出光滑切模丛场的性质.

定理 4　设 M 是一个 m 维光滑流形,$\xi\in\Gamma(DM)$,则映射

$$\xi:C^\infty(M)\to C^\infty(M)$$

满足下面两个条件:

(1)$\xi(g+h)=\xi(g)+\xi(h)$,$\forall g$、$h\in C^{\infty}(M)$;

(2)$\xi(\lambda g)=\lambda\cdot\xi(g)$,$\forall g\in C^{\infty}(M)$,$\lambda\in\mathbf{R}$.

逐点检验上述结论显然成立.如果取特殊的$\xi\in\Gamma(TM)$,则它还能满足第三性质,即满足 Leibniz 法则:

(3)$\xi(g\cdot h)=\xi(g)\cdot h+g\cdot\xi(h)$,$\forall g$、$h\in C^{\infty}(M)$.并且同时满足这三个条件的光滑切向量场还是唯一确定的.

如果$\xi\in\Gamma(DM)$,而$\xi\notin\Gamma(TM)$,在某一点p的局部坐标邻域U内,ξ可以表示成$f\boldsymbol{X}$,此时

$$\xi(g\cdot h)=(f\boldsymbol{X})(g\cdot h)=\boldsymbol{X}(f\cdot g\cdot h)=\boldsymbol{X}(f)\cdot g(p)\cdot h(p)+f(p)\cdot\boldsymbol{X}(g)\cdot h(p)+f(p)\cdot g(p)\cdot\boldsymbol{X}(h),$$
$$(f\boldsymbol{X})(g)\cdot h(p)+(f\boldsymbol{X})(h)\cdot g(p)=\boldsymbol{X}(f\cdot g)\cdot h(p)+\boldsymbol{X}(f\cdot h)\cdot g(p).$$

显然$\xi(g\cdot h)\neq\xi(g)\cdot h(p)+g(p)\cdot\xi(h)$.事实上切模丛场$\xi$也不能满足 Leibniz 法则,否则满足这 3 个条件能唯一确定的是光滑切向量场而不是切模丛场.在$\Gamma(TM)$空间中已有 Poisson 括号积的定义,下面在$\Gamma(DM)$空间中引入推广的括号积的概念:

定义 3 设$\boldsymbol{X}$、$\boldsymbol{Y}\in\Gamma(TM)$,对于任意的点$p$以及$p$点的开子集$U\subset M$,$f$、$g\in D^{\infty}(U)$,定义

$$[f\boldsymbol{X},g\boldsymbol{Y}]|_p=(f\cdot g)|_U[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]|_p+(f|_U\cdot\boldsymbol{X}(g))\boldsymbol{Y}|_p-(g|_U\cdot\boldsymbol{Y}(f))\boldsymbol{X}|_p.$$

上述定义的$[f\boldsymbol{X},g\boldsymbol{Y}]\in\Gamma(DU)$.称此为切模丛上的 Poisson 括号积.

若$f,g\in C^{\infty}(M)$,根据切丛上的 Poisson 括号积运算得

$$[f\boldsymbol{X},g\boldsymbol{Y}]=(f\cdot g)[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]+(f\cdot\boldsymbol{X}(g))\boldsymbol{Y}-(g\cdot\boldsymbol{Y}(f))\boldsymbol{X},$$

这也满足定义 3,因此这是切丛上 Poisson 括号积概念在切模丛上的推广.

下面给出上述 Poisson 括号积在局部坐标系$(\boldsymbol{\pi}^{-1}(U),\zeta)$下的表达式,其中$M$上的局部坐标表达式记为$(U,z^i)$.

设ξ、$\boldsymbol{\eta}\in\Gamma(DM)$,在$\Gamma(DU)$中,不妨设$\xi|_U=f\boldsymbol{X}$,$\boldsymbol{\eta}|_U=g\boldsymbol{Y}$,其中$\boldsymbol{X}=\sum\limits_{i=1}^{m}x^i\dfrac{\partial}{\partial z^i}$,$Y=\sum\limits_{i=1}^{m}y^i\dfrac{\partial}{\partial z^i}$,且有

$$\zeta(f\boldsymbol{X})=(z^1,\cdots,z^m,c,x^1,\cdots,x^m,f^1,\cdots,f^m),$$
$$\zeta(g\boldsymbol{Y})=(z^1,\cdots,z^m,b,y^1,\cdots,y^m,g^1,\cdots,g^m).$$

由此有

$$[f\boldsymbol{X},g\boldsymbol{Y}]|_p=(f\cdot g)|_U\sum_{i,j=1}^{m}\left(x^i\frac{\partial y^j}{\partial z^i}-y^i\frac{\partial x^j}{\partial z^i}\right)\frac{\partial}{\partial z^j}+f|_U\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}x^ig^iy^j\frac{\partial}{\partial z^j}-g|_U\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}y^if^ix^j\frac{\partial}{\partial z^j}=$$
$$\sum_{j=1}^{m}\left[(f\cdot g)|_U\sum_{i=1}^{m}\left(x^i\frac{\partial y^j}{\partial z^i}-y^i\frac{\partial x^j}{\partial z^i}\right)+f|_U\sum_{i=1}^{m}x^ig^iy^j-g|_U\sum_{i=1}^{m}y^if^ix^j\right]\frac{\partial}{\partial z^j}.$$

定理 5 在光滑切模丛场集合$\Gamma(DM)$中的 Poisson 括号积运算满足以下的运算律:

(1)反交换律:$[\xi,\eta]=-[\eta,\xi]$;

(2)分配律:$[a\xi+b\eta,\zeta]=a[\xi,\zeta]+b[\eta,\zeta]$;

(3)Jacobi 恒等式:$[\xi,[\eta,\zeta]]+[\eta,[\zeta,\xi]]+[\zeta,[\xi,\eta]]=0$.

其中ξ、η、$\zeta\in\Gamma(DM)$,a、$b\in\mathbf{R}$.

根据括号积的定义上述运算律是容易验证的.由定理 5 知,$\Gamma(DM)$作为实数域R上的向量空间关于 Poisson 括号积成为一个李代数,作为线性空间,$\Gamma(DM)$是无穷维的.在切模丛上建立了李代数,就可以将代数运算很好地应用于切模丛之上[6],进一步地还可以在此基础上建立李群胚.纤维丛理论是现代物理学研究规范场论的必修课,各种纤维丛的出现对规范场理论的研究和物理实验带来了可能性[7-8],切模丛的引入使切丛截面和流形的局部拓扑性质关系更加密切,其研究必然会带来很多有益之处[9].

[**参考文献**]

[1] 周建伟. 代数拓扑讲义[M]. 北京:科学出版社,2007.

[2] 张飞军. 自由丛、投射丛与一般模丛之间的浸入关系[J]. 工程数学学报,2004,21(3):248-250.

[3] 陈省身,陈维桓. 微分几何讲义[M]. 2 版. 北京:北京大学出版社,2001.

[4] 陈维桓. 微分流形初步[M]. 2 版. 北京:高等教育出版社,2001.

[5] 古志鸣. 一类丛映射的存在性[J]. 中国科学 A 辑,2006,6(31):517-522.

[6] HENRIQUE B, ALEJANDRO C, MATIAS D H. Vector bundles over Lie groupoids and algebroids[J]. Advances in mathematics,2016,2(290):163-207.

[7] LI X Y,MISHCHENKO A S. The existence and classification of couplings between Lie algebra bundles and tangent bundles[J]. Topology and its applications,2016,5(201):291-308.

[8] ANDREW J B,KATARZYNA G,JANUSZ G. Linear duals of graded bundles and higher analogues of Lie algebroids[J]. Journal of geometry and physics,2016,5(101):71-99.

[9] MAURO S,TILMANN W. Good coverings for section spaces of fiber bundles[J]. Topology and its applications,2010,4(157):1081-1085.

[责任编辑:陆炳新]