doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2019.03.021

# 求解不可压 Navier-Stokes 方程的一种高效两水平方法

杜彬彬,黄建国

(上海交通大学数学科学学院,上海 200240)

[摘要] 提出了一种基于 Arrow-Hurwicz(A-H)方法的两水平方法(以下简称 $m$-A-H-1-Oseen 方法)来求解不可压 Navier-Stokes(N-S)方程. 首先在粗网格上采用 A-H 方法求解不可压 N-S 方程,得到粗网格上的数值解. 然后在细网格上利用粗网格上的数值解求解原方程线性化的 Oseen 格式,由此获得所需的两水平方法. 对该方法的收敛性进行了系统理论分析.

[关键词] Arrow-Hurwicz 方法,Navier-Stokes 方程,两水平方法,Oseen 格式

[中图分类号]O24 [文献标志码]A [文章编号]1001-4616(2019)03-0157-06

# An Efficient Two-Level Method for Solving Incompressible Navier-Stokes Equations

Du Binbin,Huang Jianguo

(School of Mathematical Sciences,Shanghai Jiao Tong University,Shanghai 200240,China)

**Abstract**:This paper proposes a two-level Arrow-Hurwicz(A-H) method(simply called the $m$-A-H-1-Oseen method) for solving incompressible Navier-Stokes(N-S) equations. The incompressible N-S equations are first solved by the A-H method to obtain a numerical solution on a coarse mesh. Next, the desired numerical solution is obtained by solving the Oseen scheme, which is derived on a fine mesh by linearizing the original equations using the coarse solution, leading to the required two-level method. The convergence analysis is developed systematically.

**Key words**:Arrow-Hurwicz method,incompressible Navier-Stokes equations,two-level method,Oseen scheme

不可压 N-S 方程在计算流体力学和工程应用中扮演重要角色[1-2],它可以用来描述管流、绕翼型流动、天气预报、血液流动和工业炉内的对流换热等. 混合元方法[1]是求解该方程的有效方法,而 A-H 方法是求解相应离散化问题的一种有效算法. Temam 在文献[2]中介绍了求解不可压 N-S 方程的 A-H 算法并进行了收敛性分析. 陈浦瀛、黄建国和盛华山[3]对该方法给出了收敛率分析,证明即使对于正规剖分该方法也是以几何级数收敛的且收敛率与网格几何尺寸无关. 另一方面,两水平方法可以提高数值算法的计算效率,关于两水平方法的具体介绍可以参考许进超[4-5]的工作. 针对不可压 N-S 方程,Layton[6]、Girault 和 Lions[7]与何银年和李开泰[8]等人给出了一些经典的两水平数值方法.

本文考虑如下不可压 N-S 方程

$$\begin{cases}-v\Delta\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}+p=\boldsymbol{f}, & \text{in }\Omega,\\ \nabla\cdot\boldsymbol{u}=0, & \text{in }\Omega,\\ \boldsymbol{u}=0, & \text{on }\partial\Omega,\end{cases}\tag{1}$$

式中,$\Omega\subset R^2$ 是具有 Lipschitz 边界$\partial\Omega$ 的有界区域,$\boldsymbol{u}$ 为速度,$p$ 为压力,$\boldsymbol{f}$ 为外力项,$v$ 是动力粘性系数,一般等于雷诺数 $Re$ 的倒数. 在方程(1)中我们给出了 Dirichlet 边界条件,对于其他边界条件可类似处理,在

收稿日期:2019-03-20.

基金项目:国家自然科学基金面上项目(11571237).

通讯联系人:杜彬彬,博士研究生,研究方向:科学计算. E-mail:sjtudbb@ sjtu.edu.cn

此不展开讨论. 为了确保压力 $p$ 的唯一,假设

$$p\in L_0^2(\Omega)=\left\{q\in L^2(\Omega):\int_\Omega q\mathrm{d}x=0\right\}.\tag{2}$$

在本文中,将 A-H 算法和两水平方法相结合来求解不可压 N-S 方程,具体来说就是在粗网格上进行 $m$ 次 A-H 算法迭代,在细网格上进行 1 次 Oseen 格式的线性化,进而构造出不可压 N-S 方程的一种高效两水平方法并进行收敛性分析. 有关数值结果将另文给出.

# 1　准备知识

本文用到的数学符号和基本结果见文[2,9]. 为了推出不可压 N-S 方程的变分形式,先给出以下 Sobolev 空间:

$$\boldsymbol{X}:=H_0^1(\Omega)^2=\{\boldsymbol{v}\in H^1(\Omega)^2:\boldsymbol{v}|_{\partial\Omega}=0\},$$
$$M:=L_0^2(\Omega)=\left\{q\in L_2(\Omega):\int_\Omega q\mathrm{d}x\right\}.$$

设 $\boldsymbol{X}$ 的闭子集 $\boldsymbol{V}$ 为

$$\boldsymbol{V}=\{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{X}:\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0\text{ in }\Omega\}.$$

同样也引入下面的 Sobolev 空间

$$\boldsymbol{D}(A):=H^2(\Omega)^2\cap\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}:=L^2(\Omega)^2.$$

用 $\boldsymbol{H}$ 表示 $\boldsymbol{Y}$ 的闭子空间

$$\boldsymbol{H}=\{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{Y}:\nabla\cdot\boldsymbol{n}|_{\partial\Omega}=0\}.$$

我们通过 $A=-P\Delta$ 来定义 Stokes 算子 $A$,其中 $P$ 是 $\boldsymbol{Y}$ 到 $\boldsymbol{H}$ 的 $L_2$-正交投影. 分别用 $(\cdot,\cdot)$ 和 $\|\cdot\|$ 表示函数空间 $L^2(\Omega)^m(m=1,2)$ 中的内积和 $L_2$-范数,而在 $\boldsymbol{X}$ 上配置范数 $\|\nabla\boldsymbol{u}\|_0$ 和标量积 $(\nabla\boldsymbol{u},\nabla\boldsymbol{v})$. 在 Sobolev 空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 中,使用标准的范数 $\|\cdot\|_{m,p}$, $m\geqslant0,p\geqslant1$,且使用 $H^m(\Omega)$ 代表 $W^{m,2}(\Omega)$ 并以 $\|\cdot\|_m$ 代表 $\|\cdot\|_{m,2}$. $\boldsymbol{X}$ 空间的对偶空间用 $\boldsymbol{X}'$ 表示,其范数给定如下

$$\|\boldsymbol{f}\|_{-1}=\sup_{v\in X,v\neq0}\frac{\langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}\rangle}{\|\nabla\boldsymbol{v}\|_0},$$

式中, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示函数空间 $\boldsymbol{X}'$ 与 $\boldsymbol{X}$ 之间的对偶积.

使用上面的符号,问题(1)的变分形式可以写为

$$\begin{cases}a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})-d(\boldsymbol{v},p)+b(\boldsymbol{u};\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}\rangle,\\d(\boldsymbol{u},q)=0,\end{cases}\tag{3}$$

式中,双线性形式为

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\nu(\nabla\boldsymbol{u},\nabla\boldsymbol{v}),\quad\forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{X},$$
$$d(\boldsymbol{v},q)=(q,\nabla\cdot\boldsymbol{v}),\quad\forall(\boldsymbol{v},q)\in\boldsymbol{X}\times M.$$

在 $\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{X}$ 上的三线性型 $b(\cdot;\cdot,\cdot)$ 可以表示为

$$b(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=\frac{1}{2}((\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})-\frac{1}{2}((\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}),\forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{X}.$$

为行文简洁,使用 $C$(带或不带下标)表示一个生成常数,在不同的地方可取不同数值且与网格剖分尺度 $\mu$ 和迭代步数 $m$ 无关.

正如文献[2]中所指出的,存在一个正数 $N$ 使得

$$|b(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})|\leqslant N\|\nabla\boldsymbol{u}\|_0\|\nabla\boldsymbol{v}\|_0\|\nabla\boldsymbol{w}\|_0,\forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{X}.\tag{4}$$

进一步定义

$$\Lambda=\upsilon^{-2}N\|\boldsymbol{f}\|_{-1}.$$

此时,对于任意的 $\boldsymbol{f}\in H^{-1}(\Omega)^2$,只要 $\Lambda<1$,问题(3)存在唯一解[2].

基于变分形式(3),可以给出问题(1)的混合有限元方法. 设 $T_\mu=\{K\}_{K\in T_\mu}$ 是区域 $\Omega$ 的正规的三角单元组合, $\mu$ 代表 $T_\mu$ 的网格尺寸. 对于区域 $\Omega$ 的任意一个三角剖分 $T_\mu$,我们假设存在一对有限元空间 $(\boldsymbol{X}_\mu,M_\mu)$ 满足 $\boldsymbol{X}_\mu\subset\boldsymbol{X}$ 和 $M_\mu\subset M$. 如果存在不依赖 $\mu$ 的正数 $\beta$ 使得

$$\inf_{q\in M_\mu}\sup_{\boldsymbol{v}\in \boldsymbol{X}_\mu}\frac{(\nabla\cdot\boldsymbol{v},q)}{\|\nabla\boldsymbol{v}\|_0\|q\|_0}\geqslant\beta,$$

则称有限元对$(\boldsymbol{X}_\mu,M_\mu)$是稳定的,也称满足一致 inf-sup 条件. 典型的稳定有限元对包括 MINI 元、Girault-Raviart 元和 Taylor-Hood 元等. 下面给出求解问题(3)的混合有限元方法如下:

**算法 1** 不可压 Navier-Stokes 方程的混合有限元方法

求解$(\boldsymbol{u}_\mu,p_\mu)\in(\boldsymbol{X}_\mu,M_\mu)$使得对任意的$(\boldsymbol{v},q)\in\boldsymbol{X}_\mu\times M_\mu$,成立

$$\begin{cases}a(\boldsymbol{u}_\mu,\boldsymbol{v})+b(\boldsymbol{u}_\mu;\boldsymbol{u}_\mu,\boldsymbol{v})-d(\boldsymbol{v},p_\mu)=<\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}>, & (5a)\\ d(\boldsymbol{u}_\mu,q)=0. & (5b)\end{cases}$$

下面介绍 Stokes 算子的离散形式 $A_\mu=P_\mu\Delta_\mu$,其中 $P_\mu$ 是 $\boldsymbol{Y}$ 到 $\boldsymbol{V}_\mu$ 上的 $L_2$-正交投影算子,

$$\boldsymbol{V}_\mu=\{\boldsymbol{v}_\mu\in\boldsymbol{X}_\mu:d(\boldsymbol{v}_\mu,q_\mu)=0,\forall q_\mu\in M_\mu\},$$

$$(-\Delta_\mu\boldsymbol{u}_\mu,\boldsymbol{v}_\mu)=(\nabla\boldsymbol{u}_\mu,\nabla\boldsymbol{v}_\mu),\boldsymbol{u}_\mu,\boldsymbol{v}_\mu\in\boldsymbol{X}_\mu.$$

以下不等式显然成立

$$\|\boldsymbol{v}_\mu\|_0\leqslant C_0\|\nabla\boldsymbol{v}_\mu\|_0,\forall\boldsymbol{v}_\mu\in\boldsymbol{X}_\mu,\ \|\nabla\boldsymbol{v}_\mu\|\leqslant\|A_\mu\boldsymbol{v}_\mu\|_0,\forall\boldsymbol{v}_\mu\in\boldsymbol{V}_\mu. \tag{6}$$

为了证明算法 1 的 $\boldsymbol{u}_\mu$ 以及下一节中算法 2 中迭代解 $\boldsymbol{u}_\mu^m$ 的稳定性,我们需要使用三线性型 $b(\cdot;\cdot,\cdot)$ 如下的估计[8]:

$$b(\boldsymbol{u}_\mu;\boldsymbol{w}_\mu,\boldsymbol{v}_\mu)+b(\boldsymbol{w}_\mu;\boldsymbol{u}_\mu,\boldsymbol{v}_\mu)\leqslant C_2\|\boldsymbol{u}_\mu\|_1^{1/2}\|A_\mu\boldsymbol{u}_\mu\|_0^{1/2}\|\boldsymbol{w}_\mu\|_1\|\boldsymbol{v}_\mu\|_0,\boldsymbol{u}_\mu,\boldsymbol{v}_\mu,\boldsymbol{w}_\mu\in\boldsymbol{X}_\mu. \tag{7}$$

如果有限元空间对$(\boldsymbol{X}_\mu,M_\mu)$满足一致 inf-sup 条件和常规的有限元逼近估计且 $\Lambda<1$,则可知算法 1 存在唯一解,并成立以下的估计[2]:

**定理 1** 假设$(\boldsymbol{u},p)\in\boldsymbol{D}(A)\times(H^1(\Omega)\cap M)$是问题(3)的真解. $(\boldsymbol{u}_\mu,p_\mu)$是算法 1 的解,则成立以下结果

$$v\|\nabla\boldsymbol{u}_\mu\|_0\leqslant\|\boldsymbol{f}\|_{-1},v\|A_\mu\boldsymbol{u}_\mu\|_0\leqslant C_3\|\boldsymbol{f}\|_0, \tag{8}$$

$$v\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_\mu\|_0+\mu(v\|\nabla(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_\mu)\|_0+\|p-p_\mu\|_0)\leqslant c\mu^2\|\boldsymbol{f}\|_0. \tag{9}$$

## 2 A-H 算法

在本节中将回顾在文献[2]中提到的 A-H 算法和相应的收敛性分析结果. 首先给出求解不可压 N-S 方程的 A-H 算法.

**算法 2** 求解不可压 N-S 方程的 A-H 算法

设 $\rho$ 和 $\alpha$ 是两个正的参数.

步骤 1 选择两个函数 $\boldsymbol{u}_\mu^0\in\boldsymbol{X}_\mu$ 和 $p_\mu^0\in M_\mu$ 满足

$$\begin{cases}a(\boldsymbol{u}_\mu^0,\boldsymbol{v})-d(\boldsymbol{v},p_\mu^0)=<\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}>,\\ d(\boldsymbol{u}_\mu^0,q)=0,\end{cases} \tag{10}$$

式中,$(\boldsymbol{v},q)\in\boldsymbol{X}_\mu\times M_\mu$.

步骤 2 对于 $n=0,1,\cdots,m-1$,如果 $\boldsymbol{u}_\mu^n\in\boldsymbol{X}_\mu$ 和 $p_\mu^n\in M_\mu$ 已知,通过依次求解下面的方程获得更新:

$$\begin{cases}\rho^{-1}v^{-1}a(\boldsymbol{u}_\mu^{n+1}-\boldsymbol{u}_\mu^n,\boldsymbol{v})+a(\boldsymbol{u}_\mu^n,\boldsymbol{v})+b(\boldsymbol{u}_\mu^n;\boldsymbol{u}_\mu^{n+1},\boldsymbol{v})-d(\boldsymbol{v},p_\mu^n)=<\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}>,\\ \alpha(p_\mu^{n+1}-p_\mu^n,q)+\rho d(\boldsymbol{u}_\mu^{n+1},q)=0,\end{cases} \tag{11}$$

式中,$(\boldsymbol{v},q)\in\boldsymbol{X}_\mu\times M_\mu$.

如下结果在后面的理论分析中颇为重要.

**引理 1**[3] 下面的结果成立

(1)对任意的 $\boldsymbol{v}\in H_0^1(\Omega)^2$, $\|\nabla\cdot\boldsymbol{v}\|_0\leqslant\|\nabla\boldsymbol{v}\|_0$.

(2)设 $p_\mu\in M_\mu$ 是算法 1 的解,则满足估计

$$\|p_\mu\|_0\leqslant 3\beta^{-1}\|\boldsymbol{f}\|_{-1}.$$

**引理 2**[3] 设$(\boldsymbol{u}_\mu^0,p_\mu^0)$是(10)的解,$(\boldsymbol{u}_\mu,p_\mu)$是算法 1 的解. 则下面估计成立

$$\|\boldsymbol{u}_\mu-u_\mu^0\|_1\leqslant\Lambda v^{-1}\|\boldsymbol{f}\|_{-1},$$

$$\|p_\mu-p_\mu^0\|_0\leqslant 2\Lambda\beta^{-1}\|\boldsymbol{f}\|_{-1},$$

$$\|A_\mu(\boldsymbol{u}_\mu-\boldsymbol{u}_\mu^0)\|_0\leqslant C_4\Lambda v^{-1}\|\boldsymbol{f}\|_0.$$

**证明**　前两个不等式参见文献[3]. 下面证明第三个估计. 式(5)减去式(10)得到

$$\begin{cases} a(\boldsymbol{u}_\mu-\boldsymbol{u}_\mu^0,\boldsymbol{v})-d(\boldsymbol{v},p_u-p_\mu^0)=-b(\boldsymbol{u}_\mu;\boldsymbol{u}_\mu,\boldsymbol{v}), & (12\text{a}) \\ d(\boldsymbol{u}_\mu-\boldsymbol{u}_\mu^0,q)=0. & (12\text{b}) \end{cases}$$

设 $\boldsymbol{v}=A_\mu(\boldsymbol{u}_\mu-\boldsymbol{u}_\mu^0)\in\boldsymbol{V}_\mu$,(12a)即

$$\nu A_\mu(\boldsymbol{u}_\mu-\boldsymbol{u}_\mu^0)_0^2-d(A_\mu(\boldsymbol{u}_\mu-\boldsymbol{u}_\mu^0),p_\mu-p_\mu^0)=-b(\boldsymbol{u}_\mu;\boldsymbol{u}_\mu,\boldsymbol{v}). \tag{13}$$

注意到 $\boldsymbol{V}_\mu$ 空间的定义可知

$$d(A_\mu(\boldsymbol{u}_\mu-\boldsymbol{u}_\mu^0),p_\mu-p_\mu^0)=0. \tag{14}$$

把式(14)代入式(13),利用式(6)和式(7)可得

$$v\|A_\mu(\boldsymbol{u}_\mu-\boldsymbol{u}_\mu^0)\|_0^2\leqslant C_1C_2\|A_\mu\boldsymbol{u}_\mu\|_0\|\nabla\boldsymbol{u}_\mu\|_0\|A_\mu(\boldsymbol{u}_\mu-\boldsymbol{u}_\mu^0)\|_0.$$

再由式(8)立知以下结果

$$\|A_\mu(\boldsymbol{u}_\mu-\boldsymbol{u}_\mu^0)\|_0\leqslant C_4\Lambda\nu^{-1}\|\boldsymbol{f}\|_0.$$

后文始终假设 $\Lambda<1$,并设算法 2 中的正参数 $\rho$ 和 $\alpha$ 满足条件

$$r+\frac{\rho^2}{2\alpha}<1,\quad r:=|1-\rho\nu|+\rho\nu\Lambda. \tag{15}$$

定义 $\boldsymbol{E}_\mu^n=\boldsymbol{u}_\mu-\boldsymbol{u}_\mu^n$ 和 $e_\mu^n=p_\mu-p_\mu^n$,算法 2 的收敛性在文献[3]中给出如下定理.

**定理 2**　设$(\boldsymbol{u}_\mu,p_\mu)\in\boldsymbol{X}_\mu\times M_\mu$ 是算法 1 的解,$\{\boldsymbol{u}_\mu^n,p_\mu^n\}$是算法 2 得出的函数序列. 如果 $\Lambda<1$ 和假设(15)成立,则成立以下估计

$$F\|\nabla\boldsymbol{E}_\mu^{n+1}\|_0^2+\alpha\|e_\mu^{n+1}\|_0^2\leqslant\gamma(F\|\boldsymbol{E}_\mu^n\|_0^2+\alpha\|e_\mu^n\|_0^2),$$

式中,$F\in(0,1)$和 $\gamma\in(0,1)$是两个与 $n$ 和 $\mu$ 无关的常数.

**注 1**　通过观察上面推导的结论,只要 $\Lambda<1$,如果初始解即使是 0 函数,我们仍可以发现算法 2 是几何收敛的,并且收敛常数与网格尺寸 $\mu$ 无关.

## 3　*m*-A-H-1-Oseen 方法

在这一节中,将给出求解不可压 N-S 方程的 $m$-A-H-Oseen 方法,相比于 A-H 方法,它可以显著提高计算效率. 从现在开始,$H$ 是一个趋于 0 的正参数. 相应于正规的粗网格剖分 $T_H$,记 $\boldsymbol{X}_H\times M_H$ 为 $\boldsymbol{X}\times M$ 的稳定有限元空间对. 相应于由 $T_H$ 加细可得细网格 $T_h$,可类似定义稳定有限元空间对$(\boldsymbol{X}_h,M_h)$,使其满足$(\boldsymbol{X}_H,M_H)\subset(\boldsymbol{X}_h,M_h)$,同时假设 $1>H\geqslant h$.

首先得到以下重要估计.

**定理 3**　假设算法 2 中的参数满足(15)和$|1-\rho\nu|<1/2$. 若 $u_\mu^m$ 由(11)给出,则其必满足以下估计

$$\|\nabla\boldsymbol{u}_\mu^m\|_0\leqslant C_{\alpha,p}v^{-1}\|\boldsymbol{f}\|_{-1},\quad \|A_\mu\boldsymbol{u}_\mu^0\|_0\leqslant C_4v^{-1}\|\boldsymbol{f}\|_{-1}.$$

**证明**　首先,由引理 2 和递归推导立知

$$\|\nabla\boldsymbol{E}_\mu^m\|_0\leqslant\sqrt{1+4v^2D^{-1}\beta^{-2}}\,v^{-1}\|\boldsymbol{f}\|_{-1}, \tag{16}$$

使用三角不等式,可以进一步得到

$$\|\nabla\boldsymbol{u}_\mu^m\|_0^2\leqslant2(\|\nabla\boldsymbol{E}_\mu^m\|_0^2+\|\nabla\boldsymbol{u}_\mu\|_0^2).$$

结合定理 1 和式(16)可得

$$\|\nabla\boldsymbol{u}_\mu^m\|_0\leqslant C_{\alpha,v}v^{-1}\|\boldsymbol{f}\|_{-1}, \tag{17}$$

式中 $C_{\alpha,\nu}=2\sqrt{1+2C\alpha\nu^2}$.

式(5a)减去式(11)得到

$$\rho^{-1}\nu^{-1}a(\boldsymbol{E}_\mu^{n+1}-\boldsymbol{E}_\mu^n,\boldsymbol{v})+a(\boldsymbol{E}_\mu^n,\boldsymbol{v})-d(\boldsymbol{v},e_\mu^n)=-b(\boldsymbol{E}_\mu^n;\boldsymbol{u}_\mu,\boldsymbol{v})-b(\boldsymbol{u}_\mu^n;\boldsymbol{E}_\mu^{n+1},\boldsymbol{v}).$$

设 $\boldsymbol{v}=A_\mu\boldsymbol{E}_\mu^{n+1}\in\boldsymbol{V}_\mu$ 并由 $\boldsymbol{V}_\mu$ 的定义可知

$$A_\mu\boldsymbol{E}_\mu^{n+1}{}_0^2=(1-\rho\nu)(A_\mu\boldsymbol{E}_\mu^n,A_\mu\boldsymbol{E}_\mu^{n+1})-\rho b(\boldsymbol{E}_\mu^n;\boldsymbol{u}_\mu,A_\mu\boldsymbol{E}_\mu^{n+1})-\rho b(\boldsymbol{u}_\mu^n;\boldsymbol{E}_\mu^{n+1},A_\mu\boldsymbol{E}_\mu^{n+1}).$$

使用 Cauchy-Schwarz 不等式,Young 不等式,式(6)、(7),定理 1,式(16)和(17)可得

$$\|A_\mu\boldsymbol{E}_\mu^{n+1}\|_0\leqslant2|1-\rho v\|A_\mu\boldsymbol{E}_\mu^n\|_0+C_3v^{-1}\|\boldsymbol{f}\|_0, \tag{18}$$

结合条件 $2|1-\rho\nu|<1$,引理 2 和式(18)可知

$$\| A_\mu \boldsymbol{E}_\mu^{n+1} \|_0 \leqslant C\nu^{-1} \| \boldsymbol{f} \|_0.$$

结合三角不等式和定理 1 可得

$$\| A_\mu \boldsymbol{u}_\mu^{n+1} \|_0 \leqslant C_4 v^{-1} \| \boldsymbol{f} \|_0. \tag{19}$$

结合式(17)和(19),结果得证.

**引理 3** 设($\boldsymbol{u}_\mu^m, p_\mu^m$)是由(11)求解而得. 如果 $\Lambda<1$ 和假设(15)成立,则成立如下估计

$$\| \nabla (\boldsymbol{u}_\mu - \boldsymbol{u}_\mu^m) \|_0 \leqslant \sqrt{\gamma^m (1+4\nu^2 \alpha\beta^{-2} F^{-1})}\, \nu^{-1} \| \boldsymbol{f} \|_{-1},$$

$$\| p_\mu - p_\mu^m \|_0 \leqslant \sqrt{\gamma^m (\{F\} \nu^{-2} \alpha^{-1} + 4\beta^{-2})}\, \| \boldsymbol{f} \|_{-1},$$

式中,$m \geqslant 1$,$F \in (0,1)$ 和 $\gamma \in (0,1)$ 是两个与 $\mu$ 无关的常数.

**证明** 根据定理 2 可知

$$F \| \nabla \boldsymbol{E}_\mu^m \|_0^2 + \alpha \| e_\mu^m \|_0^2 \leqslant \gamma (F \| \nabla \boldsymbol{E}_\mu^{m-1} \|_0^2 + \alpha \| e_\mu^{m-1} \|_0^2),$$

而由递推关系有

$$F \| \nabla \boldsymbol{E}_\mu^m \|_0^2 + \alpha \| e_\mu^m \|_0^2 \leqslant \gamma^m (F \| \nabla \boldsymbol{E}_\mu^0 \|_0^2 + \alpha \| e_\mu^0 \|_0^2).$$

进一步,利用引理 2 可得

$$F \| \nabla \boldsymbol{E}_\mu^m \|_0^2 + \alpha \| e_\mu^m \|_0^2 \leqslant \gamma^m ((F\nu^{-2} \| \boldsymbol{f} \|_{-1}^2 + 4\alpha\beta^{-2} \| \boldsymbol{f} \|_{-1}^2).$$

于是,由上式立得

$$\| \nabla \boldsymbol{E}_\mu^m \|_0 \leqslant \sqrt{\gamma^m (1+4v^2 \alpha\beta^{-2} F^{-1})}\, v^{-1} \| \boldsymbol{f} \|_{-1}, \tag{20}$$

$$\| e_\mu^m \|_0 \leqslant \sqrt{\gamma^m (Fv^{-2} \alpha^{-1} + 4\beta^{-2}}\, \| \boldsymbol{f} \|_{-1}. \tag{21}$$

结果得证.

最后,我们给出 $m$-A-H-Oseen 方法并进行误差分析.

**算法 3** 不可压 N-S 方程的 $m$-A-H-Oseen 算法

设 $\rho$ 和 $\alpha$ 是两个正的参数.

步骤 1 选择两个函数 $\boldsymbol{u}_H^0 \in \boldsymbol{X}_H$ 和 $p_H^0 \in M_H$ 满足

$$\begin{aligned} & a(\boldsymbol{u}_H^0, \boldsymbol{v}) - d(\boldsymbol{v}, p_H^0) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle, \\ & d(\boldsymbol{u}_H^0, q) = 0, \end{aligned} \tag{22}$$

式中($\boldsymbol{v}, q$) $\in \boldsymbol{X}_\mu \times M_\mu$.

步骤 2 对于 $n=0,1,\cdots,m-1$,如果 $\boldsymbol{u}_H^n \in \boldsymbol{X}_H$ 和 $p_H^n \in M_H$ 已知,通过依次求解下面的方程

$$\begin{cases} \rho^{-1} \boldsymbol{v}^{-1} a(\boldsymbol{u}_H^{n+1} - \boldsymbol{u}_H^n, \boldsymbol{v}) + a(\boldsymbol{u}_H^n, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{u}_H^n; \boldsymbol{u}_H^{n+1}, \boldsymbol{v}) - d(\boldsymbol{v}, p_H^n) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle, \\ \alpha(p_H^{n+1} - p_H^n, q) + \rho d(\boldsymbol{u}_H^{n+1}, q) = 0, \end{cases} \tag{23}$$

式中($\boldsymbol{v}, q$) $\in \boldsymbol{X}_H \times M_H$.

步骤 3 在细网格上求解一个线性问题,即找($\boldsymbol{u}_{mh}, p_{mh}$) $\in \boldsymbol{X}_h \times M_h$ 使其满足

$$\begin{cases} a(\boldsymbol{u}_{mh}, \boldsymbol{v}) - d(\boldsymbol{v}, p_{mh}) + b(\boldsymbol{u}_H^m; \boldsymbol{u}_{mh}, \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle, \\ d(\boldsymbol{u}_{mh}, q) = 0, \end{cases} \tag{24}$$

式中,($\boldsymbol{v}, q$) $\in \boldsymbol{X}_h \times M_h$.

**定理 4** 求解算法 3 所得 $\boldsymbol{u}_{mh}$ 满足估计

$$\| \nabla \boldsymbol{u}_{mh} \|_0 \leqslant \boldsymbol{v}^{-1} \| \boldsymbol{f} \|_{-1}, \quad \| A_\mu \boldsymbol{u}_{mh} \|_0 \leqslant C\boldsymbol{v}^{-1} \| \boldsymbol{f} \|_0.$$

**证明** 在式(24)中取 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_{mh}$ 和 $q = p_{mh}$,由于 $b(\boldsymbol{u}_H^m; \boldsymbol{u}_{mh}, \boldsymbol{u}_{mh}) = 0$,故知

$$a(\boldsymbol{u}_{mh}, \boldsymbol{u}_{mh}) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_{mh} \rangle.$$

利用 Cauchy-Schwarz 不等式有

$$\| \nabla \boldsymbol{u}_{mh} \|_0 \leqslant v^{-1} \| \boldsymbol{f} \|_{-1}. \tag{25}$$

同样地,在式(24)中取 $\boldsymbol{v} = A_h \boldsymbol{u}_{mh} \in \boldsymbol{V}_h$ 和 $q=0$ 可得

$$a(\boldsymbol{u}_{mh}, A_h \boldsymbol{u}_{mh}) + b(\boldsymbol{u}_H^m; \boldsymbol{u}_{mh}, A_h \boldsymbol{u}_{mh}) = \langle \boldsymbol{f}, A_h \boldsymbol{u}_{mh} \rangle.$$

使用 Cauchy-Schwarz 不等式和式(7)可推知

$$\nu \| A_h \boldsymbol{u}_{mh} \|_0^2 \leqslant \| \boldsymbol{f} \|_0 \| A_h \boldsymbol{u}_{mh} \|_0 + C_2 \| \nabla \boldsymbol{u}_H^m \|_0 \| \nabla \boldsymbol{u}_{mh} \|^{1/2} \|_0^{1/2} \| A_h \boldsymbol{u}_{mh} \|_0^{1/2} \| A_h \boldsymbol{u}_{mh} \|_0,$$

再利用 Young 不等式可知

$$v\|A_h\boldsymbol{u}_{mh}\|_0\leqslant\|\boldsymbol{f}\|_0+\frac{C_2^2}{2v}\|\nabla\boldsymbol{u}_H^m\|_0^2\|\nabla\boldsymbol{u}_{mh}\|_0+\frac{v}{2}\|A_h\boldsymbol{u}_{mh}\|_0. \tag{26}$$

最后,利用式(25)和(26)以及定理 3 可证得结果.

**定理 5**　若$(\boldsymbol{u},p)\in\boldsymbol{D}(A)\times(H^1(\Omega)\cap M)$和$(\boldsymbol{u}_{mh},p_{mh})\in\boldsymbol{X}_h\times M_h$分别是问题(3)和(12)的解,则成立以下估计:

$$\nu\|\nabla(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_{mh})\|_0+\|p-p_{mh}\|_0\leqslant C(h+H^2)+C\sqrt{\gamma^m(1+4\nu^2\alpha\beta^{-2}F^{-1})}\|\boldsymbol{f}\|_{-1}.$$

**证明**　令$\mu=h$,式(5)减去式(12)可导出,对任何的$(\boldsymbol{v},q)\in\boldsymbol{X}_h\times M_h$成立

$$\begin{cases}a(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}_{mh},\boldsymbol{v})-d(\boldsymbol{v},p_h-p_{mh})+b(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}_H^m;\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v})+b(\boldsymbol{u}_H^m;\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}_{mh},\boldsymbol{v})=0,\\ d(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}_{mh},q)=0.\end{cases} \tag{27}$$

记$(\boldsymbol{\xi}^m,\boldsymbol{\eta}^m)=(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}_{mh},p_h-p_{mh})$,在式(27)中取$(\boldsymbol{v},q)=(\boldsymbol{\xi}^m,\boldsymbol{\eta}^m)$,则由式(6),(7),引理 3 和定理 1 可得

$$v\|\nabla\boldsymbol{\xi}^m\|_0\leqslant CH^2+C\sqrt{\gamma^m(1+4v^2\alpha\beta^{-2}F^{-1})}\|\boldsymbol{f}\|_{-1}. \tag{28}$$

对于$\|p_h-p_{mh}\|_0$的估计,由离散的 inf-sup 条件有

$$\|p_h-p_{mh}\|_0\leqslant\beta^{-1}\sup_{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{X}_\mu}\frac{d(\boldsymbol{v},p_h-p_{mh})}{\|\nabla\boldsymbol{v}_0\|}.$$

使用式(15),(4),(6),(7),(28),定理 1 和定理 3 可得

$$v\|\nabla(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_{mh})\|_0\leqslant v\|\nabla(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)\|_0+v\|\nabla(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}_{mh}\|_0. \tag{29}$$

再利用三角不等式可知

$$\nu\|\nabla(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_{mh})\|_0\leqslant\nu\|\nabla(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)\|_0+\nu\|\nabla(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}_{mh})\|_0,$$

$$\|p-p_{mh}\|_0\leqslant\|p-p_h\|_0+\|p_h-p_{mh}\|_0.$$

结合上面的两个三角不等式,式(28),(29)和定理 1 可立得所需结果.

## [参考文献]

[1] ELMAN H,SILVESTER D,WATHEN A. Finite elements and fast iterative solvers:with applications incompressible fluid dynamics[M]. 2nd ed. Oxford:Oxford University Press,2005.

[2] TEMAM R. Navier-Stokes equations,theory and numerical analysis[M]. North Holland:Amsterdam Pub. Co,1984.

[3] CHEN P,HUANG J,SHENG H. Solving steady incompressible Navier-Stokes equations by the Arrow-Hurwicz method[J]. J Comput Appl Math,2017(311):100-114.

[4] XU J. A novel two-grid method for semi-linear elliptic equations[J]. SIAM J Sci Comput,1994,15:231-237.

[5] XU J. Two-grid discretization techniques for linear and nonlinear PDEs[J]. SIAM J Numer Anal,1996,33:1759-1777.

[6] LAYTON W. A two-level discretization method for the Navier-Stokes equations[J]. Comput Math Appl,1993,26:33-38.

[7] GIRAULT V,LIONS J L. Two-level finite element scheme for the transient Navier-Stokes problem[J]. Math Model Numer Anal,2001,35:945-980.

[8] HE Y,LI K. Two-level stabilized finite element method for the stesdy Navier-Stokes problem[J]. Computing,2005,74:337-351.

[9] ADAMS R A. Sobolev Spaces[M]. New York:Science Press,1975.

[责任编辑:陆炳新]