

求解弹性振动方程的稳健 $C^0P_1-P_3$ 时空有限元方法

郭玉玲, 黄建国

(上海交通大学 数学科学学院, 上海 200240)

[摘要] 本文旨在构建一类稳健的 $C^0P_1-P_3$ 时空有限元方法求解弹性振动方程. 该方法在时间方向上采用 C^0P_1 DG 方法离散, 在空间上采用 P_3 -非协调有限元方法离散, 进而得到相应的全离散格式. 数值试验结果验证了该方法的稳健性.

[关键词] 弹性振动方程, 时空有限元方法, C^0P_1 DG 方法, P_3 -非协调有限元方法, 稳健性

[中图分类号] O24 [文献标志码] A [文章编号] 1001-4616(2019)04-0012-05

A Robust $C^0P_1-P_3$ Space-Time Finite Element Method for Elastic Vibration Problems

Guo Yuling, Huang Jianguo

(School of Mathematical Sciences, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: This paper devises a robust $C^0P_1-P_3$ space-time finite element method for elastic vibration equations. The temporal discretization is obtained by the C^0P_1 DG method, and the spatial discretization is given by the P_3 -nonconforming element method, leading to a $C^0P_1-P_3$ space-time fully discrete scheme for the problem. Numerical results demonstrate the robustness of the proposed method.

Key words: elastic vibration equations, space-time finite element method, C^0P_1 DG method, P_3 -nonconforming finite element method, robustness

弹性振动问题可描述为如下形式^[1-2]:

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}(x, t), & (x, t) \in \Omega \times J, \\ \mathbf{u} = 0, & (x, t) \in \Omega \times J, \\ \mathbf{u}(x, 0) = 0, \dot{\mathbf{u}}(x, 0) = 0, & x \in \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

式中, $J:=(0, T)$, $T>0$ 为给定常数, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ 是带利普希茨边界 Γ 的凸区域, \mathbf{u} 代表材料的位移场, \mathbf{f} 代表外力. 另外, 算子 \mathbf{A} 定义为

$$\mathbf{A}\mathbf{u} := -\mu \Delta \mathbf{u} - (\lambda + \mu) \nabla (\operatorname{div} \mathbf{u}),$$

式中, $\lambda \in (0, \infty)$, $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$ ($0 < \mu_1 \leq \mu_2$) 代表材料的拉梅系数.

对于弹性振动方程, 通常难以找到解析解, 需要借助数值方法进行近似求解. 有限元方法^[3-5]是求解弹性动力学问题的通用数值方法. 然而, 当拉梅系数 λ 较大时, 弹性材料将会处于几乎不可压缩的状态, 此时用常规的有限元方法(如低阶协调有限元方法)进行求解, 会出现“闭锁”现象^[6]. 目前, 针对稳态的弹性问题已有大量克服“闭锁”现象的数值方法, 这类方法被称为无闭锁数值方法或稳健数值方法. 例如, 非协调有限元方法^[7], p -型有限元方法^[8], 混合有限元方法^[9], 间断伽辽金方法^[10], 弱伽辽金方法^[11]等.

然而, 就我们所知, 对于非定常弹性振动方程关于拉梅系数 λ 稳健的数值方法的研究几乎还是空白. 郭和黄^[12]针对问题(1)在时间方向上采用 C^0P_1 DG 有限元方法(也称作 P_1 -CDG 方法)离散, 在空间

收稿日期: 2019-06-19.

基金项目: 国家自然科学基金面上项目(11571237).

通讯联系人: 郭玉玲, 博士生, 研究方向: 科学计算. E-mail: guoyuling@sjtu.edu.cn

方向上采用 P_1 -非协调元离散,针对弹性振动方程发展了一类稳健的时空有限元方法. 本文进一步探索使用 $C^0P_1-P_3$ 时空有限元方法求解弹性振动方程(1)的稳健性效果. 为得到该方法,首先针对弹性振动方程(1),在时间方向上采用 P_1 -CDG 方法离散,在空间上采用 P_3 -非协调元离散,从而构造出相应的 $C^0P_1-P_3$ 时空全离散有限元格式. 然后通过数值实验说明所提方法的稳健性.

1 弹性振动方程的 $C^0P_1-P_3$ 时空全离散有限元方法

首先,对区间 J 作任意划分: $0=t_0<t_1<\dots<t_N=T$. 记

$$J_n := (t_{n-1}, t_n], \quad k_n := t_n - t_{n-1}, \quad k := \max_{1 \leq n \leq N} k_n.$$

为方便起见,记

$$\mathbf{v}_n := \mathbf{v}(t_n) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t_n), \quad \mathbf{v}_\pm^n(\mathbf{x}, t_n) := \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t_n \pm \delta), \quad [\mathbf{v}]^n := \mathbf{v}_+^n - \mathbf{v}_-^n.$$

令 T_h 为 Ω 上的正规三角剖分,并设每个单元 K 的直径 $\leq h$. 记剖分 T_h 的所有边为 ε , 并记内边和边界边集分别为 ε_h^i 和 ε_h^b . 令 \mathbf{n}_E 为 E 的单位外法线方向,对任意的 $\mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^2$, 定义内边 $E \in \varepsilon_h^i$ 上的跳量为.

$$[\mathbf{v}]_E = (\mathbf{v}|_K)_E - (\mathbf{v}|_{K'})_E,$$

这里 K, K' 是以 E 为公共边的两个单元,且 \mathbf{n}_E 指向 K' .

接下来,定义 P_3 -非协调有限元空间^[13]. 先给出两个性质如下:

性质 1 存在插值算子 $I_h^K: (H^1(K))^2 \rightarrow V_h^{nc}(K)$ 使得对任意的 $\mathbf{v} \in (H^1(K))^2$ 满足:

$$\|\mathbf{v} - I_h^K \mathbf{v}\|_{H^1(K)} \leq h^r \|\mathbf{v}\|_{H^{r+1}(K)}, \quad \forall 1 \leq r \leq 3$$

以及

$$\int_K q \operatorname{div}(I_h^K \mathbf{v}) dx = \int_K q \operatorname{div}(\mathbf{v}) dx, \quad \forall q \in P_2(K).$$

式中,符号“ $A \leq B$ ”表示“ $A \leq CB$ ”,其中隐藏的常数 C 与网格步长以及拉梅系数无关. 另外,此处及下文均采用 Sobolev 空间范数和半范数的标准记号^[14].

性质 2 成立如下相容性条件:

$$\int_E \mathbf{q} \cdot [\mathbf{v}_h]_E ds = 0, \quad \forall E \in \varepsilon_h^i, \quad \mathbf{q} \in (P_2(E))^2$$

和

$$\int_E \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_h ds = 0, \quad \forall E \in \varepsilon_h^b, \quad \mathbf{q} \in (P_2(E))^2.$$

于是定义一个非协调元空间为

$$V_h^{nc} = \{\mathbf{v}_h \in (L^2(\Omega))^2; (P_3(K))^2 \subseteq V_h^{nc}\},$$

并且 V_h^{nc} 满足性质 1 和性质 2.

根据文献[13], P_3 -非协调有限元空间 V_h^{nc} 的自由度可选取为三角形单元 K (如图 1) 各条边上的 Legendre-Gauss 点 $\{b_j\}_{j=1}^9$ 以及三角形单元内部点 $\{b_j\}_{j=10}^{12}$ 上的值. 具体地, $\{b_j\}_{j=1}^{12}$ 关于顶点 $\{a_i\}_{i=1}^3$ 的重心坐标为:

$$\begin{aligned} b_1 &= \left(\frac{1+\sqrt{\frac{3}{5}}}{2}, \frac{1-\sqrt{\frac{3}{5}}}{2}, 0 \right), & b_2 &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right), & b_3 &= \left(\frac{1-\sqrt{\frac{3}{5}}}{2}, \frac{1+\sqrt{\frac{3}{5}}}{2}, 0 \right), \\ b_4 &= \left(0, \frac{1+\sqrt{\frac{3}{5}}}{2}, \frac{1-\sqrt{\frac{3}{5}}}{2} \right), & b_5 &= \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), & b_6 &= \left(0, \frac{1-\sqrt{\frac{3}{5}}}{2}, \frac{1+\sqrt{\frac{3}{5}}}{2} \right), \\ b_7 &= \left(\frac{1-\sqrt{\frac{3}{5}}}{2}, 0, \frac{1+\sqrt{\frac{3}{5}}}{2} \right), & b_8 &= \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right), & b_9 &= \left(\frac{1+\sqrt{\frac{3}{5}}}{2}, 0, \frac{1-\sqrt{\frac{3}{5}}}{2} \right), \end{aligned}$$

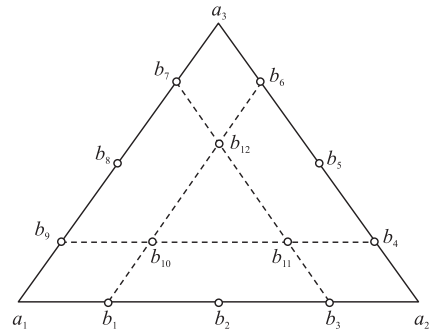


图 1 三角单元 K 上自由度选取

Fig. 1 The nodes on the triangle K

$$b_{10} = \left(\sqrt{\frac{3}{5}}, \frac{1 - \sqrt{\frac{3}{5}}}{2}, \frac{1 - \sqrt{\frac{3}{5}}}{2} \right), \quad b_{11} = \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{3}{5}}}{2}, \sqrt{\frac{3}{5}}, \frac{1 - \sqrt{\frac{3}{5}}}{2} \right), \quad b_{12} = \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{3}{5}}}{2}, \frac{1 - \sqrt{\frac{3}{5}}}{2}, \sqrt{\frac{3}{5}} \right).$$

令 P_3 -非协调有限元空间 V_h^{nc} 对应的多项式空间为 $(P_K)^2$, 这里

$$P_K := \text{span} \{ \lambda_1^3, \lambda_2^3, \lambda_3^3, \lambda_1^2 \lambda_2, \lambda_1^2 \lambda_3, \lambda_2^2 \lambda_1, \lambda_2^2 \lambda_3, \lambda_3^2 \lambda_1, \lambda_3^2 \lambda_2, \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3, \lambda_2 \lambda_1 \lambda_3, \lambda_3 \lambda_2 \lambda_1 \}.$$

根据 $\varphi_i \in P_K, 1 \leq i \leq 12$, 和 $\varphi_i(b_j) = \delta_{ij}, 1 \leq j \leq 12$, 可计算出 P_K 对应的基函数 $\{\varphi_i\}_{i=1}^{12}$ 显式表达式.

下面, 引入时-空有限元空间:

$$V^{hk} = \{ \mathbf{v}: [0, T] \rightarrow V_h^{nc}; \mathbf{v} \in (C(\bar{J}))^2, \mathbf{v}|_{J_n} = \sum_{j=0}^1 \mathbf{v}_j t^j, \mathbf{v}_j \in V_h^{nc}, 1 \leq n \leq N \},$$

并记 V_n^{hk} 为 V^{hk} 限制在 J_n 上的子空间. 借鉴文献[3]中的思想, 对于问题(1)提出如下全离散有限元格式: 找 $\mathbf{U} \in V^{hk}$ 使得

$$\begin{cases} \int_0^{t_N} ((\ddot{\mathbf{U}}, \dot{\mathbf{v}}) + A_h(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{v}})) dt + \sum_{n=0}^{N-1} ([\dot{\mathbf{U}}]^n, \dot{\mathbf{v}}_+^n) = \int_0^{t_N} (f, \dot{\mathbf{v}}) dt \quad \forall \mathbf{v} \in V^{hk}, \\ \mathbf{U}^0 = 0, \quad \dot{\mathbf{U}}_-^0 = 0, \end{cases} \quad (2)$$

式中

$$A_h(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (\mu(\nabla \mathbf{v}: \nabla \mathbf{w}) + (\mu + \lambda) \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \mathbf{w}) dx,$$

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} dx, \quad \nabla \mathbf{v}: \nabla \mathbf{w} := \sum_{i=1}^2 \nabla \mathbf{v}_i \cdot \nabla \mathbf{w}_i.$$

令 $V = (H_0^1(\Omega))^2$. 利用标准的论证技巧^[15], 容易验证双线性型 $A_h(\cdot, \cdot)$ 是对称的, 并且由 Korn 不等式可知其为 V -强制的, 即存在某个正常数 α 使得

$$A_h(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \alpha \mathbf{v}_h^2, \quad \forall \mathbf{v} \in V + V_n^{hk},$$

式中, $\|\mathbf{v}\|_h := (A_h(\mathbf{v}, \mathbf{v}))^{1/2}$. 不难验证, $\|\cdot\|_h$ 为 $V + V_n^{hk}$ 上的能量范数. 另外, 我们可以得到方法(2)的如下误差估计结果:

定理 设 \mathbf{u} 和 \mathbf{U} 分别是问题(1)和(2)的解, 且 $\ddot{\mathbf{u}} \in L^\infty([0, T]; (H^4(\Omega))^2)$, $\mathbf{u}^{(3)} \in L^\infty([0, T]; (H^3(\Omega))^2)$, $\mathbf{u}^{(4)} \in L^2([0, T]; (H^2(\Omega))^2)$. 如果 $f \in H^3([0, T]; (H^2(\Omega))^2)$, 且 $f(\mathbf{x}, 0) = \dot{f}(\mathbf{x}, 0) = 0$, 那么对 $n = 1, 2, \dots, N$, 成立如下估计:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(t_n) - \mathbf{U}^n\|_h &\leq h^4 (\ddot{f}_{L^1(0, T; H^2(\Omega))} + \|\ddot{f}(\cdot, 0)\|_{H^2(\Omega)} + \|f^{(3)}\|_{L^2(0, T; H^2(\Omega))}) + h^3 (f_{L^\infty(0, T; H^2(\Omega))} + \dot{f}_{L^2(0, T; H^2(\Omega))}) + \\ &\quad h^3 (\ddot{f}_{L^\infty(0, T; H^2(\Omega))} + \ddot{f}(\cdot, 0)_{H^2(\Omega)} + f_{L^2(0, T; H^2(\Omega))}^{(3)}) + k (f_{L^1(0, T; H^2(\Omega))} + \dot{f}_{L^2(0, T; H^2(\Omega))} + \ddot{f}(\cdot, 0)_{H^2(\Omega)} + f_{L^2(0, T; H^2(\Omega))}^{(3)}) \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} \|\dot{\mathbf{u}}(t_n) - \dot{\mathbf{U}}_-^n\|_{0, \Omega} &\leq h^4 (\ddot{f}_{L^1(0, T; H^2(\Omega))} + \ddot{f}(\cdot, 0)_{H^2(\Omega)} + f_{L^2(0, T; H^2(\Omega))}^{(3)}) + \dot{f}_{L^\infty(0, T; H^2(\Omega))} + \ddot{f}_{L^2(0, T; H^2(\Omega))} + \\ &\quad k (f_{L^1(0, T; H^2(\Omega))} + \dot{f}_{L^2(0, T; H^2(\Omega))}). \end{aligned}$$

该定理证明过程较长, 详见文献[16], 限于篇幅在此从略.

接下来, 给出格式(2)的数值实现过程. 在子区间 J_n 上, 函数 \mathbf{U} 可表达为

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{U}^{n-1} + (t - t_{n-1}) \dot{\mathbf{U}}_-^n.$$

由于(2)中的检验函数 $\dot{\mathbf{v}}$, 并不需要保持在 $t = t_n$ 处的连续性, 因此, 可选取 $\dot{\mathbf{v}}$ 为 V_h^{nc} 中任意元素 φ . 从而, 格式(2)可改写为: 找 $\mathbf{U} \in V^{hk}$ 使得

$$\begin{cases} \frac{k_n^2}{2} A_h(\dot{\mathbf{U}}_-^n, \varphi) + (\dot{\mathbf{U}}_-^n, \varphi) = \int_{J_n} (f, \varphi) dt - k_n A_h(\mathbf{U}^{n-1}, \varphi) + (\dot{\mathbf{U}}_-^{n-1}, \varphi) \quad \forall \varphi \in V_h^{nc}, n \geq 1, \\ \mathbf{U}^0 = 0, \quad \dot{\mathbf{U}}_-^0 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

从上式中可见, 一旦确定了 J_{n-1} 上的函数 \mathbf{U} , 即可推出 \mathbf{U}^{n-1} , 那么由(3)可计算出 $\dot{\mathbf{U}}_-^n$. 继而可确定 \mathbf{U} 在 J_n 上的表达式. 逐层递归, 即可得到函数 \mathbf{U} 在整个区间 J 上的表达式.

2 数值实验

在本节中,通过数值算例验证上一节中的理论分析结果. 记

$$E_{E,h} := \max_{1 \leq n \leq N} \| \mathbf{u}(t_n) - \mathbf{U}^n \|_h,$$

$$Et_{L^2} := \max_{1 \leq n \leq N} \| \dot{\mathbf{u}}(t_n) - \dot{\mathbf{U}}^n \|_{0,\Omega}.$$

问题描述:令求解区域 $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, 时间区间 $J = (0,2)$. 在方程(1)中,选取适当的右端项 \mathbf{f} 使得精确解满足:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1(\mathbf{x}, t) \\ u_2(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mu}{5} t^5 (x_1^2 - x_1)^2 (x_2^2 - x_2) (2x_2 - 1) \\ \frac{\mu}{5} t^5 (x_2^2 - x_2)^2 (x_1 - x_1^2) (2x_1 - 1) \end{pmatrix},$$

式中, $\mu = 0.5$.

数值实现:在本例中,全离散格式建立在均匀的时-空网格上. 在时间方向的离散上,采用 P_1 -CDG 有限元方法离散;在空间方向上,分别采用 P_3 -非协调有限元方法进行离散. 另外,作为对比,在时间方向的离散上,依然采用 P_1 -CDG 离散;在空间方向上,采用 P_3 -协调元进行离散. 为了方便描述,给出如下记号:

- P_1 - P_3^{con} :采用 P_1 -CDG 方法进行时间方向的离散,采用 P_3 -协调元进行空间方向的离散.
- P_1 - P_3^{non} :采用 P_1 -CDG 方法进行时间方向的离散,采用 P_3 -非协调元进行空间方向的离散.

为观察格式(2)在拉梅系数 λ 取值较大情况下的计算效果,在问题(1)中固定 $\mu = 0.5$,并选取不同的 λ . 令空间网格步长 h 从 $1/8$ 变化到 $1/16$,并选取时间步长 $k = h^3$.

实验结果:表1中,列出了采用 P_1 - P_3^{con} 和 P_1 - P_3^{non} 离散时误差 $E_{E,h}$ 在不同的 λ 和 h 下的值. 结果表明:采用 P_1 - P_3^{non} 离散时, $E_{E,h}$ 能保持3阶收敛阶,即便 λ 取值较大也依然成立.

表1 在 P_1 - P_3^{con} 和 P_1 - P_3^{non} 离散下 $E_{E,h}$ 的值

Table 1 Error $E_{E,h}$ under P_1 - P_3^{con} and P_1 - P_3^{non} discretization

$K = h^3$		P_1 - P_3^{con}		P_1 - P_3^{non}	
λ	h	$E_{E,h}$	$\text{Ord}_E E_{E,h}$	$E_{E,h}$	$\text{Ord}_E E_{E,h}$
10^0	1/8	7.222 3e-4	—	3.282 0e-4	—
	1/10	3.758 2e-4	2.927 4	1.690 7e-4	2.972 6
	1/16	9.339 3e-5	2.962 3	4.126 7e-5	3.000 4
	1/20	4.801 8e-5	2.981 2	2.106 9e-4	30.126
10^2	1/8	7.855 0e-4	—	1.203 5e-3	—
	1/10	4.054 4e-4	2.970 6	6.990 2e-4	2.435 1
	1/16	9.940 8e-5	2.996 8	2.077 8e-4	2.581 1
	1/20	5.086 1e-5	3.007 9	1.132 3e-4	2.720 4
10^4	1/8	7.938 4e-4	—	1.536 3e-3	—
	1/10	4.091 2e-4	2.936 7	9.761 5e-4	2.032 5
	1/16	1.000 3e-4	2.990 9	3.749 5e-4	2.035 7
	1/20	5.112 6e-5	3.003 1	2.373 5e-4	2.049 0
10^6	1/8	7.938 4e-4	—	1.542 8e-3	—
	1/10	4.091 0e-4	2.970 8	9.826 1e-4	2.021 7
	1/16	9.663 9e-4	3.070 1	3.810 0e-4	2.015 7
	1/20	4.906 1e-5	3.038 0	2.434 3e-4	2.007 4

从表1的最后两列容易看出:采用 P_1 - P_3^{con} , 当 λ 取值较大时, $E_{E,h}$ 不再保持一致的收敛阶. 而且 λ 越大, 丢阶现象越明显. 对于 Et_{L^2} , 也能观察到类似现象. 由此可见,本文中所提方法的确是求解弹性振动方程的稳定方法.

[参考文献]

- [1] CLOUGH R W, PENZIEN T. Dynamics of Structures[M]. 2nd Ed. New York: McGraw-Hill, Inc, 1993.

- [2] AJIT K M, SINGH S J. Deformation of Elastic Solids[M]. New York: Prentice-Hall, 1991.
- [3] LAI J, HUANG J, CHEN C. Vibration analysis of plane elasticity problems by the C^0 -continuous time stepping finite element method[J]. Appl Numer Math, 2009, 59: 905–919.
- [4] NEWMARK N M. A method of computation for structural dynamics[J]. J Eng Mech Div, 1959, 85: 67–94.
- [5] HUGHES T J R, HULBERT G. Space-time finite element methods for elastodynamics: formulations and error estimates[J]. Comput Methods Appl Mech Eng, 1988, 66: 339–363.
- [6] BABUŠKA I, SURI M. Locking effects in the finite element approximation of elasticity problems[J]. Numer Math, 1992, 62: 439–463.
- [7] FALK R. Nonconforming finite element methods for the equations of linear elasticity[J]. Math Comput, 1991, 57: 529–529.
- [8] VOGELIUS M. An analysis of the p-version of the finite element method for nearly incompressible materials[J]. Numer Math, 1983, 41: 39–53.
- [9] STENBERG R. A family of mixed finite elements for the elasticity problem[J]. Numer Math, 1988, 53: 513–538.
- [10] HUANG X, HUANG J. The compact discontinuous Galerkin method for nearly incompressible linear elasticity[J]. J Sci Comput, 2013, 56: 291–318.
- [11] CHEN G, XIE X. A robust weak Galerkin finite element method for linear elasticity with strong symmetric stresses[J]. Comput Methods Appl Math, 2016, 16: 389–408.
- [12] GUO Y, HUANG J. A robust finite element method for elastic vibration problems[J]. Comput Math Appl Mat, accepted.
- [13] CROUZEIX M, RAVIART P A. Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations I[J]. RAIRO Anal Numér, 1973, 7: 33–75.
- [14] ADAMS R A. Sobolev Spaces[M]. New York: Academic Press, 1975.
- [15] BRENNER S C, SCOTT L R. The Mathematical Theory of Finite Element Methods[M]. 2nd Ed. Berlin: Springer-Verlag, 2002.
- [16] 郭玉玲. 几类二阶发展方程的高效算法及误差分析[D]. 上海: 上海交通大学, 2019.

[责任编辑: 陆炳新]