第 42 卷第 4 期 南京师大学报(自然科学版) Vol. 42 No. 4
2019 年 12 月 JOURNAL OF NANJING NORMAL UNIVERSITY(Natural Science Edition) Dec,2019

doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2019.04.005

两因素马尔可夫调制的随机波动模型下的期权定价

刘雪汝,李美红,田 凡,刘国祥

(南京师范大学数学科学学院,江苏 南京 210023)

[摘要] 研究了风险资产是由两因素马尔可夫调制的随机波动过程驱动的期权定价. 第一个波动因素由 CIR 模型驱动,第二个波动因素、市场利率和股票回报率是由连续时间的马尔可夫过程驱动. 连续时间的马尔可夫链用来描述经济状态. 由两因素马尔可夫调制的随机过程描述的市场是不完全的,鞅是不唯一的. 我们采用状态转换 Esscher 变化方法确定等价鞅测度,对欧式期权和美式期权进行定价估计,得到了欧式期权价格所满足的系统耦合偏微分方程,并导出了美式看跌期权关于欧式看跌期权和早期执行溢价的分解结果. 最后给出了数值模拟结果.

[关键词] 期权定价,状态转换,Esscher 变化,两因素随机波动因素,马尔可夫过程

[中图分类号]O211.9 [文献标志码]A [文章编号]1001-4616(2019)04-0031-08

Two-Factor Markov-Modulated Stochastic Volatility Models for Option Pricing

Liu Xueru,Li Meihong,Tian Fan,Liu Guoxiang

(School of Mathematical Sciences,Nanjing Normal University,Nanjing 210023,China)

Abstract:We consider the option pricing problem when the risky underlying assets are driven by a two-factor Morkov-modulated stochastic volatility model, with the first volatility factor driven by the Cox-Ingersoll-Ross process and the second volatility factor driven by a continuous-time hidden Markov process. The states of the Markov process can be interpreted as the unobservable states of the economy. The market described by a two-factor Markov-modulated stochastic volatility model is incomplete in general and, hence, the martingale measure is not unique. We adopt the regime switching Esscher transform to determine an equivalent martingale pricing measure. We consider the valuation of the European and American options. A system of coupled partial differential integral equations satisfied by the European option prices in derived. We also derive a decomposition result for an American put option into its European counterpart and early exercise premium. Finally, numerical illustrations are given.

Key words:option pricing, regime switching, Esscher transform, two-factor stochastic volatility, markov chain model

1 风险资产模型

本文假设金融市场存在两种资产,一种是股票,一种是银行存款[1-2]. 银行的账户存款为 B_t,股票价格是 S_t. 假设股票价格的动态过程 S_t 是由遵循两因素马尔可夫调制的随机波动模型,马尔可夫链表示经济状态过程. 市场利率、股票的回报率和波动率与连续有限时间的马尔可夫链的状态有关[3-5]. 由两因素马尔可夫调制的随机过程描述的市场是不完全的,鞅是不唯一的[6-7].

假设$(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$是一个完备的概率空间,$\mathcal{P}$是真实的概率. 设 $\mathcal{T}=[0,\infty)$,假设经济状态由$(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$上有限状态的连续时间马尔科夫过程$\{X_t\}$ $(t\in\mathcal{T})$表示,其中有限状态 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_N)$. 假设状态 X_i 取值于$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_N\}$,其中 $\boldsymbol{e}_i=(0,\cdots,1,\cdots,0)$. 由半鞅表示定理得 $\{X_t\}$ $(t\in\mathcal{T})$满足:$\mathrm{d}X_t=\boldsymbol{A}X(t)\mathrm{d}t+\mathrm{d}M_t$,其中 $\{M_t\}$ $(t\in\mathcal{T})$ 是在 $\mathcal{P}$ 关于域流$\{X_t\}$ $(t\in\mathcal{T})$的 $\mathbf{R}^N$-值鞅,$\boldsymbol{A}=[a_{ij}(t)]$,$i,j=1,2,\cdots,N$.

收稿日期:2019-05-17.

基金项目:国家自然科学基金(61374080).

通讯联系人:刘国祥,副教授,研究方向:统计与金融数学. E-mail:gxliu63@163.com

银行存款的瞬时利率$\{r(t,X_t)\}$ $(t\in\mathcal{T})$满足:$r_t:=r(t,X_t)=\langle r,X_t\rangle$,其中,$r:=(r_1,r_2,\cdots,r_N)$ $r_i>0$ 对任意的 $i=1,2,\cdots\ ,N$. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是在 $\mathbf{R}^N$ 上的内积.

银行存款的价格过程$\{B_t\}(t\in\mathcal{T})$满足:$\mathrm{d}B_t=r_tB_t\mathrm{d}t,B_0=1$.

股票价格 S_t 的收益率为$\{\mu_t\}$,波动率为$\{\sigma_t\}$,经济状态 $X:=\{X_t\}(t\in\mathcal{T})$分别为:$\mu_t:=\mu(t,X_t)=\langle\mu,X_t\rangle$, $\sigma_t:=\sigma(t,X_t)=\langle\sigma,X_t\rangle$,其中 $\mu:=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_N)$和 $\sigma:=(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_N)$, $\sigma_i>0,i=1,2,\cdots,N$.

设 $W^1:=\{W_t^1\}$和 $W^2:=\{W_t^2\}(t\in\mathcal{T})$是$(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$上两个独立的标准布朗运动. 令 $W^v:=\{W_t^v\}$是$(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$上与 W^1 相关且相关系数为$\rho(|\rho|<1)$的标准布朗运动. X 与 W^1,W^2,W^v 独立. 设 σ_v 和 α 是非负的,$\beta\in\mathbf{R}$. 在 $\mathcal{P}$ 下股票价格模型为:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}S_t=\mu_tS_t\mathrm{d}t+\sqrt{V_t}S_t\mathrm{d}W_t^1+\sigma_tS_t\mathrm{d}W_t^2,\\
&\mathrm{d}V_t=(\alpha-\beta V_t)\mathrm{d}t+\sigma_v\sqrt{V_t}\mathrm{d}W_t^v,\\
&Cov(\mathrm{d}W_t^v,\mathrm{d}W_t^1)=\rho\mathrm{d}t.
\end{aligned}\tag{1}$$

这里随机波动模型 $V:=\{V_t\}(t\in\mathcal{T})$由 CIR 模型驱动. 第二个波动因素$\{\sigma_t\}(t\in\mathcal{T})$与经济状态 X 有关. 设 $W:=\{W_t\}(t\in\mathcal{T})$是$(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$上的标准布朗运动,设 W 与 W_1,W_2 和 X 独立. 假设 $\tilde{\rho}:=\sqrt{1-\rho^2}$,所以有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}W_t^v:=\rho\mathrm{d}W_t^1+\tilde{\rho}\mathrm{d}W_t,\\
&\mathrm{d}S_t=\mu_tS_t\mathrm{d}t+\sqrt{V_t}S_t\mathrm{d}W_t^1+\sigma_tS_t\mathrm{d}W_t^2,\\
&\mathrm{d}V_t=(\alpha-\beta V_t)\mathrm{d}t+\rho\sigma_v\sqrt{V_t}\mathrm{d}W_t^1+\tilde{\rho}\sigma_v\sqrt{V_t}\mathrm{d}W_t.
\end{aligned}$$

设 $\tilde{S}_t,t\in\mathcal{T}$是股票价格的折现过程,在 $\mathcal{P}$ 下有:

$$\begin{aligned}
&\tilde{S}_t:=\exp\left\{\int_0^t-r_s\mathrm{d}s\right\}S_t\ ,\\
&\mathrm{d}\tilde{S}_t=(\mu_t-r_t)\tilde{S}_t\mathrm{d}t+\sqrt{V_t}\tilde{S}_t\mathrm{d}W_t^1+\sigma_t\tilde{S}_t\mathrm{d}W_t^2.
\end{aligned}\tag{2}$$

2 Esscher 变换确定等价鞅测度[8-11]

设 $\mathcal{F}_t^V$ 和 $\mathcal{F}_t^X$ 表示时刻 t 之前由 V 和 X 产生的 σ-代数 $t\in\mathcal{T}$,定义 $\mathcal{G}_t=\mathcal{F}_t^V\vee\mathcal{F}_t^X$.

定义体制转换过程 $\theta_t:=\theta(t,X_t,V_t)$如下[12-14]:

$$\theta(t,X_t,V_t)=\langle\theta(t,V_t),X_t\rangle,$$

$\theta(t,V_t):=(\theta(t,V_t,\boldsymbol{e}_1),\theta(t,V_t,\boldsymbol{e}_2),\cdots,\theta(t,V_t,\boldsymbol{e}_N))$,$\theta(t,V_t,\boldsymbol{e}_i)$为 $\boldsymbol{e}_i$ 状态下波动率,是 $\mathcal{F}_t^V$ 可测的,$i=1,2,\cdots,N$.

设 $Y_t:=\ln\left(\dfrac{S_t}{S_0}\right)$,$t\in\mathcal{T}$. 设 $\mathcal{F}_t^Y$ 是过程 Y 在时刻 t 之前产生的 σ-代数. 定义 $\mathcal{H}_t=\mathcal{F}_t^Y\vee G_t^X$, $t\in\mathcal{T}$. 定义 $\mathcal{Q}_\theta\sim\mathcal{P}$ 下在 $\mathcal{H}_t$ 上的体制转换过程

$$L_t=\frac{\mathrm{d}Q_\theta}{\mathrm{d}\mathcal{P}}\bigg|_{\mathcal{H}_t}=\frac{\exp\left(\int_0^t\theta_a\mathrm{d}Y_a)\right)}{E\left[\exp\left(\int_0^t\theta_s\mathrm{d}Y_s\right)\bigg|\mathcal{G}t\right]},$$

其中 $E[\cdot]$表示在 $\mathcal{P}$ 下的期望,$t\in\mathcal{T}$.

由于 $\int_0^t\theta_sdY_s|\mathcal{G}_t\sim N\left(\int_0^t\theta_s\left(\mu_s-\frac{1}{2}(V_s+\sigma_s^2)\mathrm{d}s,\int_0^t\theta_s^2(V_s+\sigma_s^2)\mathrm{d}s\right)\right)$,期望为$\int_0^t\theta_s\left(\mu_s-\frac{1}{2}(V_s+\sigma_s^2)\mathrm{d}s\right)$方差是 $\int_0^t\theta_s^2((V_s+\sigma_s^2)\mathrm{d}s)$,在 $\mathcal{P}$ 下对任意的 $t\in\mathcal{T}$,

$$E\left[\exp\left(\int_0^t\theta_sdY_s\right)\bigg|\mathcal{G}_t\right]=\exp\left[\int_0^t\theta_s\left(\mu_s-\frac{1}{2}(V_s+\sigma_s^2)\mathrm{d}s+\frac{1}{2}\int_0^t\theta_s^2(V_s+\sigma_s^2)\mathrm{d}s\right]\right.,$$

$$L_t=\exp\left[\int_0^t\sigma_s\sqrt{V_s}\mathrm{d}W_s^1+\int_0^t\theta_s\sigma_s\mathrm{d}W_s^2-\frac{1}{2}\int_0^t\theta_s^2(V_s+\sigma_s^2)\mathrm{d}s\right].$$

引理 1　L_t 是一个$(\mathcal{G}_t,\mathcal{P})$-鞅.

证明　对任意的 $t,s\in\mathcal{T},t\geqslant s$.

$$E\left(\frac{L_t}{L_s}\middle|\mathcal{G}_s\right)=E\left[\exp\int_0^t\theta_s\sqrt{V_s}\Delta W_s^1+\int_0^t\theta_s\sigma_s\mathrm{d}W_s^2-\frac{1}{2}\int_0^t\theta_s^2(V_s+\sigma_s^2)\,\mathrm{d}s\mid\mathcal{G}_s\right]=1,\mathcal{P}\text{-}a.s.$$

推论 1　L_t 是一个$(\mathcal{H}_t,\mathcal{P})$-鞅.

证明　根据引理 1 以及 $\mathcal{G}_t\subset\mathcal{H}_t,t\in\mathcal{T}$即得证.

通过资产的基本定价理论可知,市场无套利等价于存在一个与真实概率测度等价的风险中性概率测度,且在该测度下,股票的折现过程 $\tilde{S}_t$ 是鞅. 在 Elliott et al 的文章中,由于过程 X 和 V 产生的不确定性,体制转换下的鞅条件定义在扩大的 σ-域流 $\mathcal{H}_t$ 上,假设 $\mathcal{H}_t=\mathcal{F}_t^Y\vee\mathcal{G}_T,t\in\mathcal{T}$. 则鞅条件等价于存在 $\tilde{\theta}:=\tilde{\theta}_t(t\in\mathcal{T})$ 使得股票的折现价格关于 $\mathcal{H}_t$ 和 Q_θ 是鞅. 这里 $\tilde{\theta}:=\tilde{\theta}_t(t\in\mathcal{T})$ 表示风险中性测度下体制转换的 Esscher 参数. 那么如何选择满足条件的 $\tilde{\theta}$ 使得鞅条件成立?

命题 1　鞅条件成立当且仅当

$$\tilde{\theta}=\frac{r_t-\mu_t}{V_t+\sigma_t^2},t\in\mathcal{T}.$$

证明　由 Bayes 规则

$$\tilde{E}[\tilde{S}_t\mid\mathcal{H}_u]=\frac{E\left[\frac{\mathrm{d}Q\tilde{\theta}}{\mathrm{d}\mathcal{P}}\tilde{S}_t\mid H_u\right]}{E\left[\frac{\mathrm{d}Q\tilde{\theta}}{\mathrm{d}\mathcal{P}}\mid H_u\right]}=E\Big\{\tilde{S}_u\exp\Big[\int_u^t(\mu_s-r_s-\frac{1}{2}(\tilde{\theta}_s^2+1)V_s-\frac{1}{2}(\tilde{\theta}_s^2+1)\sigma_s^2)\,\mathrm{d}s+$$

$$\int_u^t(\tilde{\theta}_s^2+1)\sqrt{V_s}\mathrm{d}W_s^1+\int_u^t(\tilde{\theta}_s^2+1)\mathrm{d}W_s^2\Big]\mid\mathcal{H}_u\Big\}$$

$$=\tilde{S}_u\exp\left[\int_u^t\left(\mu s-r_s-\frac{1}{2}(\tilde{\theta}_s^2+1)V_s-\frac{1}{2}(\tilde{\theta}_s^2+1)\sigma_S^2\right)\mathrm{d}s+\frac{1}{2}\int_u^t(\tilde{\theta}+1)^2(V_s+\sigma_s^2)\,\mathrm{d}s\right],\quad 0\leqslant u\leqslant t,$$

则鞅条件 $\tilde{E}[\tilde{S}_t\mid\mathcal{H}_u]=\tilde{S}_u$ 成立当且仅当:对任意的 $u,t\in\mathcal{T}$且 $u<t$.

$$\int_u^t\left[\mu_s-r_s-\frac{1}{2}(\tilde{\theta}_s^2+1)V_s-\frac{1}{2}(\tilde{\theta}_s^2+1)\sigma_s^2\right]\mathrm{d}s+\frac{1}{2}\int_u^t(\tilde{\theta}_s+1)^2(V_s+\sigma_s^2)\,\mathrm{d}s=0,\tag{3}$$

(3)成立当且仅当 $\tilde{\theta}_t=\frac{r_t-\mu_t}{V_t+\sigma_t^2},t\in\mathcal{T}$.

设 λ_t 表示 t 时刻的市场价格的波动风险,则 $\lambda_t:=\lambda(t,X_t,V_t)=\frac{r_t-\mu_t}{\sqrt{V_t+\sigma_t^2}},\lambda_t$ 是 $\mathcal{G}_t$-可测的,注意到 $\tilde{\theta}_t=-\frac{\lambda_t}{\sqrt{V_t+\sigma_t^2}},t\in\mathcal{T}$,设 $\tilde{\theta}(t,V_t)=\left(\frac{r_1-\mu_1}{V_t+\sigma_1^2},\frac{r_2-\mu_2}{V_t+\sigma_2^2},\cdots,\frac{r_N-\mu_N}{V_t+\sigma_N^2}\right)$表示 N-维 $\mathcal{F}_t^V$-可测的随机向量. 则:

$$\tilde{\theta}_t=\langle\tilde{\theta}(t,V_t),X_t\rangle=\sum_{i=1}^N\left(\frac{r_i-\mu_i}{V_t+\sigma_t^2}\right)\langle X_t,\boldsymbol{e}_i\rangle$$

命题 2　假设下面条件成立:

(1)鞅条件成立;

(2)X 和 W_1、W_2 在 $\mathcal{P}$ 和 $Q_{\tilde{\theta}}$下是独立的;

(3)W 和 W_1、W_2 在 $\mathcal{P}$ 和 $Q_{\tilde{\theta}}$下是独立的;

$$\widetilde{W}_t^1:=W_t^1-\int_0^t\frac{r_s-\mu_s}{V_t+\sigma_2^2}\sqrt{V_s}\,\mathrm{d}s,\widetilde{W}_t^2:=W_t^2-\int_0^t\frac{r_s-\mu_s}{V_t+\sigma_s^t}\sigma_s\mathrm{d}s,$$

$$\widetilde{W}_t^v:=\rho\widetilde{W}_t^1+\tilde{\rho}\widetilde{W}_t,t\in\mathcal{T},\tilde{\beta}_t=\beta-\rho\sigma_v\tilde{\theta}_t=\beta-\rho\sigma_v\frac{r_t-\mu_t}{V_t+\sigma_t^2}.$$

则在 $Q_{\tilde{\theta}}$和 $\mathcal{G}_T$ 下

(1)$\widetilde{W}^1,\widetilde{W}^2$ 和 $\widetilde{W}^v$ 关于它们自身的自然 σ-域流是标准布朗运动;

(2)$\widetilde{W}^1$ 和 $\widetilde{W}^2$ 是独立的;

(3)$Cov(\mathrm{d}\widetilde{W}^v,\mathrm{d}\widetilde{W}^1)=\rho\mathrm{d}t$;

(4)S_t,V_t 和 X_t 表示为:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}S_t&=r_tS_t\mathrm{d}t+\sqrt{V_t}S_t\mathrm{d}\widetilde{W}_t^1+\sigma_tS_t\mathrm{d}\widetilde{W}_t^2,\\ \mathrm{d}V_t&=(\alpha-\tilde{\beta}_tV_t)\mathrm{d}t+\sigma_v\sqrt{V_t}\mathrm{d}\widetilde{W}_t^v,\\ \mathrm{d}X_t&=AX(t)\mathrm{d}t+\mathrm{d}M_t.\end{aligned}\tag{4}$$

证明　由鞅条件成立可得:$\tilde{\theta}_t=\dfrac{r_t-\mu_t}{V_t+\sigma_t^2}$,$t\in\mathcal{T}$,因此

$$\left.\frac{\mathrm{d}Q_{\tilde{\theta}}}{\mathrm{d}\mathcal{P}}\right|_{\mathcal{H}_t}=\exp\left[\int_0^t\left(\frac{r_s-\mu s}{V_s+\sigma_s^2}\right)\sqrt{V_s}\mathrm{d}W_s^1+\int_0^t\left(\frac{r_s-\mu_s}{V_s+\sigma_s^2}\right)\sigma_s\mathrm{d}W_s^2-\frac{1}{2}\int_0^t\left(\frac{r_s-\mu_s}{V_s+\sigma_s^2}\right)^2(V_s+\sigma_s^2)\mathrm{d}s\right].$$

由 Girsanov's 定理,$\widetilde{W}^1$ 和 $\widetilde{W}^2$ 是在 $Q_{\tilde{\theta}}$和条件 $\mathcal{G}_T$ 下的关于它们的自然 σ-域流是两个标准的布朗运动. 因此,S_t 在概率测度 $Q_{\tilde{\theta}}$下表示为

$$\mathrm{d}S_t=r_tS_t\mathrm{d}t+\sqrt{V_t}S_t\mathrm{d}\widetilde{W}_t^1+\sigma_tS_t\mathrm{d}\widetilde{W}_t^2.$$

由于 W 与 W^1 和 W^2 是独立的,概率测度从 $\mathcal{P}$ 到 $Q_{\tilde{\theta}}$是不改变 W 的;W 在 $Q_{\tilde{\theta}}$下是标准的布朗运动,$\widetilde{W}_t^V=\rho\widetilde{W}_t^1+\tilde{\rho}\widetilde{W}_t$ 在 $Q_{\tilde{\theta}}$下是标准布朗运动,并且 $Cov(\mathrm{d}\widetilde{W}^v,\mathrm{d}\widetilde{W}^1)=\rho\mathrm{d}t$.

V_t 在 $Q_{\tilde{\theta}}$表示如下:

$$\mathrm{d}V_t=(\alpha-\beta V_t)\mathrm{d}t+\sigma_v\sqrt{V_t}\mathrm{d}W_t^v=(\alpha-\tilde{\beta}_tV_t)\mathrm{d}t+\sigma_v\sqrt{V_t}\mathrm{d}\widetilde{W}_t^v$$

由于 X 是与 W^1 和 W^2 独立的,概率变换从 $\mathcal{P}$ 到 $Q_{\tilde{\theta}}$不改变 X.

推论 2　假设$\rho=0$,则在 $Q_{\tilde{\theta}}$下,S_t,V_t 和 X_t 表示如下:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}S_t&=r_tS_t\mathrm{d}t+\sqrt{V_t}S_t\mathrm{d}\widetilde{W}_t^1+\sigma_tS_t\mathrm{d}\widetilde{W}_t^2,\\ \mathrm{d}V_t&=(\alpha-\beta V_t)\mathrm{d}t+\sigma_v\sqrt{V_t}\mathrm{d}\widetilde{W}_t^v,\\ \mathrm{d}X_t&=AX(t)\mathrm{d}t+\mathrm{d}M_t.\end{aligned}$$

3　欧式期权

本节研究敲定价格为 K,到期日为 T 的欧式看涨期权的价格. 假设$\rho=0$ 的条件下,给出欧式看涨期权定价公式的积分形式. 首先在 $Q_{\tilde{\theta}}$下,股票价格 S_t 满足:

$$S_T=S_0\exp\left\{\int_0^T\left[r_t-\frac{1}{2}(V_t+\sigma_t^2)\right]\mathrm{d}t+\int_0^T\sqrt{V_t}\mathrm{d}\widetilde{W}_t^1+\int_0^T\sigma_t\mathrm{d}\widetilde{W}_t^2\right\}.$$

则在 $Q_{\tilde{\theta}}$下,定义 $Y_T|\mathcal{G}_T\sim N\left(\int_0^T\left[r_t-\dfrac{1}{2}(V_c+\sigma_t^2)\right]\mathrm{d}t,\int_0^T((V_t+\sigma_t^2))\mathrm{d}t\right)$. 设 $J_i(0,T)$表示在状态 i 下$\{X_t\}$($t\in\mathcal{T}$)的在区间$[0,T]$的累积逗留时间. 定义

$$\bar{R}_T:=\frac{1}{T}\int_0^Tr_t\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\sum_{i=1}^Nr_iJ_i(0,T),$$

$$\bar{U}_T:=\frac{1}{T}\int_0^T\sigma_t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\sum_{i=1}^N\sigma_i^2J_i(0,T),$$

$$\bar{V}:=\frac{1}{T}E\int_0^TV_t\mathrm{d}t=\frac{\alpha}{\tilde{\beta}_t}+\left(V_0-\frac{\alpha}{\tilde{\beta}_t}\right)\frac{1-\exp(-\tilde{\beta}_tT)}{\tilde{\beta}_tT},$$

则在$\rho=0$ 和条件 $\mathcal{G}_T$ 下,看涨期权在初始条件 $S_0=S$,$V_0=V$ 和 $X_0=X$ 下的价格:

$$C(S,\bar{R}_T,\bar{U}_T,\bar{V}_T,0)=S\Phi(d_1(S,\bar{R}_T,\bar{U}_T,\bar{V}_T))-K\exp(-\bar{R}_TT)\Phi(d_2(S,\bar{R}_T,\bar{U}_T,\bar{V}_T)),$$

$$d_1(S,\bar{R}_T,\bar{U}_T,\bar{V}_T)=\frac{\ln\left(\dfrac{S}{K}\right)+\bar{R}_TT+\dfrac{1}{2}(\bar{U}_T+\bar{V}_T)T}{\sqrt{(\bar{U}_T+\bar{V}_T)T}},$$

$$d_2(S,\bar{R}_T,\bar{U}_T,\bar{V}_T)=d_1(S,\bar{R}_T,\bar{U}_T,\bar{V}_T)-\sqrt{(\bar{U}_T+\bar{V}_T)T}.$$

已知 $S_0=S,V_0=V$ 和 $X_0=X$ 的条件下,为了计算看涨期权的价格,需要知道 $\bar{R}_T$ 和 $\bar{U}_T$ 在概率测度 $Q_{\tilde{\theta}}$下的联合概率分布. 两因素马尔可夫调制的随机波动模型下的欧式看涨期权的价值由累积逗留时间($J_1(0,T),J_2(0,T),\cdots,J_N(0,T)$)的联合概率分布决定.

记 $J(0,T):=(J_1(0,T),J_2(0,T),\cdots,J_N(0,T))$ 是逗留时间的向量.设 $\boldsymbol{D}$ 表示对角矩阵,它的对角向量 $\boldsymbol{\xi}:=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_N)$,则对任意的 ξ,当 $X_0=X$ 时在 $Q_{\tilde{\theta}}$下的特征函数 $J(0,T)$:

$$\tilde{E}[\exp(i\langle\boldsymbol{\xi},J(0,T)\rangle)\mid X_0=X[=\langle\exp[(\boldsymbol{A}+i\boldsymbol{D})T],\boldsymbol{I}\rangle,\text{其中 } i=\sqrt{-1}\text{ 和 }\boldsymbol{I}=(1,1,\cdots,1)\in\mathbf{R}^N.$$

设 $\varphi_{J|X}(J_1,J_2,\cdots,J_N)$ 表示给定 $X_0=X$ 和概率测度 $Q_{\tilde{\theta}}$的条件下,在累积逗留时间($J_1(0,T),J_2(0,T),\cdots,J_N(0,T)$)的联合分布函数. 注意到 $\varphi_{J|X}(J_1,J_2,\cdots,J_N)$ 完全由特征函数 $\tilde{E}[\exp(i<\xi,J(0,T)>)\mid X_0=X]$ 决定,则给定 $S_0=S,V_0=V$ 和 $X_0=X$ 条件下欧式看涨期权的价格是:

$$C(S,V,X,0)=\int_0^T\int_0^T\int_0^T C(S,\bar{R}_T,\bar{U}_T,\bar{V}_T,0)\phi_{J|X}(J_1,J_2,\cdots,J_N)\,\mathrm{d}J_1\mathrm{d}J_2\cdots\mathrm{d}J_N.$$

下面我们给出两因素马尔可夫调制的随机波动模型下欧式期权所满足系统藕合偏微分方程组. 首先给定 $S_t=S,V_t=V$ 和 $X_t=X$,看涨期权在 t 时刻价格为:

$$C(S,V,X,t)=\tilde{E}\left\{\exp\left[-\int_0^T r_s\mathrm{d}s\right](S_T-K)^+\mid S_t=S,V_t=V,X_t=X\right\}.$$

记

$$\tilde{C}(S,V,X,t):=\exp\left[-\int_0^t r_s\mathrm{d}s\right]C(S,V,X,t),$$

$$\tilde{C}(S,V,t):=(\tilde{C}(S,V,\boldsymbol{e}_1,t),\tilde{C}(S,V,\boldsymbol{e}_2,t),\cdots,\tilde{C}(S,V,\boldsymbol{e}_N,t)).$$

则有

$$\tilde{C}(S,V,X,t)=\langle\tilde{C}(S,V,t),X_t\rangle=\sum_{i=1}^N\tilde{C}(S,V,\boldsymbol{e}_i,t)\cdot\langle X_t,\boldsymbol{e}_i\rangle.$$

由 Itô 公式,

$$\mathrm{d}\tilde{C}(S,V,X,t)=\frac{\partial\tilde{C}}{\partial t}\mathrm{d}t+\frac{\partial\tilde{C}}{\partial S}(r_tS_t\mathrm{d}t+\sqrt{V_t}S_t\mathrm{d}\tilde{W}_t^1+\sigma_tS_t\mathrm{d}\tilde{W}_t^2)+\frac{\partial\tilde{C}}{\partial V}[(\alpha-\tilde{\beta}_tV_t)\mathrm{d}t+\sigma_v\sqrt{V_t}\mathrm{d}\tilde{W}_t^v+$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2\tilde{C}}{\partial S^2}(\sigma_t^2S^2+VS^2)\mathrm{d}t+\rho\sigma_t\sigma_vSV\frac{\partial\tilde{C}}{\partial S\partial V}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\tilde{C}}{\partial V^2}\sigma_v^2V\mathrm{d}t+<\tilde{C},\boldsymbol{A}X_t\mathrm{d}t+\mathrm{d}M_t>=0.$$

由于 $\tilde{C}$ 是鞅,所有有界变差不是鞅,因此值都是零. 从而 $\tilde{C}(S,V,X,t)$ 满足偏微分方程:

$$\frac{\partial\tilde{C}}{\partial t}+r_tS\frac{\partial\tilde{C}}{\partial S}+(\alpha-\tilde{\beta}_tV)\frac{\partial\tilde{C}}{\partial V}+\frac{1}{2}(\sigma_t^2S^2+VS^2)\frac{\partial^2\tilde{C}}{\partial S^2}+\rho\sigma_t\sigma_vSV\frac{\partial\tilde{C}}{\partial S\partial V}+\frac{1}{2}\sigma_v^2V\frac{\partial^2\tilde{C}}{\partial V^2}+<\tilde{C},\boldsymbol{A}X>=0.$$

设 $C(S,V,t):=(C(S,V,\boldsymbol{e}_1,t),C(S,V,\boldsymbol{e}_2,t),\cdots,C(S,V,\boldsymbol{e}_N,t))$,由于 $\tilde{C}(S,V,X,t)=\exp\left[-\int_0^t r_s\mathrm{d}s\right]C(S,V,X,t)$,则

$$\exp\left[-\int_0^t r_s\mathrm{d}s\right]\left(-r_tC+\frac{\partial^2C}{\partial s}+(\alpha-\tilde{\beta}_tV)\frac{\partial C}{\partial V}+\right.$$

$$\frac{1}{2}(\sigma_t^2S^2+VS^2)\frac{\partial^2C}{\partial S^2}+\rho\sigma_t\sigma_vSV\frac{\partial C}{\partial S\partial V}+\frac{1}{2}\sigma_v^2V\frac{\partial^2C}{\partial V^2}+\langle\tilde{C},\boldsymbol{A}X\rangle)=0,$$

且满足到期条件:$C(S,V,X,T)=(S-K)^+$.

给出 $X=\boldsymbol{e}_i(i=1,2,\cdots,N)$,$r_t=<r,X_t>=r_i$,$\mu_t=<\mu,X_t>=\mu_i$,$\sigma_t=<\sigma,X_t>=\sigma_i$.

设 $C_i:=C(S,V,\boldsymbol{e}_i,t)$ 和 $C:=(C_1,C_2,\cdots,C_N)$. 则 C 满足下面 N-维偏微分方程:

$$-r_iC_i+\frac{\partial C_i}{\partial t}+r_iS\frac{\partial C_i}{\partial S}+(\alpha-\tilde{\beta}_{ti}V)\frac{\partial C_i}{\partial V}+$$

$$\frac{1}{2}(\sigma_i^2S^2+VS^2)\frac{\partial^2C_i}{\partial S^2}+\rho\sigma_i\sigma_vSV\frac{\partial C_i}{\partial S\partial V}+\frac{1}{2}\sigma_v^2V\frac{\partial^2C_i}{\partial V^2}+\langle\tilde{C},\boldsymbol{A}X\rangle)=0,$$

其中 $\tilde{\beta}_i:=\beta-\rho\sigma_v\dfrac{r_i-\mu_i}{V_t+\sigma_i^2}$,满足到期条件:$C(S,V,\boldsymbol{e}_i,T)=(S-K)^+$.

4　美式期权

本节研究两因素马尔可夫调制的随机扩散模型下到期日为 T,执行价格为 K 的美式看跌期权价格. 导出了美式看跌期权价格关于欧式看跌期权价格和早期执行溢价的分解结果. 通过第三节的方法,得到欧式看跌期权在概率测度 $\mathcal{G}_T$ 下给出 $S_0=S,V_0=V$ 和 $X_0=X$ 的条件下的定价公式:

$$C(S,\bar{R}_T,\bar{U}_T,\bar{V}_T,0)=K\exp(-\bar{R}_T T)\Phi(-d_2(S,\bar{R}_T,\bar{U}_T,\bar{V}_T))-S\Phi(-d_1(S,\bar{R}_T,\bar{U}_T,\bar{V}_T)).$$

则欧式期权在给定 $S_0=S,V_0=V$ 和 $X_0=X$ 条件下的价格为:

$$P(S,V,X,0)=\int_0^T\int_0^T\cdots\int_0^T P(S,\bar{R}_T,\bar{U}_T,\bar{V}_T,0)\phi_{J|X}(J_1,J_2,\cdots,J_N)\mathrm{d}J_1,\mathrm{d}J_2,\cdots,\mathrm{d}J_N$$

设 $P^A(S,V,X,0)$ 表示在给定 $S_0=S,V_0=V$ 和 $X_0=X$ 条件下 0 时刻美式看跌期权的价格,则下面的命题给出了 $P^A(S,V,X,0)$ 的分解结果.

命题 3　美式看跌期权在 0 时刻的价格满足:

$$P^A(S,V,X,0)=P(S,V,X,0)+e(S,V,X,0),$$

其中早期执行溢价 $e(S,V,X,0)$ 如下:

$$e(S,V,X,0)=\int_0^T\tilde{E}\left[\exp\left(-\int_0^t r_s\mathrm{d}s\right)I_{\{S_t\leqslant S_c(V,X,T)\}}(Kr_T-(S_t-K)\langle \boldsymbol{I},\boldsymbol{A}X_t\rangle)\right]\mathrm{d}t$$

其中 I_B 是事件 B 发生的示性函数;$S_c(V,X,t)$ 表示期权早期执行的价格边界值(证明过程中给出).

证明　对 $\exp\left(-\int_0^t r_s\mathrm{d}s\right)P^A(S_t,V_t,X_t,t)$ 应用 Itô 公式.

注意到 $P^A(S_t,V_t,X_t,t)=I_{\{S_t>S_c(V_t,X_t,t)\}}P^A(S_t,V_t,X_t,t)+I_{\{S_t\leqslant S_c(V,X,t)\}}(K-S_t)$,则

$$\left[\frac{\partial P}{\partial t}+r_tS_t\frac{\partial P}{\partial S}+(\alpha-\tilde{\beta}_tV_t)\frac{\partial P}{\partial V}+\frac{1}{2}(\sigma_t^2S_t^2+V_tS_t^2)\frac{\partial^2P}{\partial S^2}+\rho\sigma_t\sigma_vSV\frac{\partial P}{\partial S\partial V}+\frac{1}{2}\sigma_v^2V_t\frac{\partial^2P}{\partial V^2}-r_tP+<P,\boldsymbol{A}X_t>\right]=0,$$

$$\begin{aligned}\exp\left(-\int_0^t r_s\mathrm{d}s\right)(K-S_T)^+&=P^A(S_0,V_0,X_0,0)+\int_0^T\exp\left(-\int_0^t r_s\mathrm{d}s\right)\sqrt{V_t}S_t(I_{\{S_t>S_c(V,X,t)\}}\frac{\partial P}{\partial S}-I_{\{S_t\leqslant S_c(V,X,t)\}})\mathrm{d}\tilde{W}_t^1+\\&\int_0^T\exp\left(-\int_0^t r_s\mathrm{d}s\right)\sigma_tS_t(I_{\{S_t>S_c(V,X,t)\}}\frac{\partial P}{\partial S}-I_{\{S_t\leqslant S_c(V,X,t)\}})\mathrm{d}\tilde{W}_t^2+\int_0^T\exp\left(-\int_0^t r_s\mathrm{d}s\right)\sigma_v\sqrt{V_t}\frac{\partial P}{\partial V}\mathrm{d}\tilde{W}_t^v-\\&\int_0^T\exp\left(-\int_0^t r_s\mathrm{d}s\right)\langle P^A,\mathrm{d}M_t\rangle+\int_0^T\exp\left(-\int_0^t r_s\mathrm{d}s\right)I_{\{S_t\leqslant S_c(V,X,t)\}})(S_t-K)\langle \boldsymbol{I},\boldsymbol{A}X_t\rangle.\end{aligned}$$

由于 $\tilde{W}_t^1,\tilde{W}_t^2,\tilde{W}_t^v$ 和 M 在 Q_{θ} 下是鞅,关于 Q_{θ} 在上式两边取期望,可得

$$\begin{aligned}\tilde{E}\exp\left(-\int_0^t r_s\mathrm{d}s\right)(K-S_T)^+&=P^A(S_0,V_0,X_0,0)-\\&\int_0^T\tilde{E}\left[\exp\left(-\int_0^t r_s\mathrm{d}s\right)I_{\{S_t\leqslant S_c(V,X,t)\}}(Kr_t-(S_t-K)\langle \boldsymbol{I},\boldsymbol{A}X_t\rangle)\right]\mathrm{d}t\end{aligned}$$

注意到

$$\tilde{E}\left[\exp\left(-\int_0^t r_s\mathrm{d}s\right)(K-S_T)^+\right]=P(S_0,V_0,X_0,0).$$

因此结论成立.

通过解下面积分方程,可以求出早期执行价格的边界值 $S_c(V,X,t)$:

$$K-S_c(V,X,t)=P(S_c(V,X,t),V,X,t)+\int_t^T\tilde{E}\left[\exp\left(-\int_t^u r_s\mathrm{d}s\right)I_{\{S_t\leqslant S_c(V,X,t)\}}(Kr_u-(S_u-K)\langle \boldsymbol{I},\boldsymbol{A}X_tu\rangle\right]\mathrm{d}u$$

5　数值模拟

为了分析各参数对期权价格的影响,我们给出两因素马尔可夫调制的随机波动模型,CIR 模型驱动的随机波动模型以及两因素马尔可夫链驱动的随机模型下期权的价格,并对结果进行分析比较.

为了简化模拟结果,假设 X 只有两种状态:"经济繁荣 $\boldsymbol{e}_1$"和"经济衰退 $\boldsymbol{e}_2$",且设两种状态 X 的转移矩阵的元素分别为:$P_{11}=0.7,P_{12}=0.3,P_{21}=0.2,P_{22}=0.8$. 同时,假设经济繁荣时,模型参数为 $r_1=0.04,\sigma_1=0.1,\mu_1=0.05$,经济衰退时的参数值 $r_1=0.01,\sigma_1=0.3,\mu_1=0.02$.股票的初始价格为 $S_0=1.2$.其他参数分别假设为

$V_0=0.01$ 和 $\sigma_v=0.1$,$\beta=2$ 和 $\frac{\alpha}{\beta}=0.01$,$\rho=0.5$,初始状态 $X_0=0$.

在进行数值模拟时[15],为了验证到期日 T 和敲定价格 K 对期权价格的影响,我们考虑到期日 $T=0.5$,1.0,1.5,敲定价格为 0.8 到 1.2,步长为 0.05 的情况下,期权价格的变化,以及敲定价格为 $K=0.8$,1.0,1.2 时,到期日 T 从 0.5 到 1.5,且步长为 0.1 的情况下,期权价格的变化. 另外假设一年有 252 个交易日,用 MATLAB 模拟 10 000 次.

图 1 表示到期日分别是 $T=0.5$,1.0,1.5 时,期权价格与敲定价格的关系,由图知,到期日一定时,期权的价格随着敲定价格的增加而减少,另外,随着到期日的增加,模型三条曲线偏离越远. 这与经典的 Black-Scholes 期权定价模型的结论一致. 图 2 表示敲定价格是 $K=0.8$,1.0,1.2 时,期权价格和到期日 T 的关系. 由图知,期权价格随着到期日的增加而增加,三条期权价格曲线的偏离程度没有随着敲定价格的增加有明显变化.

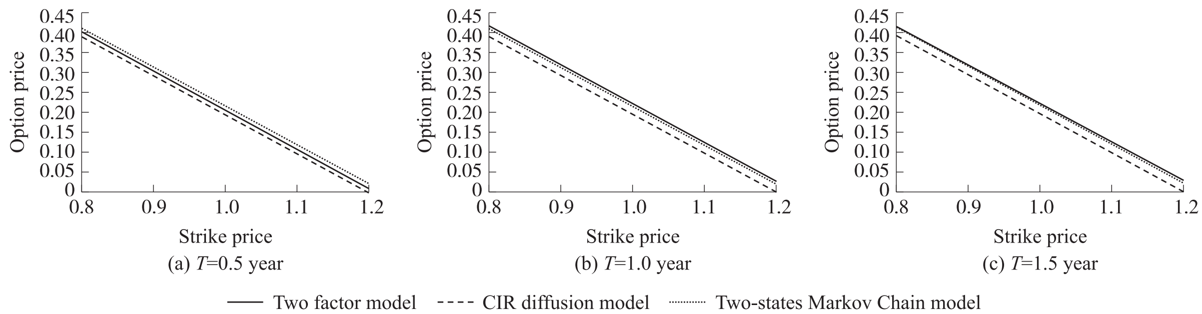

图 1　期权价格与敲定价格的关系

Fig. 1　The relationship between option price and strike price

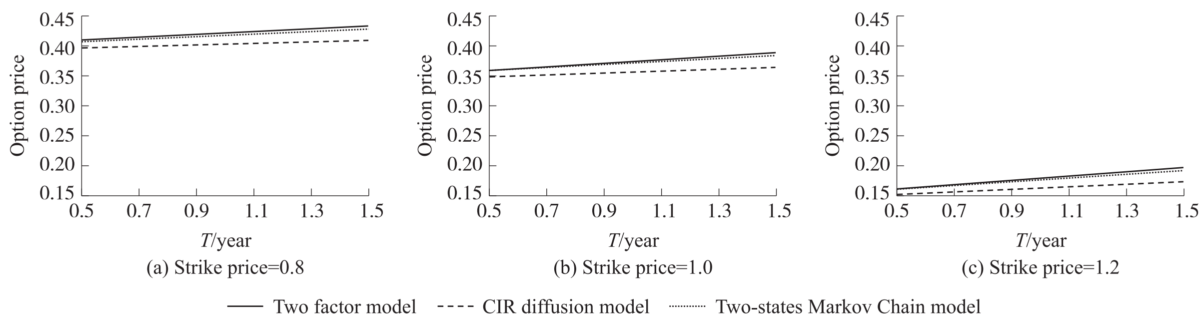

图 2　期权价格与到期时间的关系

Fig. 2　The relationship between option price and expiration time

[参考文献]

[1] BLACK F,SCHOLES M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. Journal of political economy,1973,81:637-659.

[2] MERTON R C. The theory of rational option pricing[J]. Bell journal of economics and management science,1973,4:141-183.

[3] ELLIOTT R J,AGGOUN L,MOORE J B. Hidden Markov models:estimation and control[M]. Berlin,Heidelberg,New York:Springer,1994.

[4] ELLIOTT R J,KOPP P E. Mathematics of financial markets[M]. Berlin,Heidelberg,New York:Springer,1999.

[5] ELLIOTT R J,HINZ J. Portfolio analysis,hidden Markov models and chart analysis by PF-Diagrams[J]. International journal of theoretical and applied finance,2002,5:385-399.

[6] FÖLLMER H,SONDERMANN D. Hedging of contingent claims under incomplete information[C]//Contributions to Mathematical Economics. Amsterdam:North Holland,1986:205-223.

[7] FÖLLMER H,SCHWEIZER M. Hedging of contingent claims under incomplete information[C]//Applied Stochastic Analysis. London:Gordon and Breach,1991:89-414.

[8] GERBER H,SHIU E S W. Option pricing by Esscher transforms(with discussions)[J]. Transaction of the society of autuaries,1994,46:99-191.

[9] YANG H. The Esscher transform[C]//Encyclopedia of Actuarial Science. New York:Wiley,2004:617-621.

[10] BÜHLMANN H,DELBAEN F,EMBRECHTS P,et al. No-arbitrage,change of measure and conditional esscher transform[J]. CWI quarterly,1996,9(4):291-317.

[11] ELLIOTT R J,CHAN L L,SIU T K. Option pricing and Esscher transform under regime switching[J]. Annals of finance,2005,1(4):423-432.

[12] BUFFINGTON J,ELLIOTT R J. Regime switching and European options[C]//Stochastic Theory and Control,Proceedings of a Workshop. Springer Verlag,2002:73-81.

[13] BUFFINGTON J,ELLIOTT R J. American options with regime switching[J]. International journal of theoretical and applied finance,2002,5:497-514.

[14] BÜHLMANN H,DELBAEN F,EMBRECHTS P,et al. On Esscher transforms in discrete finance models[J]. ASTIN bulletin,1998,28(2):171-186.

[15] BOYLE P P. Options:a Monte Carlo approach[J]. Journal of financial economics,1977,4(4):323-338.

[责任编辑:陆炳新]