

2 类图完美匹配数目解析式的嵌套递推求法

唐保祥¹, 任 韩²

(1.天水师范学院数学与统计学院, 甘肃 天水 741001)

(2.华东师范大学数学系, 上海 200062)

[摘要] 完美匹配的计数理论在晶体物理学、量子化学和计算机科学中都有重要的应用, 对此问题的研究具有非常重要的理论价值和现实意义. 但是, 一般图的完美匹配计数问题已经被证实为 NP-难问题. 本文用划分、求和、再嵌套递推的方法给出了 2 类特殊图完美匹配数目的显式表达式, 为图的完美匹配问题的应用提供了理论支持.

[关键词] 完美匹配, 线性递推式, 特征方程

[中图分类号] O175.5 **[文献标志码]** A **[文章编号]** 1001-4616(2020)01-0001-04

The Nested Recursive Method of Analytic Formula of the Number of Perfect Matchings for Two Types of Graphs

Tang Baoxiang¹, Ren Han²

(1.School of Mathematics and Statistics, Tianshui Normal University, Tianshui 741001, China)

(2.Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200062, China)

Abstract: It's important apply for perfect matching counting theories in crystal physics, quantum chemistry and computer science. The research for perfect matching countings has a quite important theoretical value and realistic meanings. However, the counting problem of perfect matchings for general graphs has been proved to be NP-hard. In this paper, by applying differentiation, summation and re-nested recursive calculation, several counting formulae of the perfect matchings for two specific types of graphs are given. Therefore, this provides the theory support for the application of perfect matching in graphs.

Key words: perfect matching, linear recurrence relation, characteristic equation

匹配理论是图论研究的重要内容之一, 而且是一个有生机活力的研究领域, 它不仅具有很强的应用背景, 而且在过去的几十年中, 它是快速发展的组合论中许多重要思想的源泉. 目前, 图的完美匹配计数理论已经在多个领域得到应用, 也引起了众多数学家、物理学家和化学家的广泛关注. 遗憾的是, Valiant L^[1] 年证明了一个图(即使是偶图)的完美匹配计数是 NP-难问题. 因此, 要得到一般图的完美匹配数的计算公式是困难的. 目前, 已有一些文献对一些特殊图的完美匹配计数作了相关的研究^[1-15]. 本文给出了 2 类特殊图完美匹配数目的计算公式. 本文所给方法, 适合相同结构重复出现的很多类图完美匹配数的求解.

定义 1 设图 G 是一个有完美匹配的图, 若图 G 的两个完美匹配 M_1 和 M_2 中有一条边不同, 则称 M_1 和 M_2 是 G 的两个不同完美匹配.

定义 2 $P_1 = u_1 u_2 \cdots u_{2n}, P_2 = v_1 v_2 \cdots v_{4n-1} v_{4n}$ 是两条路, 分别连结顶点 u_i 与 v_{2i-1}, u_i 与 $v_{2i} (i = 1, 2, \cdots, 2n)$ 所得图记为 $2-2nC_3$, 如图 1 所示.

定义 3 两条长为 n 的路为 $P_1 = u_1 u_2 \cdots u_{n+1}, P_2 = v_1 v_2 \cdots v_{n+1}$, 分别连结路 P_1 与 P_2 的顶点 u_i 与 $v_i (i = 1, 2, \cdots, n+1)$ 所得到的图, 称为长为 n 的梯子, 记为 T_n .

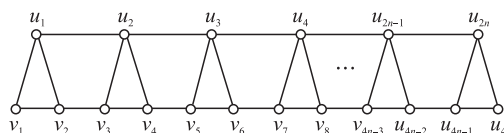


图 1 $2-2nC_3$ 图

Fig. 1 Figure of $2-2nC_3$

收稿日期: 2019-05-17.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11171114).

通讯作者: 唐保祥, 教授, 研究方向: 图论和组合数学. E-mail: tbx0618@sina.com

定义 4 n 个长为 3 的梯子 T_3^i 的顶点集 $V(T_3^i) = \{u_{i-1,1}, u_{i-1,2}, u_{i-1,3}, u_{i-1,4}, u_{i3}, u_{i4}, u_{i5}, u_{i6}\} (i=1, 2, \dots, n-1), V(T_3^n) = \{u_{n-1,1}, u_{n-1,2}, u_{n-1,3}, u_{n-1,4}, u_{n1}, u_{n2}, u_{n3}, u_{n4}\}$, 第 i 个梯子 T_3^i 与第 $i+1$ 个梯子 T_3^{i+1} 有公共边 $u_{i3}u_{i4} (i=1, 2, \dots, n-1)$, 这样得到的图记为 $1-nDT_3$, 如图 2 所示.

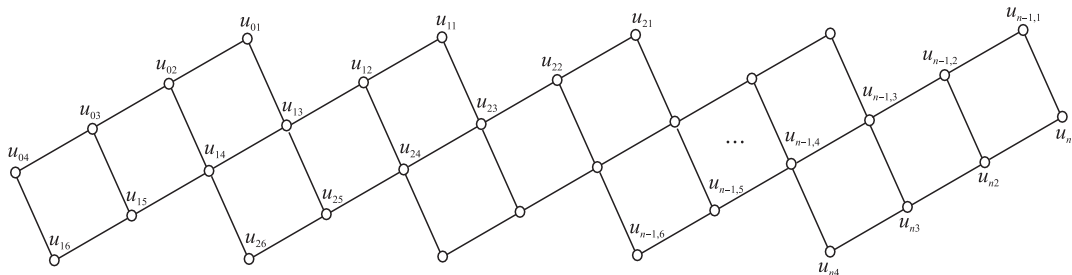


图 2 $1-nDT_3$ 图

Fig. 2 Figure of $1-nDT_3$

1 主要结论及证明

定理 1 设 $f(n)$ 表示图 $2-2nC_3$ 的所有不同的完美匹配数, 其中 $n=1, 2, 3, \dots$. 则 $f(n) = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$.

$$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

证明 欲求 $f(n)$ 的解析式, 先定义一个图 G_1 , 并求其完美匹配. 把路 uv 的端点 u 与 v 分别与图 $2-2nC_3$ 的顶点 u_1 与 v_1 连接, 得到的图记为 G_1 , 如图 3 所示.

易知图 G_1 有完美匹配. 设 $\alpha(n)$ 为图 G_1 的完美匹配数, $M^{(1)}$ 为图 G_1 的所有完美匹配的集合, 图 G_1 包含边 uv, uu_1 的完美匹配的集合分别为 M_1 和 M_2 ,

则 $M_i \subseteq M, M_i \neq \emptyset, i=1, 2$, 且 $M_1 \cap M_2 = \emptyset, M^{(1)} = M_1 \cup M_2, \alpha(n) = |M^{(1)}|$.

求 $|M_1|$. 因为 $uv \in M_1$, 所以由 $f(n)$ 的定义知, $|M_1| = f(n)$.

求 $|M_2|$. 因为 $uu_1 \in M_2$, 所以 $vv_1, v_2v_3 \in M_2$, 由 $\alpha(n)$ 的定义知, $|M_2| = \alpha(n-1)$.

故

$$\alpha(n) = f(n) + \alpha(n-1). \quad (1)$$

再求 $f(n)$. 易知图 $2-2nC_3$ 有完美匹配. 设 $2-2nC_3$ 的所有完美匹配的集合为 $M^{(2)}, M_3$ 和 M_4 分别是图 $2-2nC_3$ 含边 u_1v_1 和 v_1v_2 的完美匹配的集合, 则 $M_i \subseteq M, M_i \neq \emptyset, i=3, 4$, 且 $M_3 \cap M_4 = \emptyset, M^{(2)} = M_3 \cup M_4$. 于是 $f(n) = |M^{(2)}| = |M_3| + |M_4|$.

求 $|M_3|$. 因为 $u_1v_1 \in M_3$, 所以 $v_2v_3 \in M_3$, 由 $\alpha(n)$ 的定义知 $|M_3| = \alpha(n-1)$.

求 $|M_4|$. 因为 $v_1v_2 \in M_4$, 所以 $u_1u_2, v_2v_3 \in M_4$, 由 $f(n)$ 的定义知 $|M_4| = f(n-1)$.

故

$$f(n) = f(n-1) + \alpha(n-1). \quad (2)$$

把式(1)代入式(2), 得

$$f(n) = 2f(n-1) + \alpha(n-2). \quad (3)$$

由式(2), 得

$$f(n-1) = f(n-2) + \alpha(n-2), \quad (4)$$

由式(3)、(4)得

$$f(n) = 3f(n-1) - f(n-2). \quad (5)$$

式(5)的特征方程为 $x^2 - 3x + 1 = 0$, 其根为 $x = (3 \pm \sqrt{5})/2$. 所以式(3)的通解为

$$f(n) = c_1 \cdot \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \cdot \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

所以,

$$f(n) = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

$$\sigma(n) = \frac{13+7\sqrt{13}}{26} \cdot \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^n + \frac{13-7\sqrt{13}}{26} \cdot \left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)^n.$$

图 4 M_1 图

Fig. 4 Figure of M_1

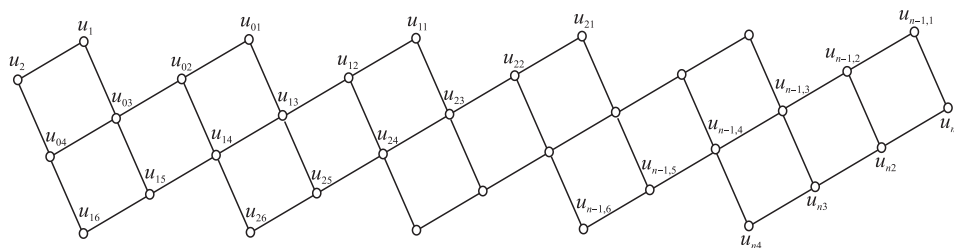
图 5 G_2 图

Fig. 5 Figure of G ,

求 $|M_\xi|$. 因为 $u_i u_j \in M_\xi$, 所以由 $\sigma(n)$ 的定义知, $|M_\xi| = \sigma(n)$.

求 $|M_6|$. 因为 $u_2u_{04} \in M_6$, 所以 $u_1u_{03}, u_{16}u_{15} \in M_6$, 由 $\tau(n)$ 的定义知, $|M_6| = \tau(n-1)$.

故

$$\tau(n) = \sigma(n) + \tau(n-1) \quad (6)$$

求 $|M_7|$. 因为 $u_{04}u_{03} \in M_7$, 所以 $u_{16}u_{15} \in M_7$, 由 $\tau(n)$ 的定义知, $|M_7| = \tau(n-1)$.

求 $|M_8|$.

情形 1 M_8 含边 $u_{04}u_{16}, u_{03}u_{15}$ 的完美匹配记为 M_8^1 , 由 $\tau(n)$ 的定义知, $|M_8^1| = \tau(n-1)$.

因为 M_8^1 和 M_8^2 没有公共的完美匹配且穷尽了 M_8 中的所有完美匹配, 所以

$$|M_g| = |M_g^1| + |M_g^2| = \tau(n-1) + \tau(n-2).$$

故

$$\sigma(n) = 2\tau(n-1) + \tau(n-2), \quad (7)$$

式(6)代入式(7),得

$$\sigma(n) = 2\sigma(n-1) + 3\tau(n-2), \quad (8)$$

式(6)代入式(8),得

$$\sigma(n) = 2\sigma(n-1) + 3\sigma(n-2) + 3\tau(n-3), \quad (9)$$

由式(8),得

$$\sigma(n-1) = 2\sigma(n-2) + 3\tau(n-3), \quad (10)$$

式(9)、(10),得

$$\sigma(n) = 3\sigma(n-1) + \sigma(n-2). \quad (11)$$

线性递推式(11)的特征方程为 $x^2 - 3x - 1 = 0$, 特征根为 $x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$.

故式(11)的通解为 $\sigma(n) = c_1 \cdot \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^n + c_2 \cdot \left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)^n$.

由图 6 知 $\sigma(1) = 5, \sigma(2) = 16$.

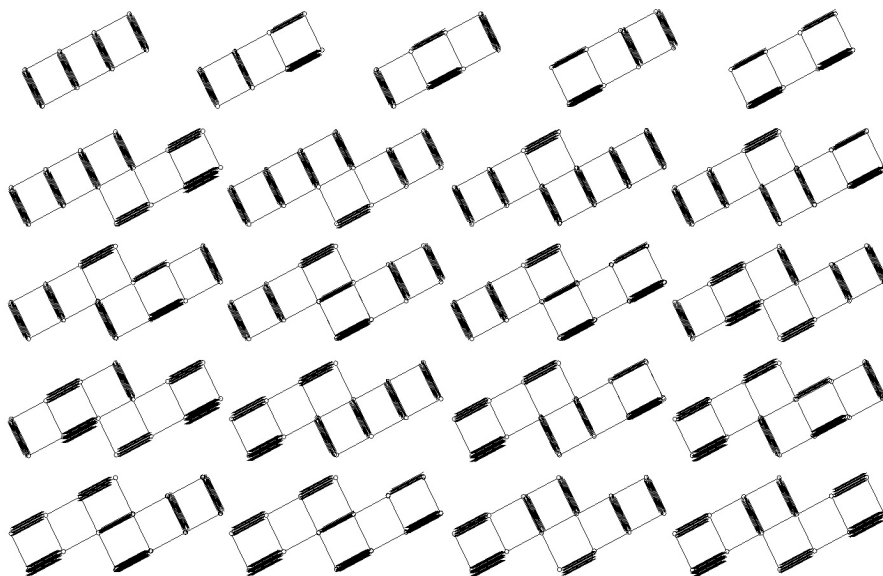


图 6 M_2 图

Fig. 6 Figure of M_2

$$\text{故 } \sigma(n) = \frac{13+7\sqrt{13}}{26} \cdot \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^n + \frac{13-7\sqrt{13}}{26} \cdot \left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)^n.$$

[参考文献]

- [1] VALIANT L G. The complexity of computing the permanent[J]. Theoretical compute science, 1979, 8(2): 189-201.
- [2] LOVÁSZ L, PLUMMER M. Matching theory[M]. New York: North-Holland Press, 1986.
- [3] YAN W G, ZHANG F J. Enumeration of perfect matchings of a type of cartesian products of graphs[J]. Discrete applied mathematics, 2006, 154: 145-157.
- [4] LI S L, YAN W G. The matching energy of graphs with given parameters[J]. Discrete applied mathematics, 2014, 162: 415-420.
- [5] DONG F M, YAN W G, ZHANG F J. On the number of perfect matchings of line graphs[J]. Discrete applied mathematics, 2013, 161: 794-801.
- [6] 林泓, 林晓霞. 若干四角系统完美匹配数的计算[J]. 福州大学学报(自然科学版), 2005, 33(6): 704-710.
- [7] 蓝雯飞, 邢志宝, 黄俊, 等. DNA 自组装计算模型求解二部图完美匹配问题[J]. 计算机研究与发展, 2016, 53(11): 2583-2592.
- [8] 唐保祥, 任韩. 4 类图完美匹配数目的递推求法[J]. 数学杂志, 2015, 353(2): 626-634.
- [9] 唐保祥, 任韩. 3 类特殊图完美对集数的计算[J]. 南开大学学报(自然科学版), 2014, 47(5): 11-16.
- [10] 唐保祥, 任韩. 2 类特殊图中的完美匹配数[J]. 浙江大学学报(理学版), 2017, 44(3): 266-269.
- [11] 唐保祥, 任韩. 2 类图完美匹配的计数公式[J]. 吉林大学学报(理学版), 2016, 54(4): 790-792.
- [12] 唐保祥, 任韩. 2 类图完美匹配数目的解析式[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2016, 55(4): 15-17.
- [13] 唐保祥, 任韩. 2 类特殊图中的完美匹配数[J]. 浙江大学学报(理学版), 2017, 44(3): 266-269.
- [14] 唐保祥, 任韩. 3 类图完美匹配数目的计数公式[J]. 南京师大学报(自然科学版), 2016, 39(4): 1-3.
- [15] 唐保祥, 任韩. 4 类特殊图完美匹配的计数[J]. 南京师大学报(自然科学版), 2013, 36(1): 9-15.

[责任编辑: 陆炳新]