doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2020.01.003

关于一类缓增函数的渐近性质

张惠文[1],张太忠[2]

(1.宿迁学院文理学院,江苏 宿迁 223800)
(2.南京信息工程大学数学与统计学院,江苏 南京 210044)

[**摘要**] 有人研究了无限区间上一类缓增函数的渐近性质,受复分析中单位圆内亚纯函数研究工作的启发,本文研究了对应于有限区间上的一类缓增函数,得到了这类函数的非常有趣的渐近性质.

[**关键词**] 缓增函数,渐近性质,极限
[**中图分类号**]O172 [**文献标志码**]A [**文章编号**]1001-4616(2020)01-0013-05

On Asymptotic Properties of A Class of Slowly Increasing Functions

Zhang Huiwen[1],Zhang Taizhong[2]

(1.School of Arts and Sciences,Suqian College,Suqian 223800,China)
(2.School of Mathematics and Statistics,Nanjing University of Information Science and Technology,Nanjing 210044,China)

Abstract:Someone studied asymptotic properties of a class of slowly increasing functions on infinite intervals. Inspired by researches on meromorphic functions on the unit disk,we discuss a class of slowly increasing functions in finite intervals, and obtain some interesting asymptotic properties of these functions in this paper.

Key words:slowly increasing function,asymptotic property,limit

本文讨论区间上一类具有慢增长性的实值函数的渐近性质. Polya G,Sezego G 在文献[1]中给出如下的定义 1 和定理 1.

定义 1[1] 设 $u(x)$ 为区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增的连续的非负值函数,且满足

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=+\infty$,

(ii)存在 $k,k>1$,使得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{u(kx)}{u(x)}=1$,

则称 $u(x)$ 为区间 $[0,+\infty)$ 上缓增函数.

定理 1[1] 若 $u(x)$ 为区间 $[0,+\infty)$ 上缓增函数,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log u(x)}{\log x}=0$.

周向宇[2]研究了区间 $[0,+\infty)$ 上此类函数的渐近性,他给出如下定义 2 和定理 2.

定义 2[2] 设 $u(x)$ 为区间 $[0,+\infty)$ 上的非负值连续函数,且满足

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=+\infty$,

(ii)存在 $k,k>1$,使得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{u(kx)}{u(x)}=c$,

则称 $u(x)$ 为区间 $[0,+\infty)$ 上广义缓增函数. 为了区分定义 1 与定义 2,本文给定义 2 中缓增函数添加了“广义”两字. 显然 $c\geqslant 1$.

定理 2[2] 若 $u(x)$ 为区间 $[0,+\infty)$ 上广义缓增函数,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log u(x)}{\log x}=\dfrac{\log c}{\log k}$.

显而易见,定理 2 改进并推广了定理 1.

收稿日期:2019-04-20.
基金项目:国家自然科学基金项目(11271197)、江苏省高校自然科学基础研究项目(07KJB110069).
通讯作者:张太忠,教授,研究方向:全纯函数空间,复逼近论. E-mail:ztz@ nuist.edu.cn

上述研究工作都是针对无限区间上缓增函数,本文研究有限区间上的情况. 为方便起见,本文首先给出如下定义 3 和定义 4,进而得到了定理 3 和定理 4. 有限区间上缓增函数的定义也是本文克服的困难之一.

定义 3　设 $u(x)$ 为区间 $[0,1)$ 上单调递增的连续的非负值函数,且满足

(i) $\lim\limits_{x\to 1^-} u(x)=+\infty$,

(ii) 存在 k,$0<k<1$,使得 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{u(1-kx)}{u(1-x)}=1$,

则称 $u(x)$ 为区间 $[0,1)$ 上缓增函数.

定理 3　设 $u(x)$ 为区间 $[0,1)$ 上缓增函数,则 $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\log u(x)}{\log\dfrac{1}{1-x}}=0$.

定义 4　设 $u(x)$ 为区间 $[0,1)$ 上的非负值连续函数,且满足

(i) $\lim\limits_{x\to 1^-} u(x)=+\infty$,

(ii) 存在 k,$0<k<1$,使得 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{u(1-kx)}{u(1-x)}=c$,

则称 $u(x)$ 为区间 $[0,1)$ 上广义缓增函数. 显然 $c\geqslant 1$.

定理 4　设 $u(x)$ 为区间 $[0,1)$ 上广义缓增函数,则 $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\log u(x)}{\log\dfrac{1}{1-x}}=\dfrac{\log c}{-\log k}$.

定理 4 改进并推广了定理 3.

1　定理 3、定理 4 的证明

定理 3 的证明　由定义 3 条件(ii)知对于任意的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$,不妨 $0<\delta<1$,使得当 $0<x\leqslant\delta<1$ 时有:

$$1-\varepsilon<\frac{u(1-kx)}{u(1-x)}<1+\varepsilon.$$

即不等式

$$(1-\varepsilon)u(1-x)<u(1-kx)<(1+\varepsilon)u(1-x)\tag{1}$$

对于 $0<x\leqslant\delta<1$ 成立. 从而对于 $x=k^n\delta<\delta$ 成立,n 为任意正整数.

归纳可得

$$u(1-k^n\delta)<(1+\varepsilon)u(1-k^{n-1}\delta)<\cdots<(1+\varepsilon)^n u(1-\delta).\tag{2}$$

对于上述的 $\delta>0$,当 $0<1-x\leqslant\delta$ 时,有

$$\frac{1}{1-x}\geqslant\frac{1}{\delta}\triangleq M(\varepsilon)>1,$$

从而存在正整数 $N>0$,使得

$$\left(\frac{1}{k}\right)^{N-1}M(\varepsilon)\leqslant\frac{1}{1-x}<\left(\frac{1}{k}\right)^{N}M(\varepsilon).\tag{3}$$

由不等式(3)可以推出以下不等式(4)、(5):

$$\frac{\log\dfrac{1}{1-x}-\log M(\varepsilon)}{\log\dfrac{1}{k}}<N\leqslant\frac{\log\dfrac{1}{1-x}-\log M(\varepsilon)}{\log\dfrac{1}{k}}+1,\tag{4}$$

$$1-k^{N-1}\delta\leqslant x<1-k^N\delta<1.\tag{5}$$

由函数 $u(x)$ 的单调性和不等式(5)、(2)、(4)依次有:

$$\log u(x)\leqslant\log u(1-k^N\delta)\leqslant\log[(1+\varepsilon)^N u(1-\delta)]=N\log(1+\varepsilon)+\log u(1-\delta)\leqslant$$

$$\left\{\frac{\log\frac{1}{1-x}-\log M(\varepsilon)}{\log\frac{1}{k}}+1\right\}\log(1+\varepsilon)+\log u(1-\delta).$$

取上极限有:

$$0\leqslant\overline{\lim_{x\to1^-}}\frac{\log u(x)}{\log\frac{1}{1-x}}\leqslant\frac{\log(1+\varepsilon)}{\log\frac{1}{k}},$$

再令 $\varepsilon\to0^+$,得 $\overline{\lim\limits_{x\to1^-}}\dfrac{\log u(x)}{\log\frac{1}{1-x}}=0$. 结合定义 3 条件(i),定理 1 证毕.

定理 4 的证明 由定义 4 条件(ii)得:对于任意的 $\varepsilon>0$(不妨 $0<\varepsilon<1$),存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$(不妨 $0<\delta<1$),使得当 $0<x\leqslant\delta<1$ 时有,

$$c-\varepsilon<\frac{u(1-kx)}{u(1-x)}<c+\varepsilon.$$

即不等式

$$(c-\varepsilon)u(1-x)<u(1-kx)<(c+\varepsilon)u(1-x)\tag{6}$$

对于 $0<x\leqslant\delta<1$ 成立.

令 $V(x)=\max\limits_{0\leqslant y\leqslant x}u(y)$,$F(x)=\min\limits_{x\leqslant y<1}u(y)$,则不难证明在$[0,1)$上有 $F(x)\leqslant u(x)\leqslant V(x)$,且 $V(x)$、$F(x)$ 为单调增函数.

一方面,由

$$V(1-kx)=\max_{0\leqslant y\leqslant1-kx}u(y)\overset{y=1-ky_1}{=\!=\!=}\max_{0\leqslant1-ky_1\leqslant1-kx}u(1-ky_1)=\max_{\frac{1}{k}\geqslant y_1\geqslant x}u(1-ky_1)=$$
$$\max\{\max_{\delta\geqslant y_1\geqslant x}u(1-ky_1),\max_{\frac{1}{k}\geqslant y_1\geqslant\delta}u(1-ky_1)\},$$

由定义 4 条件(i)可知,存在更小的正数 δ_1,$0<\delta_1\leqslant\delta$,使得

$$\max_{\delta_1\geqslant y_1\geqslant x}u(1-ky_1)\geqslant\max_{\frac{1}{k}\geqslant y_1\geqslant\delta_1}u(1-ky_1),$$

为方便起见,不妨 δ_1 仍记为 δ,因而有

$$V(1-kx)=\max_{\delta\geqslant y_1\geqslant x}u(1-ky_1),$$

由不等式(6),有

$$V(1-kx)\leqslant(c+\varepsilon)\max_{1-\delta\leqslant1-y_1\leqslant1-x}u(1-y_1)\leqslant(c+\varepsilon)\max_{0\leqslant1-y_1\leqslant1-x}u(1-y_1)=(c+\varepsilon)V(1-x).$$

即不等式 $V(1-kx)\leqslant(c+\varepsilon)V(1-x)$ 对于 $0<x\leqslant\delta<1$ 成立. 当然,对于 $x=k^n\delta<\delta$ 也成立,n 为任意正整数.

归纳可得递推不等式

$$V(1-k^n\delta)\leqslant(c+\varepsilon)^nV(1-\delta).\tag{7}$$

对于上述的 $\delta>0$,当 $0<1-x\leqslant\delta$ 时,有

$$\frac{1}{1-x}\geqslant\frac{1}{\delta}\triangleq M(\varepsilon)>1,$$

从而存在正整数 $N>0$,使得

$$\left(\frac{1}{k}\right)^{N-1}M(\varepsilon)\leqslant\frac{1}{1-x}<\left(\frac{1}{k}\right)^{N}M(\varepsilon).\tag{8}$$

由不等式(8)可以推出以下不等式(9)、(10):

$$1-k^{N-1}\delta\leqslant x<1-k^N\delta<1.\tag{9}$$

$$\frac{\log\dfrac{1}{1-x}-\log M(\varepsilon)}{\log\dfrac{1}{k}}<N\leqslant\frac{\log\dfrac{1}{1-x}-\log M(\varepsilon)}{\log\dfrac{1}{k}}+1,\tag{10}$$

由函数 $V(x)$ 的单调性和不等式(9)、(7)、(10)依次有:

$$\log V(x)\leqslant\log V(1-k^N\delta)\leqslant\log[(c+\varepsilon)^N V(1-\delta)]=N\log(c+\varepsilon)+\log V(1-\delta)\leqslant$$
$$\left\{\frac{\log\dfrac{1}{1-x}-\log M(\varepsilon)}{\log\dfrac{1}{k}}+1\right\}\log(c+\varepsilon)+\log V(1-\delta).$$

取上极限有:

$$0\leqslant\overline{\lim_{x\to1^-}}\frac{\log V(x)}{\log\dfrac{1}{1-x}}\leqslant\frac{\log(c+\varepsilon)}{\log\dfrac{1}{k}},$$

再令 $\varepsilon\to0^+$,得

$$\overline{\lim_{x\to1^-}}\frac{\log u(x)}{\log\dfrac{1}{1-x}}\leqslant\overline{\lim_{x\to1^-}}\frac{\log V(x)}{\log\dfrac{1}{1-x}}\leqslant\frac{\log c}{\log\dfrac{1}{k}}.\tag{11}$$

另一方面,对于 $0<x\leqslant\delta$,有

$$F(1-kx)=\min_{1-kx\leqslant y<1}u(y)\xlongequal{y=1-ky_1}\min_{1-kx\leqslant1-ky_1<1}u(1-ky_1)=\min_{x\geqslant y_1>0}u(1-ky_1).$$

由不等式(6)知:

$$F(1-kx)\geqslant(c-\varepsilon)\min_{x\geqslant y_1>0}u(1-y_1)=(c-\varepsilon)\min_{1-x\leqslant1-y_1<1}u(1-y_1)=(c-\varepsilon)F(1-x),$$

即不等式

$$F(1-kx)\geqslant(c-\varepsilon)F(1-x)$$

对于 $0<x\leqslant\delta$ 成立. 当然,对于 $x=k^n\delta<\delta$ 成立,n 为任意正整数. 由此可得递推不等式

$$F(1-k^n\delta)\geqslant(c-\varepsilon)^nF(1-\delta).\tag{12}$$

对于上述的 $\delta>0$,当 $0<1-x\leqslant\delta$ 时,有

$$\frac{1}{1-x}\geqslant\frac{1}{\delta}\triangleq M(\varepsilon)>1,$$

从而存在上述同样的正整数 $N>0$,使得不等式(9)、(10)仍成立.

由函数 $F(x)$ 的单调性和不等式(9)、(12)、(10)依次有

$$\log F(x)\geqslant\log F(1-k^{N-1}\delta)\geqslant\log[(c-\varepsilon)^{N-1}F(1-\delta)]=(N-1)\log(c-\varepsilon)+\log F(1-\delta)\geqslant$$
$$\left\{\frac{\log\dfrac{1}{1-x}-\log M(\varepsilon)}{\log\dfrac{1}{k}}-1\right\}\log(c-\varepsilon)+\log F(1-\delta),$$

取下极限有:

$$\underline{\lim_{x\to1^-}}\frac{\log F(x)}{\log\dfrac{1}{1-x}}\geqslant\frac{\log(c-\varepsilon)}{\log\dfrac{1}{k}},$$

再令 $\varepsilon\to0^+$,得

$$\underline{\lim_{x\to1^-}}\frac{\log u(x)}{\log\dfrac{1}{1-x}}\geqslant\underline{\lim_{x\to1^-}}\frac{\log F(x)}{\log\dfrac{1}{1-x}}\geqslant\frac{\log c}{\log\dfrac{1}{k}}.\tag{13}$$

结合(11)、(13),定理 2 得证.

上述的研究工作对于复平面上全纯函数的值分布理论[3-4]研究和单位圆内的全纯函数研究[5]具有参考和应用价值. 定理 1 和定理 2 对应于复平面上研究,定理 3 和定理 4 对应于单位圆内研究. 本文的方法可以考虑进一步应用于相关的缓增函数[6-9]的研究.

[参考文献]

[1] POLYA G,SEZEGO G. Problems and theorems in analysis[M]. New York:Springer Verlag,1972.
[2] 周向宇. 关于一类函数的渐进性质[J]. 湘潭大学自然科学学报,1986,9(4):16-21.
[3] 杨乐. 值分布论及其新研究[M]. 北京:科学出版社,1982.
[4] 庄圻泰. 亚纯函数的奇异方向[M]. 北京:科学出版社,1982.
[5] 张太忠. 复变函数论[M]. 北京:科学出版社,2016.
[6] HAYMAN W K. Slowly growing integral and subharmonic functins[J]. Commentarii mathematici Helvetici,1960,34:75-84.
[7] HAYMAN W K. On the characteristic of functions meromorphic in the unit disk and of their integrals[J]. Acta mathematica,1964,112:181-214.
[8] ESSEN M,HAYMAN W K,HUBER A. Slowly growing subharmonic functions I[J]. Commentarii mathematici Helvetici,1977,52:329-356.
[9] CHYZHYKOV I,KRAVETS1 M. On the minimum modulus of analytic functions of moderate growth in the unit disc[J]. Computational methods and function theory,2016,16:53-64.

[责任编辑:陆炳新]