

时间周期哈密尔顿系统的 Ergodic 行为

李 卓, 李 霞

(苏州科技大学数理学院, 江苏 苏州 215009)

[摘要] 本文拟用 PDE 方法, 在时间 1-周期 Hamilton 函数 $H(x, t, p)$ 关于 (x, t, p) 连续, 关于 p 强制条件下, 证明存在 $\bar{c} \leq \tilde{c} \in \mathbf{R}$, 使得函数 $u(x, t) - \bar{c}t$ 在 $\mathbf{T}^n \times [0, \infty)$ 有下界, $u(x, t) - \tilde{c}t$ 在 $\mathbf{T}^n \times [0, \infty)$ 有上界, 其中 $u(x, t)$ 是 Hamilton-Jacobi 方程的粘性解.

[关键词] Hamilton-Jacobi 方程, 粘性解, 临界值

[中图分类号] O193 [文献标志码] A [文章编号] 1001-4616(2020)01-0018-05

Ergodic Behavior of the Time Periodic Hamilton System

Li Zhuo, Li Xia

(School of Mathematics and Physics, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou 215009, China)

Abstract: In this paper, we intend to use the PDE method to prove that there exists $\bar{c} \leq \tilde{c} \in \mathbf{R}$ such that $u(x, t) - \bar{c}t$ is bounded from below and $u(x, t) - \tilde{c}t$ is bounded from above on $\mathbf{T}^n \times [0, \infty)$ when the time 1-periodic Hamiltonian function $H(x, t, p)$ is continuous on (x, t, p) and coercive on p , where $u(x, t)$ is the viscosity solution of the associated Hamilton-Jacobi equation.

Key words: Hamilton-Jacobi equation, viscosity solution, critical value

1 预备知识

对于时间 1-周期的 Hamilton 函数 $H(x, t, D_x u)$, 时间 1-周期即指 $H(x, t+1, D_x u) = H(x, t, D_x u)$, 我们考虑初值问题

$$\begin{cases} u_t + H(x, t, D_x u) = 0, & (x, t) \in \mathbf{T}^n \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbf{T}^n \end{cases} \quad (1)$$

当 $u_0(x) \in C(\mathbf{T}^n)$, 若 $H(x, t, p)$ 关于 (x, t, p) 连续, 关于 p 强制的, 即, $\liminf_{R \rightarrow \infty} \{H(x, t, p) \mid (x, p) \in \bar{\Omega} \times \mathbf{R}^n, |p| \geq R\} = \infty$, 则方程(1)的解存在, 且可表示为

$$u(x, t) = \inf_{x(t) \in AC, x(0) = x} \int_{-t}^0 L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt + u_0(x(-t)),$$

且存在 $x(t) \in AC$ 实现这样的 \inf , 其中拉格朗日函数 L 是关于 H 的 Legendre 变换, 即 $L = \sup_{p \in \mathbf{R}^n} \{p\dot{x} - H(x, t, p)\}^{[1]}$.

我们想要寻找 $c \in \mathbf{R}$, 使得 $u(x, t) - ct$ 有界, c 在不同的文献中有不同的名称: 在 Mañé 的文献中称为临界值, 在 Mather 理论中称为 $\alpha(0)$, 即 α 函数在 0 时的值, 也被称为 Hamilton 均值. 我们称这样的 c 为临界值. 它有着非常重要的动力系统意义. Mather 在 1991 年用变分法证明了 $\alpha(0)$ 的存在性. 其中涉及到极小测度的存在性, 用到了拉格朗日函数 $L(t, x, \dot{x})$ 关于 (t, x, \dot{x}) 的 C^2 正则性, 关于 \dot{x} 的超线性增长性以及关于 \dot{x} 的凸性^[2].

本文拟用 PDE 方法去寻找类似 $\alpha(0)$, 即 c 的存在性. 我们只需用 H 关于 p 的强制性. 这个问题我们称为附加特征值问题. 这是粘性解理论中非常重要的一类问题. 对于自治 Hamilton-Jacobi 方程 $H(x, D_x u) = c$ 里临界值及临界粘性解的存在性, 除了采用上述的变分法, 在 Hamilton-Jacobi 方程粘性解理论里, 采用的是遍

收稿日期: 2018-10-16.

基金项目: 国家自然科学基金面上项目(11471238)、苏州科技大学研究生科研创新计划项目(SKYCX_16011).

通讯作者: 李霞, 博士, 副教授, 研究方向: 哈密尔顿动力系统. E-mail: lixia0527@188.com

历逼近(ergodic approximation)法,即对于折扣方程 $\lambda u + H(x, D_x u) = 0$, 可找到一族等度连续和一致有界的函数列 $u_\lambda(x)$, 当 $\lambda \rightarrow 0^+$ 时, 存在一列子列收敛至 $H(x, D_x u) = c$ 的粘性解. 事实上, 结合极小测度的性质, Fathi 证明了这个极限是唯一的. 这种方法最初由 Lions 等在其未发表的论文《Homogenization of Hamilton-Jacobi equation》中介绍, 现被广泛采用及推广, 这些结论详见文[3-8].

我们对 $H(x, t, p)$ 作出如下假设:

(H_1) H 关于 (x, t, p) 连续;

(H_2) H 关于 p 是强制的, 即指 $\lim_{R \rightarrow \infty} \inf \{H(x, p) \mid (x, p) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n, |p| \geq R\} = \infty$;

(H_3) $H(x, t+1, D_x u) = H(x, t, D_x u)$.

我们的结论是:

定理 1 若 H 满足条件(H_1), (H_2), (H_3), $u_0(x) \in \text{Lip}(T^n)$, $u(x, t)$ 是(1)的粘性解, 则: 存在常数 $\bar{c} \leq \tilde{c} \in \mathbb{R}$, 使得

(i) 函数 $u(x, t) - \bar{c}t$ 在 $T^n \times [0, \infty)$ 有下界.

(ii) 函数 $u(x, t) - \tilde{c}t$ 在 $T^n \times [0, \infty)$ 有上界.

2 基本结论

在这一节里, 我们将给出一些关于粘性解的基本概念和结论. 首先, 我们给出粘性解的定义. 令 Ω 是 \mathbb{R}^n 中的开集, 我们考虑 Hamilton-Jacobi 方程

$$F(x, u(x), Du(x)) = 0, x \in \Omega. \quad (2)$$

定义 1 (i) 一个局部有界函数 $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 满足

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi \in C^1(\Omega), z \in \Omega, \max_{\Omega} (u^* - \phi) = (u^* - \phi)(z) \\ \Rightarrow F_*(z, u^*(z), D\phi(z)) \leq 0 \end{array} \right\},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi \in C^1(\Omega), z \in \Omega, \min_{\Omega} (u_* - \phi) = (u_* - \phi)(z) \\ \Rightarrow F^*(z, u_*(z), D\phi(z)) \geq 0 \end{array} \right\},$$

则称 u 是(2)的粘性下解(粘性上解).

(ii) 若一个局部有界函数 $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 同时是(2)的粘性上解和粘性下解, 则 u 是(2)的粘性解.

其中, $F_*(x) = \liminf_{r \rightarrow 0^+} \{F(y) : y \in \Omega \cap B_r(x)\}$, F_* 称为 F 的下半连续包络. ($F^*(x) = \limsup_{r \rightarrow 0^+} \{F(y) : y \in \Omega \cap B_r(x)\}$, F^* 称为 F 的上半连续包络.)

我们用 S^- 表示其粘性下解的集合, 用 S^+ 表示其粘性上解的集合.

首先, 我们介绍粘性解理论里说明解的存在性的 Perron method^[1]. 为了应用于本文的证明, 我们对定理稍作调整. 取引文中的 $\Omega = T^n$, 此时 $N(z, T^n) = \{0\}$, 其中 $z \in T^n$, 因此自然满足引文定理中的条件.

定理 2 令 $f \in LSC(T^n) \cap S^-$ 和 $g \in USC(T^n) \cap S^+$. 假设在 T^n 中, $f \leq g$ 满足

$$F = \{v \in S^- : f \leq v \leq g, x \in T^n\},$$

则 $\sup F \in S$.

接着, 我们介绍定理 3, 我们的证明中需要用到含未知函数 u 的 Hamilton-Jacobi 方程的比较定理, 这个定理的详细证明见文[9], 内容如下: 我们考虑方程

$$u_t(x, t) + H(x, u(x, t), Du(x, t)) = 0, (x, t) \in T^n \times (0, T), \quad (\text{CP})$$

除了假设 H_1, H_2, H_3 之外, 对于方程 (CP) 我们还需要 H 关于 u 的单调性(记为 MON).

定理 3 在条件 H_1, H_2, H_3 及 MON 下, 令 $u \in USC(T^n \times [0, T])$ 和 $v \in LSC(T^n \times [0, T])$ 分别为 (CP) 的粘性下解和上解, 其中 $0 < T \leq \infty$. 则

$$u(x, t) - v(x, t) \leq \max_{T^n} \{ \max(u(\cdot, 0) - v(\cdot, 0), 0 \} \text{ 对于所有的 } (x, t) \in T^n \times (0, T).$$

最后, 我们介绍一条关于粘性解正则性的定理.

定理 4^[1] 令 $R > 0, C > 0, u \in USC(B_R)$, 若 u 是(3)的粘性下解

$$|Du(x)| \leq C, x \in B_R, \quad (3)$$

则 u 在 B_R 中是 Lipschitz 连续的, 且 C 是其 Lipschitz 常数. 也就是说, 对 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B_R$, $|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})| \leq C|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$.

3 主要结论

定理 5 若 H 满足条件 (H_1) 、 (H_2) 、 (H_3) 、 $u_0(\mathbf{x}) \in \text{Lip}(\mathbf{T}^n)$, $u(\mathbf{x}, t)$ 是 (1) 的粘性解, 则: 存在常数 $\bar{c} \leq \tilde{c} \in \mathbf{R}$, 使得

- (i) 函数 $u(\mathbf{x}, t) - \bar{c}t$ 在 $\mathbf{T}^n \times [0, \infty)$ 有下界.
- (ii) 函数 $u(\mathbf{x}, t) - \tilde{c}t$ 在 $\mathbf{T}^n \times [0, \infty)$ 有上界.

在证明定理 5 之前, 我们先证明引理 1.

引理 1 若 H 满足条件 (H_1) 、 (H_2) 、 (H_3) 、 $u_0(\mathbf{x}) \in \text{Lip}(\mathbf{T}^n)$, $u(\mathbf{x}, t)$ 是 (1) 的粘性解, 则: 存在 $\bar{c} \leq \tilde{c} \in \mathbf{R}$, 使得 $u(\mathbf{x}, t) - \bar{c}t$ 有下界, $u(\mathbf{x}, t) - \tilde{c}t$ 有上界, 其中 $t \in \mathbf{Z}^+$.

证明 我们考虑一个方程

$$\begin{cases} \lambda v_t + H(\mathbf{x}, t, D_x v) = 0, & (\mathbf{x}, t) \in \mathbf{T}^n \times (0, \infty), \\ v(\mathbf{x}, 0) = v_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathbf{T}^n. \end{cases} \quad (4)$$

式中, $v_0(\mathbf{x}) \in \text{Lip}(\mathbf{T}^n)$, 固定 $\lambda \in (0, 1)$, 取 $M > 0$ 足够大, 使得 $M \geq |v_0(\mathbf{x})| + |H(\mathbf{x}, t, D_x v_0(\mathbf{x}))|$. 由于 $\lambda M t + \lambda v_0(\mathbf{x}) + M + H(\mathbf{x}, t, D_x v_0(\mathbf{x})) \geq M + \lambda v_0(\mathbf{x}) + H(\mathbf{x}, t, D_x v_0(\mathbf{x})) \geq 0$,

并且

$$-\lambda M t + \lambda v_0(\mathbf{x}) - M + H(\mathbf{x}, t, D_x v_0(\mathbf{x})) \leq -M + \lambda v_0(\mathbf{x}) + H(\mathbf{x}, t, D_x v_0(\mathbf{x})) \leq 0,$$

则函数 $Mt + v_0(\mathbf{x})$ 是 (4) 的上解, 函数 $-Mt + v_0(\mathbf{x})$ 是 (4) 的下解. 根据定理 2, 存在 (4) 的粘性解 $v_\lambda(\mathbf{x}, t)$.

已知

$$-Mt + v_0(\mathbf{x}) \leq v_\lambda(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathbf{T}^n \times (0, \infty),$$

固定 $t > 0$, 由于 $H(\mathbf{x}, t, D_x v_\lambda)$ 是 1-周期的函数, 故函数 $v_\lambda(\mathbf{x}, t+n)$ 和 $v_\lambda(\mathbf{x}, n) - Mt$ 是 (4) 的粘性下解. 根据定理 3 知:

$$-Mt + v_\lambda(\mathbf{x}, n) \leq v_\lambda(\mathbf{x}, t+n), \quad (\mathbf{x}, n) \in (\mathbf{T}^n, \mathbf{Z}^+), \quad (5)$$

取 $N > 0$ 足够大, 使 N/λ 和 $-N/\lambda$ 分别是 (4) 的经典上解和经典下解. 由于

$$-N/\lambda \leq v_0(\mathbf{x}) \leq N/\lambda, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{T}^n.$$

由比较定理

$$-N/\lambda \leq v_\lambda(\mathbf{x}, n) \leq N/\lambda, \quad (\mathbf{x}, n) \in (\mathbf{T}^n, \mathbf{Z}^+),$$

所以

$$-N \leq \lambda v_\lambda(\mathbf{x}, n) \leq N. \quad (6)$$

如果 $(\mathbf{p}, q) \in D^+ v_\lambda(\mathbf{x}, n)$, 则 $t \rightarrow 0+$, 由 (5)

$$v_\lambda(\mathbf{x}, n) \leq v_\lambda(\mathbf{x}, t+n) + Mt \leq v_\lambda(\mathbf{x}, n) + qt + Mt + o(t),$$

得到 $q \geq -M$, 当 $\mathbf{x} \in \mathbf{T}^n$, 由 (6)

$$0 \geq q + H(\mathbf{x}, n, \mathbf{p}) + \lambda v_\lambda(\mathbf{x}, n) \geq H(\mathbf{x}, n, \mathbf{p}) - M + \lambda v_\lambda(\mathbf{x}, n),$$

因此

$$H(\mathbf{x}, n, \mathbf{p}) \leq M - \lambda v_\lambda(\mathbf{x}, n) \leq M + N,$$

由于 H 的强制性, 存在一个常数 $R > 0$, 使得

$$\mathbf{p} \in B_R,$$

由此得到

$$q \leq -H(\mathbf{x}, n, \mathbf{p}) - \lambda v_\lambda(\mathbf{x}, n) \leq \max_{\mathbf{T}^n \times \mathbf{Z}^+ \times B_R} |H| + N.$$

若 $(\mathbf{p}, q) \in D^+ v_\lambda(\mathbf{x}, n)$, 则

$$|\mathbf{p}| + |q| \leq C_1 := R + M + \max_{\mathbf{T}^n \times \mathbf{Z}^+ \times B_R} |H| + N.$$

根据定理 4, $v_\lambda(\mathbf{x}, n)$ 在 $\mathbf{T}^n \times \mathbf{Z}^+$ 中是 Lipschitz 连续的.

$\{v_\lambda\}_{\lambda \in (0, 1)}$ 是 equi-Lipschitz 连续, 所以 $\{v_\lambda - \inf_{\mathbf{T}^n \times \mathbf{Z}^+} v_\lambda\}_{\lambda \in (0, 1)}$ 和 $\{\lambda v_\lambda\}_{\lambda \in (0, 1)}$ 函数集在 $\mathbf{T}^n \times \mathbf{Z}^+$ 上是 $C(\mathbf{T}^n \times \mathbf{Z}^+)$

中的紧集.

令 $K_n = (\mathbf{x}, t)$, 其中 $\mathbf{x} \in \mathbf{T}^m, t \in [0, n]$ 且 $t \in \mathbf{Z}^+$, 则取一系列 $\{\lambda_j\}_{j \in \mathbf{N}} \subset (0, 1)$, 使得

$$\begin{aligned} \lambda_j &\rightarrow 0, \\ v_{\lambda_j}(\mathbf{x}, t) - \inf_{K_n} v_{\lambda_j}(\mathbf{x}, t) &\rightarrow v_n(\mathbf{x}, t), \\ \lambda_j v_{\lambda_j}(\mathbf{x}, t) &\rightarrow w_n(\mathbf{x}, t), \end{aligned}$$

当 $j \rightarrow \infty$ 时, 在 K_n 中一致收敛于 v_n 和 w_n . 对 $(\mathbf{x}, t) \in K_n$,

$$w_n(\mathbf{x}, n) = \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j v_{\lambda_j}(\mathbf{x}, t) = \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j [(v_{\lambda_j}(\mathbf{x}, t) - \inf_{K_n} v_{\lambda_j}) + \inf_{K_n} v_{\lambda_j}] = \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j \inf_{K_n} v_{\lambda_j},$$

这表明 $w_n(\mathbf{x}, t)$ 在 K_n 中为一常数.

现在可令 $v_n(\mathbf{x}, t), t \in \mathbf{Z}^+, 0 \leq t \leq n$ 是 (7) 的粘性解.

$$\begin{cases} c_n + v_t + H(\mathbf{x}, t, D_x v) = 0 \\ v(\mathbf{x}, 0) = v_0(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (7)$$

式中, $v_n(\mathbf{x}, t) = \lim_{j \rightarrow \infty} [v_{\lambda_j}(\mathbf{x}, t) - \inf_{(\mathbf{x}, t) \in T^m \times [0, n]} v_{\lambda_j}(\mathbf{x}, t)], c_n = \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j \inf_{(\mathbf{x}, t) \in T^m \times [0, n]} v_{\lambda_j}(\mathbf{x}, t)$.

令 $\bar{c} = \inf_{n \in \mathbf{Z}^+} c_n$, 因为 $\forall n \in \mathbf{Z}^+, \bar{c} \leq c_n$, 由粘性解的定义, 易证 $\forall n \in \mathbf{Z}^+, v_n(\mathbf{x}, t)$ 是

$$\begin{cases} \bar{c} + v_t + H(\mathbf{x}, t, D_x v) = 0 \\ v(\mathbf{x}, 0) = v_0(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (8)$$

的粘性下解.

由于 $v_n(\mathbf{x}, t)$ 是 (8) 的粘性下解, 则 $v_n(\mathbf{x}, t) + \bar{c}t$ 是 (9) 的粘性下解.

$$\begin{cases} v_t(\mathbf{x}, t) + H(\mathbf{x}, t, D_x v(\mathbf{x}, t)) = 0 \\ v(\mathbf{x}, 0) = v_0(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (9)$$

可选择常数 M_1 , 使得

$$v_0(\mathbf{x}) + M_1 < u_0(\mathbf{x}),$$

由比较定理

$$v_n(\mathbf{x}, t) + \bar{c}t + M_1 < u(\mathbf{x}, t),$$

所以

$$v_n(\mathbf{x}, t) + M_1 < u(\mathbf{x}, t) - \bar{c}t.$$

当 $t \in \mathbf{Z}^+$ 时, 因为 $v_n(\mathbf{x}, t)$ 有界, 从而 $u(\mathbf{x}, t) - \bar{c}t$ 在 $T^m \times \mathbf{Z}^+$ 上有下界. 令 $\tilde{c} = \sup_{n \in \mathbf{Z}^+} c_n$, 因为 $\forall n \in \mathbf{Z}^+, \tilde{c} \geq c_n$, 由粘性解的定义, 易证 $\forall n \in \mathbf{Z}^+, v_n(\mathbf{x}, t)$ 是

$$\begin{cases} \tilde{c} + v_t + H(\mathbf{x}, t, D_x v) = 0 \\ v(\mathbf{x}, 0) = v_0(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (10)$$

的粘性上解.

由比较定理, 同理可得存在常数 $M_2, \forall n \in \mathbf{Z}^+$, 使得

$$u(\mathbf{x}, t) - \tilde{c}t < v_n(\mathbf{x}, t) + M_2,$$

从而 $u(\mathbf{x}, t) - \tilde{c}t$ 有上界.

定理 5 的证明 由于

$$u(\mathbf{x}, t) - \tilde{c}t = u_0(\mathbf{x}(-t)) + \int_{-t}^0 (L(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) - \tilde{c}) dt, \quad (\mathbf{x}, t) \in T^m \times [0, \infty),$$

取常数 n 使得 $t = n + s$, 其中 $0 \leq s < 1$, 得到

$$u(\mathbf{x}, n+s) - \tilde{c}(n+s) = u_0(\mathbf{x}(-(n+s))) + \int_{-(n+s)}^{-n} (L(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) - \tilde{c}) dt + \int_{-n}^0 (L(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) - \tilde{c}) dt,$$

由于 $\int_{-(n+s)}^{-n} (L(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) - \tilde{c}) dt$ 在 \mathbf{R} 上有界, 于是我们只需证明 $u(\mathbf{x}, t) - \tilde{c}t$ 在 $T^m \times \mathbf{Z}^+$ 上有界. 根据引理 1,

可得 $u(\mathbf{x}, t) - \tilde{c}t$ 和 $u(\mathbf{x}, t) - \tilde{c}t$ 在 $T^m \times [0, \infty)$ 上分别有下界和上界.

定理 5 得证.

[参考文献]

- [1] ISHII H. A short introduction to viscosity solutions and the large time behaviour of solutions of H-J equations[C]//Hamilton-Jacobi equations;approximation,numerical analysis and applications. Cetraro,Italy:Springer,2013;111–249.
- [2] MATHER J. Action minimizing invariant measures for positive definite Lagrangian systems[J]. Mathematische zeitschrift, 1991,207:169–207.
- [3] AL-AIDAROUS E S,ALZHRANI E O,ISHII H,et al. A convergence result for the ergodic problem for Hamilton-Jacobi equations with Neumann-type boundary conditions[J]. Proceedings of the Royal society of Edinburgh section a mathematics, 2016,146:225–242.
- [4] DAVINI A,FATHI A,ITURRIAGA R,et al. Convergence of the solutions of the discounted equations;the discrete case[J]. Mathematische zeitschrift,2016,284:1021–1034.
- [5] DAVINI A,FATHI A,ITURRIAGA R,et al. Convergence of the solutions of the discounted Hamilton-Jacobi equation;convergence of the discounted solutions[J]. Inventiones mathematicae,2016,206:29–55.
- [6] GOMES D A,MITAKE H,TRAN H V. The selection problem for discounted Hamilton-Jacobi equations:some non-convex cases[J/OL]. ArXiv e-prints,2016.
- [7] ISHII H,MITAKE H,TRAN H V. The vanishing discount problem and viscosity Mather measures. Part 1:the problem on a torus[J/OL]. Arxiv e-prints,2016.
- [8] MITAKE H,TRAN H V. Selection problems for a discount degenerate viscous Hamilton Jacobi equation[J]. Advances in mathematics,2017,306:684–703.
- [9] LI X. Long-time asymptotic solutions of convex Hamilton-Jacobi equations depending on unknown functions[J]. Discrete and continuous dynamical systems,2017,37:5151–5562.

[责任编辑:陆炳新]