

doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2020.03.006

KdV 型粘性分数阶方程的数值解

林府标¹, 马丽荣²

(1. 贵州财经大学数统学院, 贵州 贵阳 550025)
(2. 石家庄邮电职业技术学院会计系, 河北 石家庄 050000)

[摘要] 构造了一种求解 KdV 型粘性分数阶方程的数值格式, 分析了格式的稳定性, 证明了格式都是无条件稳定的. 数值结果验证了方程中存在分数阶项时, 时间方向是 1.5 阶, 不存在分数阶项时, 时间方向是 2 阶. 最后用数值例子讨论这两类方程解的长时间衰减率, 并讨论了不同参数对解的衰减率的影响. 数值例子表明, 这方程的衰减率是: L^2 范数接近 -0.25; L^∞ 范数接近 -0.5, 这与已知的理论结果是吻合的.

[关键词] 分数阶方程, 稳定性, 谱方法, 衰减率

[中图分类号] O156.5 [文献标志码] A [文章编号] 1001-4616(2020)03-0028-06

Numerical Methods for KdV Type Fractional Order Equation with a Nonlocal Viscous Term

Lin Fubiao¹, Ma Lirong²

(1. School of Mathematics and Statistics, Guizhou University of Finance and Economics, Guiyang 550025, China)
(2. Accounting Department, Shijiazhuang Vocational and Technical College of Posts and Telecommunications, Shijiazhuang 050000, China)

Abstract: We turn to study the numerical solution of the Fractional order equation with a nonlocal viscous term. We propose a numerical scheme to solve this equation. A detailed analysis is carried out for this scheme, and we prove that the scheme is unconditionally stable. The numerical results verify that the fractional order equation with a nonlocal viscous term is of order 1.5, when a nonlocal viscous term does not exist, the scheme is of order 2. At last, we use the proposed methods to investigate the asymptotical decay rate of the solutions to fractional order equation with a nonlocal viscous term. We equally discuss the role of the diffusion terms, the geometric dispersion and the nonlinearity respectively. The performed numerical experiment confirms that the decay rates in L^2 -norm, L^∞ -norm, and are very close to -0.25, and -0.5 respectively. These numerical results are consistent with the known theoretical prediction.

Key words: fractional equation, stability, spectral method, decay rates

粘性水波方程的研究一直是一个热点问题, 人们在描述小振幅的长波在非线性色散介质中传播的时候必须考虑耗散机制的影响, 这种耗散会对真实解造成影响, 这种影响会使解变得很复杂, 不便于我们了解. Kakutani 等^[1]首先讨论了粘性对水波模型的影响, 并提出一个带有扩散项与色散项的粘性水波模型. Liu 等^[2], Saut 等^[3]得到了一类粘性项的有界水深模型, Dutykh 等^[4]在研究水波方程的时候得到了一类带有粘性项的流体边界层水波模型, 这两类模型都包含相同的粘性项. 最近 Dutykh^[5], Chen 等^[6]从一类流体边界层的自由面问题出发, 得到了一类单方向波方程

$$\partial_t u + \partial_x u + \beta \partial_x^3 u + \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\partial_s u}{\sqrt{t-s}} ds + u \partial_x u - \alpha \partial_x^2 u = 0.$$

它的主要特点是扩散项与色散项的相互影响, 物理上解释是粘性边界层在流体中同时具有扩散与色散. Dutykh^[5], Chen 等^[6]考察了方程的适应性, 并证明了方程的解有如下的性质:

收稿日期: 2019-05-21.

基金项目: 贵州省科技计划基金项目(黔科合基础[2019]1051)、贵州省教育厅青年科技人才成长项目(黔教合 KY 字[2017]150)、2018 年度贵州财经大学校级科研项目资助(2018XYB04)、贵州财经大学创新探索及学术新苗项目(黔科合平台人才[2017]5736-020).

通讯作者: 林府标, 博士, 副教授, 研究方向: 计算数学, 应用数学. E-mail: linfubiao0851@163.com

$$t^{\frac{1}{2}} \|u(t)\|_{L_x^\infty} + t^{\frac{1}{4}} \|u(t)\|_{L_x^2} \leq C(u_0).$$

Chen^[7]提出了一种时间差分、空间谱方法的显隐格式,但这种格式是条件稳定,同时也没有稳定性分析. Goubet 和 Warnault^[8]讨论了一种线性粘性的渐近水波模型,并提出了了解的衰减率的估计. Dumont 和 Duval^[9]从数值的角度,引入基于向后 Euler 方法的格式来离散分数阶项,显式处理非线性项,对空间用谱离散,但是没有格式的稳定性分析,数值格式的难点在于,一方面要求所构造的格式必须尽可能地稳定,另一方面计算复杂度尽可能小. 对于一类粘性 BBM 方程, Zhang 和 Xu^[10]提出了一种无条件稳定的数值格式,对非线性项半稳处理,对非线性项用带积分余项的 Taylor 式展开,在此基础上,我们准备用上述方法来求解这类 KdV 方程.

本文将提出粘性 KdV 方程的一种无条件稳定的数值格式来研究方程的衰减率. 格式的优势在于不仅能选取较大的时间步长,而且分析了格式的稳定性,证明了格式都是无条件稳定的. 数值结果表明方程中存在分数阶项时,时间格式是 1.5 阶,不存在分数阶项时,时间格式是 2 阶. 最后用数值例子讨论这两类方程解的长时间衰减率,并讨论了不同参数对解的衰减率的影响,数值结果显示这类模型的解衰减率与已知的理论证明是吻合的.

1 粘性 KdV 型分数阶方程

考虑如下粘性 KdV 型分数阶方程:

$$\partial_t u + \partial_x u + \beta \partial_x^3 u + \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\partial_t u}{\sqrt{t-s}} ds + u \partial_x u - \alpha \partial_x^2 u = 0, t \in (0, T], x \in \Lambda, \quad (1)$$

满足下面初值条件:

$$u(x, 0) = u_0(x), x \in \bar{\Lambda},$$

和边界条件:

$$u(x, t) = u(x+L, t), t \in (0, T], x \in \bar{\Lambda},$$

这里 $\Lambda = (0, L)$, $\bar{\Lambda} = [0, L]$, T 表示时间, $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\partial_t u}{\sqrt{t-s}} ds$ 是 1/2 阶 Caputo 时间分数阶导数项,其中 α, β

为非负常数.

2 时间无条件稳定的离散格式

对于一个给定的正整数 M , 令 $t_n = n\Delta t, n = 0, 1, \dots, M$, 这里 $\Delta t = T/M$ 是时间步长, 利用带积分余项的 Taylor 公式展开有:

$$u(t) = u(s) + \partial_s u(s)(t-s) + \int_s^t \partial_\tau^2 u(\tau)(t-\tau) d\tau, \forall t, s \in (0, T].$$

分别取 $t = t_j, t = t_{j+1}$, 则可以获得

$$\partial_s u(x, s) = \frac{u(x, t_{j+1}) - u(x, t_j)}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta t} \int_s^{t_{j+1}} \partial_\tau^2 u(x, \tau)(t_{j+1} - \tau) d\tau + \frac{1}{\Delta t} \int_s^{t_j} \partial_\tau^2 u(x, \tau)(t_j - \tau) d\tau.$$

Lin 等^[11]提出了如下的分数阶导数近似:

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{t_{n+1}} \frac{\partial_s u(s)}{\sqrt{t-s}} ds = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \sum_{j=0}^n \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{\partial_s u(s)}{\sqrt{t_{n+1}-s}} ds = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \sum_{j=0}^n \frac{u(x, t_{j+1}) - u(x, t_j)}{\Delta t} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{1}{\sqrt{t_{n+1}-s}} ds + r^{n+1} =$$

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \sum_{j=0}^n \frac{u(x, t_{n+1-j}) - u(x, t_{n-j})}{\Delta t^{1/2}} [(j+1)^{1/2} - j^{1/2}] + r^{n+1} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \sum_{j=0}^n a_j \frac{u(x, t_{n+1-j}) - u(x, t_{n-j})}{\Delta t^{1/2}} + r^{n+1} =$$

$$\frac{\Delta t^{-1/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left(u(x, t_{n+1}) - \sum_{j=0}^{n-1} (a_j - a_{j+1}) u(x, t_{n-j}) - a_n u(x, t_0) \right) + r^{n+1},$$

这里

$$a_j = (j+1)^{1/2} - j^{1/2},$$

$$r^{n+1} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Delta t} \sum_{j=0}^n \left[- \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_s^{t_{j+1}} \partial_\tau u(x, \tau) \frac{t_{k+1} - \tau}{\sqrt{t_{n+1}-s}} d\tau ds + \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_s^{t_j} \partial_\tau^2 u(x, \tau) \frac{t_j - \tau}{\sqrt{t_{n+1}-s}} d\tau ds \right].$$

Lin 等^[11]证明了 $r^{n+1} = c\Delta t^{3/2}$, c 与 M 与 $\partial_x^2 u$ 有关. 在这里介绍一个线性化的时间半离散格式并考察它们的稳定性. 基于 Crank-Nicolson 半隐格式, 考虑如下基于 Crank-Nicolson 方法的半隐格式:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + \partial_x u^{n+\frac{1}{2}} + \beta \partial_x^3 u^{n+\frac{1}{2}} + \frac{v^{1/2} \Delta t^{-1/2}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \left(u^{n+1/2} - \sum_{j=0}^{n-1} (a_j - a_{j+1}) u^{n-1/2-j} - a_n u^0 \right) + \frac{1}{6} (2\partial_x u^{n+\frac{1}{2}} (3u^n - u^{n-1}) + u^{n+\frac{1}{2}} \partial_x (3u^n - u^{n-1})) - \alpha \partial_x^2 u^{n+\frac{1}{2}} = 0, n = 1, 2, \dots, M-1, \tag{2}$$

这里, $u^{n+\frac{1}{2}} = \frac{u^{n+1} + u^n}{2}$.

对于第一步

$$\frac{u^1 - u^0}{\Delta t} + \partial_x u^1 + \beta \partial_x^3 u^1 + \frac{v^{1/2} \Delta t^{-1/2}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} (u^1 - a_0 u^0) + \frac{1}{3} (2u^0 \partial_x u^1 + u^1 \partial_x u^0) - \alpha \partial_x^2 u^1 = 0. \tag{3}$$

定理 1 时间半离散格式(2)-(3)是无条件稳定的, 即:

$$\|u^1\|_0 \leq \|u^0\|_0, \tag{4}$$

$$E(u^{n+1}) \leq E(u^1) + \frac{v^{1/2} T^{1/2}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \|u^0\|_0^2, n = 1, 2, \dots, M-1,$$

这里 $\mu = \frac{v^{1/2} \Delta t^{1/2}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}$, $E(u^n) = \|u^n\|_0^2 + \mu \sum_{j=0}^{n-1} a_j \|u^{n-\frac{1}{2}-j}\|_0^2$.

证明 方程(3)与 $2\Delta t u^1$ 做内积, 注意到

$$(2\partial_x u^1 u^0 + u^1 \partial_x u^0, u^1) = (\partial_x u^1 u^0 + \partial_x (u^1 u^0), u^1) = (\partial_x u^1 u^0, u^1) - (u^1 u^0, \partial_x u^1) = 0,$$

$$(u^1 - u^0, 2u^1) = \|u^1\|_0^2 - \|u^0\|_0^2 + \|u^1 - u^0\|_0^2.$$

则有

$$\|u^1\|_0^2 - \|u^0\|_0^2 + \|u^1 - u^0\|_0^2 + \mu (\|u^1\|_0^2 - \|u^0\|_0^2 + \|u^1 - u^0\|_0^2) + 2\Delta t \alpha \|\partial_x u^1\|_0^2 = 0.$$

去掉一些正项就可以得到(4). 方程(2)两边与 $2\Delta t u^{n+\frac{1}{2}}$ 做内积, 注意到

$$(2\partial_x u^{n+\frac{1}{2}} (3u^n - u^{n-1}) + u^{n+\frac{1}{2}} \partial_x (3u^n - u^{n-1}), u^{n+\frac{1}{2}}) = (\partial_x u^{n+\frac{1}{2}} (3u^n - u^{n-1}), u^{n+\frac{1}{2}}) + (\partial_x (u^{n+\frac{1}{2}} (3u^n - u^{n-1})), u^{n+\frac{1}{2}}) =$$

$$(\partial_x u^{n+\frac{1}{2}} (3u^n - u^{n-1}), u^{n+\frac{1}{2}}) - ((3u^n - u^{n-1}) u^{n+\frac{1}{2}}, \partial_x u^{n+\frac{1}{2}}) = 0.$$

可以得到

$$\|u^{n+1}\|_0^2 - \|u^n\|_0^2 + 2\mu \left(u^{n+1/2} - \sum_{j=0}^{n-1} (a_j - a_{j+1}) u^{n-\frac{1}{2}-j} - a_n u^0, u^{n+\frac{1}{2}} \right) + 2\Delta t \alpha \|\partial_x u^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2 = 0.$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式, 有

$$\|u^{n+1}\|_0^2 - \|u^n\|_0^2 + 2\mu \|u^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2 \leq \mu \left(\sum_{j=0}^{n-1} (a_j - a_{j+1}) (\|u^{n-\frac{1}{2}-j}\|_0^2 + \|u^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2) + a_n (\|u^0\|_0^2 + \|u^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2) \right) =$$

$$\mu \sum_{j=0}^{n-1} (a_j - a_{j+1}) \|u^{n-\frac{1}{2}-j}\|_0^2 + \mu ((1 - a_n) + a_n) \|u^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2 + \mu a_n \|u^0\|_0^2. \text{ 化简可得:}$$

$$\|u^{n+1}\|_0^2 + \mu \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} \|u^{n-\frac{1}{2}-j}\|_0^2 + \mu \|u^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2 \leq \|u^n\|_0^2 + \mu \sum_{j=0}^{n-1} a_j \|u^{n-\frac{1}{2}-j}\|_0^2 + \mu a_n \|u^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2.$$

注意到

$$\mu \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} \|u^{n-\frac{1}{2}-j}\|_0^2 + \mu \|u^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2 = \mu \sum_{j=1}^n a_j \|u^{n+\frac{1}{2}-j}\|_0^2 + \mu \|u^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2 = \mu \sum_{j=0}^n a_j \|u^{n+\frac{1}{2}-j}\|_0^2.$$

因此,我们有:

$$\|u^{n+1}\|_0^2 + \mu \sum_{j=0}^n a_j \|u^{n+\frac{1}{2}-j}\|_0^2 \leq \|u^n\|_0^2 + \mu \sum_{j=0}^{n-1} a_j \|u^{n-\frac{1}{2}-j}\|_0^2 + \mu a_n \|u^0\|_0^2.$$

定理得证.

3 数值结果

3.1 数值解的有效性

本小节讨论方程(2)-(3)的空间谱方法. 由于 Fourier 谱方法对周期问题特别适用,因此将用 Fourier-Galerkin 谱方法对空间进行离散. 首先引入一些基本的定义与记号. 定义多项式空间 $S_N = \text{span} \{ \exp(-i2\pi kx/L); -N/2 \leq k \leq N/2-1 \}$.

C-N/F-G 格式:格式(2)的 Fourier 谱方法是:对给定的 $u_N^0 = \pi_N u_0$, 求 $u_N^{n+1} \in S_N$, 使得:

$$\left(\frac{u_N^{n+1} - u_N^n}{\Delta t}, \psi_N \right) + (\partial_x u_N^{n+\frac{1}{2}}, \psi_N) + \beta (\partial_x^3 u_N^{n+\frac{1}{2}}, \psi_N) + \frac{v^{1/2} \Delta t^{-1/2}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \left(u_N^{n+\frac{1}{2}} - \sum_{j=0}^{n-1} (a_j - a_{j+1}) u_N^{n-\frac{1}{2}-j} - a_n u_N^0, \psi_N \right) +$$

$$\frac{1}{6} (2\partial_x u_N^{n+\frac{1}{2}} (3u_N^n - u_N^n) + u_N^{n+\frac{1}{2}} \partial_x (3u_N^n - u_N^{n-1}), \psi_N) + \alpha (\partial_x^2 u_N^{n+\frac{1}{2}}, \psi_N) = 0, \quad n \geq 1, \psi_N \in S_N.$$

这里 $u_N^n(x) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \bar{u}_k^n \exp(-i2\pi kx/L)$, 因此可以得到关于 $\{\bar{u}_k^{n+1}\}$ 的一系列方程组.

$$\frac{1}{\Delta t} (\bar{u}_k^{n+1} - \bar{u}_k^n) + (i2\pi k/L + \alpha(2\pi k/L)^2 + \beta(2\pi k/L)^3) \bar{u}_k^{n+\frac{1}{2}} + \frac{v^{1/2} \Delta t^{-1/2}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \left(\bar{u}_k^{n+\frac{1}{2}} - \sum_{j=0}^{n-1} (a_j - a_{j+1}) \bar{u}_k^{n-\frac{1}{2}-j} - a_n \bar{u}_k^0 \right) +$$

$$\frac{1}{6} \{ 2(3u_N^n - u_N^{n-1}) \partial_x u_N^{n+\frac{1}{2}} + u_N^{n+\frac{1}{2}} \partial_x (3u_N^n - u_N^{n-1}) \}_k = 0.$$

这里 \bar{f}_k 或者 $\{f\}_k$ 表示函数 f 的 k 个 Fourier 系数. 因为这类方程的精确解很难找到,用近似方法计算数值解的收敛阶,定义

$$Rate = \log_2 \left(\frac{\|u_N^{n,2\Delta t} - u_N^{2n,\Delta t}\|_0}{\|u_N^{2n,\Delta t} - u_N^{4n,\Delta t/2}\|_0} \right),$$

这里 $u_N^{n,2\Delta t}$ 为格式在时间步长 Δt 下 $n\Delta t$ 时刻的数值解.

取 $u(x,0) = 0.32 \text{sech}^2(0.4(x-x_0))^2$, $x_0 = L/2, L = 400, N = 100, \alpha = \beta = 1$. 由表 1 可知 $v=0$ 方程不带分数阶项,格式的时间收敛阶是 2 阶,当 $v=1$ 时格式带有分数阶项,分数阶项会影响格式整体的误差阶数,格式的时间收敛阶是 1.5 阶,表 1 中的数据可以证明我们的格式是有效的.

3.2 解的长时间衰减率

在大多数情况下解的衰减是很难准确计算出来的,特别是当 $t \rightarrow \infty$,为了验证数值格式的有效性,我们假定

$$\|u(\cdot, t)\|_X = Ct^\alpha,$$

通过计算下面的量

$$R_2 = \frac{\log\left(\frac{\|u(\cdot, t)\|_0}{\|u(\cdot, t-\Delta t)\|_0}\right)}{\log\left(\frac{t}{t-\Delta t}\right)}, R_\infty = \frac{\log\left(\frac{\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty}}{\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty}}\right)}{\log\left(\frac{t}{t-\Delta t}\right)},$$

可以得到解在 L^2, L^∞ 范数下的衰减率. 取 $u(x,0) = 0.32 \text{sech}^2(0.4(x-x_0))^2$, $L = 400, N = 200, T = 2000, \Delta t = 5$. 计算结果列于表 2 所示,从这些结果可以看到 R_2, R_∞ 分别

表 1 C-N/F-G 格式解的收敛阶随时间步长的变化情况

$v \setminus \Delta t$	$\Delta t = 0.1$	$\Delta t = 0.05$	$\Delta t = 0.01$	$\Delta t = 0.005$	$\Delta t = 0.001$
$v=0$	2.007 0	2.004 5	2.001 1	2.000 5	2.000 1
$v=1$	1.363 8	1.394 8	1.446 6	1.461 1	1.481 8

表 2 不同参数下解的衰减率

v	α	β	R_2	R_∞
1	0	0	-0.246 9	-0.490 9
1	1	1	-0.243 1	-0.489 4
1	0	1	-0.248 2	-0.496 1
0.5	0.1	0.1	-0.251 0	-0.495 2
0.5	1	0.1	-0.247 6	-0.494 1
0.5	0.1	1	-0.252 3	-0.496 9

接近 $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{2}$, 验证了理论的衰减率.

3.3 各种参数对衰减率的影响

下面将讨论不同的参数 α, β, ν 对解的衰减率的影响. 取 $T = 2\ 000, L = 2\ 000, N = 200, \Delta t = 5$, 初值不变. 由图 2 可知 β 对两个范数下的衰减率的影响是明显的, 随着 β 逐渐增大, 解的衰减率减小. 由图 1-3 可知, 取不同的 α, β, ν , 解的衰减各不相同, 但都是在 -0.25 与 -0.5 之间波动.

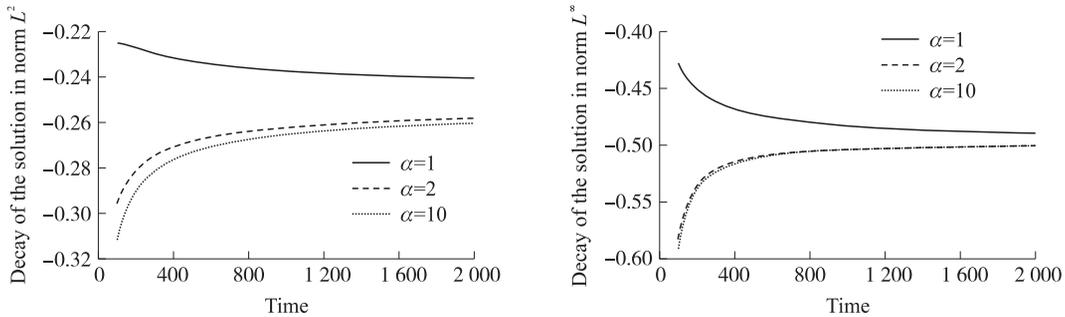


图 1 $\beta = \nu = 1$ 时, 不同时刻 L^2 与 L^∞ 范数下的衰减率

Fig. 1 The decay rate under L^2 -norm and L^∞ -norm at different times, where $\beta = \nu = 1$

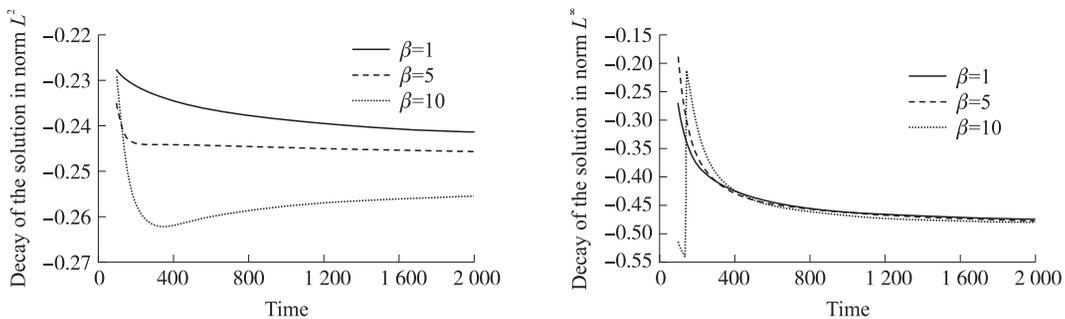


图 2 $\alpha = \nu = 1$ 时, 不同时刻 L^2 与 L^∞ 范数下的衰减率

Fig. 2 The decay rate under L^2 -norm and L^∞ -norm at different times, where $\alpha = \nu = 1$

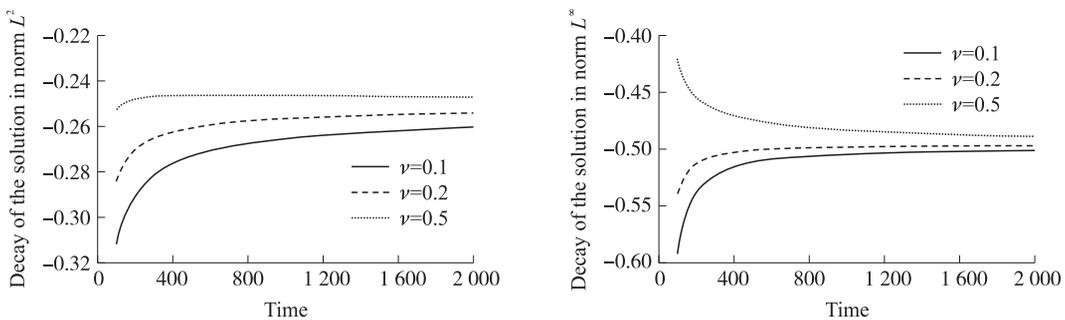


图 3 $\alpha = \beta = 1$ 时, 不同时刻 L^2 与 L^∞ 范数下的衰减率

Fig. 3 The decay rate under L^2 -norm and L^∞ -norm at different times, where $\alpha = \beta = 1$

4 结论

本文提出了一种求解粘性 KdV 方程无条件稳定的数值格式. 格式的优点在于每迭代一次只需要求解一个线性方程, 这对于求解大时间方向的粘性水波方程特别适用. 数值结果验证了格式的准确性. 当方程中存在分数阶项时, 格式在时间方向是 1.5 阶, 不存在分数阶项时, 格式在时间方向是 2 阶. 最后用所提的数值格式研究了解的渐进衰减率, 数值结果表明这两类模型的解衰减率是: L^2 范数接近 -0.25 , L^∞ 范数接近 -0.5 , 这些数值结果与 Chen 等^[6]的理论证明是吻合的.

[参考文献]

[1] KAKUTANI T, MATSUUCHI K. Effect of viscosity on long gravity waves[J]. Journal of the physical society of Japan, 1975,

- 39(39):237–246.
- [2] LIU P L F, ORFILA A. Viscous effects on transient long-wave propagation[J]. *Journal of fluid mechanics*, 2004, 520(1): 83–92.
 - [3] SAUT J C, BONA J L, CHEN M. Boussinesq equations and other systems for small-amplitude long waves in nonlinear dispersive media. I: derivation and linear theory[J]. *Journal of nonlinear science*, 2002, 12(4): 283–318.
 - [4] DUTYKH D, DIAS F. Viscous potential free-surface flows in fluid layer of finite depth[J]. *Comptes rendus mathematique*, 2007, 345(2): 113–118.
 - [5] DUTYKH D. Viscous-potential free-surface flows and long wave modelling[J]. *European journal of mechanics–B/fluids*, 2009, 28(3): 430–443.
 - [6] CHEN M, DUMONT S, DUPAIGNE L, et al. Decay of solutions to a water wave model with a nonlocal viscous dispersive term[J]. *Discrete and continuous dynamical systems*, 2010, 27(4): 1473–1492.
 - [7] CHEN M. Numerical investigation of a two-dimensional Boussinesq system[J]. *Discrete and continuous dynamical systems*, 2009, 28(4): 1169–1190.
 - [8] GOUBET O, WARNAULT G. Decay of solutions to a linear viscous asymptotic model for water waves[J]. *Chinese annals of mathematics–series B*, 2010, 31(6): 841–85.
 - [9] DUMONT S, DUVAL J B. Numerical investigation of the decay rate of solutions to models for water waves with nonlocal viscosity[J]. *International journal of numerical analysis and modeling*, 2012, 10(2): 333–349.
 - [10] ZHANG J, XU C. Finite difference/spectral approximations to a water wave model with a nonlocal viscous term[J]. *Applied mathematical modelling*, 2014, 38(19/20): 4912–4925.
 - [11] LIN Y M, XU C J. Finite difference spectral approximations for the time-fractional diffusion equation[J]. *Journal of computational physics*, 2007, 225(2): 1533–1552.

[责任编辑:陆炳新]