doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2020.04.001

不可压缩 Ericksen-Leslie 液晶模型局部适定性的研究

牛 聪[1],孙建筑[2],唐 童[1]

(1.河海大学理学院,江苏 南京 210098)
(2.南京林业大学应用数学系,江苏 南京 210037)

[摘要] 本文证明了不可压缩 Ericksen-Leslie 系统的抛物双曲真空液晶模型强解的局部适定性.

[关键词] 液晶,不可压缩,局部适定性
[中图分类号]O175.2 [文献标志码]A [文章编号]1001-4616(2020)04-0001-05

Local Well-Posedness for an Incompressible Ericksen-Leslie's Liquid Crystals Model

Niu Cong[1],Sun Jianzhu[2],Tang Tong[1]

(1.College of Science,Hohai University,Nanjing 210098,China)
(2.Department of Applied Mathematics,Nanjing Forestry University,Nanjing 210037,China)

Abstract:In this paper,we prove local well-posedness of strong solutions to an incompressible Ericksen-Leslie's parabolic-hyperbolic liquid crystals model with vacuum.

Key words:liquid crystals,incompressible,local well-posedness

日常生活中,我们最常见的物质状态是固态、液态和气态. 从结构组成来说,这些状态都是由分子或原子的集合形式所决定的. 由于分子或原子在这 3 种物态中运动状况不同,从而使我们看到了不同的特征. 而液晶,是介于液态与结晶态之间的一种物质状态,是一种在一定温度范围内呈现出既不同于固态和液态,又不同于气态的特殊物质状态. 从宏观上说,液晶既表现出晶体的典型特征——光学双折射性,又表现出流体的特征——流动性. 从微观上说,在这种特殊物质状态下,材料像流体一样流动,但其分子保持着晶体分子的有向结构特性. 液晶在物理、化学、材料学等众多学科中都取得了重大的研究成果,具有广泛的应用背景. 因此,物理学家和数学家先后建立了各种数学模型来研究液晶,其中最著名的模型是 Ericksen-Leslie 模型,它是用来描述向列型液晶流体动力学理论的模型,并成功应用于各个领域.

液晶的流体动力学理论是在 20 世纪 60 年代由 Ericksen[1-3] 和 Leslie[4] 建立的. 液晶分子是比较复杂的分子,为了更好地研究液晶的物理性质和物理现象,我们常常把向列型液晶分子理想化地假设成首尾对称的长棒状,并且沿长轴是旋转对称的. 这种液晶分子称为单轴液晶分子,其质心的位置和长轴的指向确定了单轴液晶分子的构型. 向列型液晶的粘度小,流动性强. 产生这种流动性的原因主要是由于各个分子容易顺着长轴方向自由移动. 在这篇文章中,我们在区域 $\mathbf{T}^3\times(0,\infty)$ 上考虑了如下的抛物双曲系统[1-5]:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0, \tag{1}$$

$$\partial_t\rho+\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{u})=0, \tag{2}$$

$$\partial_t(\rho\boldsymbol{u})+\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})+\nabla\pi-\Delta\boldsymbol{u}=-\operatorname{div}\left(\nabla\boldsymbol{d}\odot\nabla\boldsymbol{d}-\frac{1}{2}|\nabla\boldsymbol{d}|^2\boldsymbol{I}_3\right), \tag{3}$$

收稿日期:2019-09-26.
基金项目:国家自然科学基金项目(11801138).
通讯作者:唐童,副教授,研究方向:偏微分方程. E-mail:tt0507010156@126.com

$$\ddot{\boldsymbol{d}}-\Delta \boldsymbol{d}=\boldsymbol{d}(|\nabla \boldsymbol{d}|^2-|\dot{\boldsymbol{d}}|^2),\quad |\boldsymbol{d}|=1,\tag{4}$$

$$(\rho,\rho\boldsymbol{u},\boldsymbol{d},\partial_t\boldsymbol{d})(\cdot,0)=(\rho_0,\rho_0\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{d}_0,\boldsymbol{d}_1)(\cdot),\quad \boldsymbol{d}_0\cdot\boldsymbol{d}_1=0\ \text{in}\ \mathbf{T}^3.\tag{5}$$

式中,ρ 表示密度,π 表示压力,$\boldsymbol{u}$ 表示速度,$\boldsymbol{d}$ 表示方向向量,$\dot{\boldsymbol{d}}:=\partial_t\boldsymbol{d}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{d}$ 和 $\ddot{\boldsymbol{d}}:=\dot{\boldsymbol{d}}-|\nabla\boldsymbol{d}|^2\boldsymbol{d}$.

利用$(\nabla d\odot\nabla d)_{ij}=\sum_k \partial_i d_k\partial_j d_k$,我们得到:

$$\nabla\cdot\left(\nabla\boldsymbol{d}\odot\nabla\boldsymbol{d}-\frac{1}{2}|\nabla\boldsymbol{d}|^2\boldsymbol{I}_3\right)=\sum_k\nabla d_k\Delta d_k.\tag{6}$$

另外,受到 Navier-Stokes 方程的启发,我们将假设以下的相容性条件:

$$\nabla\pi_0-\mu\Delta\boldsymbol{u}_0-(\lambda+\mu)\nabla\operatorname{div}\boldsymbol{u}_0+\nabla\boldsymbol{d}_0\cdot\Delta\boldsymbol{d}_0=\sqrt{\rho_0}\boldsymbol{g},\tag{7}$$

式中,$(\nabla\pi_0,\boldsymbol{g})\in L^2$.

方程(1)—(3)是我们熟知的 Navier-Stokes 方程. 特别地,当 $\boldsymbol{u}=0$ 时,方程(4)简化为波动映射方程,方程(1)—(5)是 Ericksen-Leslie 模型的简化版本. 无论是完整的 Ericksen-Leslie 模型,还是简化版的 Ericksen-Leslie 模型,在流体速度 $\boldsymbol{u}$ 和向列型液晶的微观取向构型 $\boldsymbol{d}$ 的影响下,这两个模型都是从连续介质力学出发得到的宏观模型. 虽然上述模型是 Ericksen-Leslie 模型的简化版本,但它仍然具有重要的数学研究价值.

和流体类似,液晶方程分为可压缩和不可压缩两种类型,下面我们分别介绍一下相关工作.

文献[5]研究了简化的 Ericksen-Leslie 模型在区域 $\Omega\subset\mathbf{R}^3$ 内的可压缩向列型液晶的强解,并且当初值 $\rho_0,\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{d}_0$ 充分正则并满足相容性条件时,证明了一个唯一强解的局部存在性. 文献[6]研究了在 $\mathbf{R}^N(N=2,3)$ 中具有周期边界条件的可压缩液晶流体的不可压缩极限;然后利用不可压缩极限,严格证明了具有小初值的不可压缩系统强解的局部存在性和全局存在性;此外,在一定意义上得到了收敛速度. 文献[7]考虑了三维可压缩向列型液晶材料的简化流体动力学模型的短时间强解;并利用速度梯度变形张量的最大范数和液晶方向场梯度的最大范数的平方关于时间的积分,建立了在有限时间内这些解可能爆破的准则. 文献[8]研究了当初值满足相容性条件时,证明了在一个有界区域 $\Omega\subset\mathbf{R}^3$ 内向列型液晶的可压缩非等熵模型强解的局部适定性. 文献[9]研究了 Ericksen-Leslie 液晶动力学方程组适定性问题,并在第三章研究了可压缩液晶动力学方程组适定性方面的问题.

至于不可压缩方面,文献[10]证明了问题(1)—(5)强解的局部适定性,其中 $\inf\rho_0>0$;并且文献[11]和文献[12]分别证明了具有真空但没有任何相容性条件的不可压缩液晶模型的一个新的正则性准则与初始密度为正时的三维不可压缩液晶模型的一个新的正则性准则. 文献[13]研究了 N 维($N=2,3$)不可压缩向列型液晶流体的流动,并且当初始密度 $\rho_0\geqslant0$,得到了解的局部存在性和唯一性;特别地,当 ρ_0 有正的下界并且在二维情况下,得到了带有小初值的解的全局存在性和唯一性. 文献[14]研究了不可压缩 Ericksen-Leslie 双曲模型,在保证基本能量定律耗散的 Leslie 系数约束下,证明了具有有限初始能量系统的经典解的局部存在性和唯一性;在此基础上,通过对阻尼系数和初始能量极小性的附加假设,建立了唯一的全局经典解. 文献[9]研究了 Ericksen-Leslie 液晶动力学方程组适定性问题,并在第五章利用非 Ginzburg-Landau 逼近不可压缩液晶方程,证明了二维不可压缩液晶动力学方程组存在整体强解. 文献[15]从微观 Doi-Onsager 理论出发,给出了宏观 Ericksen-Leslie 理论的一个严格推导,在第二章,证明了 Ericksen-Leslie 方程的局部适定性以及小初值解的整体适定性.

本文目的是在真空情形下证明问题(1)—(5)在相容性条件(7)下的强解具有局部适定性.

本文的主要结果如下:

定理 1　令(7)成立,$0\leqslant\rho_0\in W^{1,6}$,$\boldsymbol{u}_0,\nabla\boldsymbol{d}_0,\dot{\boldsymbol{d}}_0\in H^2$ 并且 $\operatorname{div}\boldsymbol{u}_0=0$, $|\boldsymbol{d}_0|=1$, $\boldsymbol{d}_0\cdot\boldsymbol{d}_1=0$ in $\mathbf{T}^3$,则问题(1)—(5)有唯一的强解$(\rho,\boldsymbol{u},\boldsymbol{d})$满足

$$\begin{gathered}\rho\in L^\infty(0,T;W^{1,6}),\rho_t\in L^\infty(0,T;L^6),\boldsymbol{u}\in L^\infty(0,T;H^2)\cap L^2(0,T;H^3),\\ \sqrt{\rho}\boldsymbol{u}_t\in L^\infty(0,T;L^2),\boldsymbol{u}_t\in L^2(0,T;H^1),\nabla\boldsymbol{d},\dot{\boldsymbol{d}}\in L^\infty(0,T;H^2).\end{gathered}\tag{8}$$

对某些 $0<T\leqslant\infty$.

由于强解存在性的证明可以用经典的 Galerkin 方法得到[16],唯一性的证明由(8)的正则性得到,所以我们只需要给出先验估计(8). 为此,我们定义:

$$M(t):=1+\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\{\|\rho(\cdot,s)\|_{W^{1,6}}+\|\rho_t(\cdot,s)\|_{L^6}+\|\boldsymbol{u}(\cdot,s)\|_{H^2}+\|\nabla\boldsymbol{d}(\cdot,s)\|_{H^2}+$$
$$\|\dot{\boldsymbol{d}}(\cdot,s)\|_{H^2}+\|\sqrt{\rho}\boldsymbol{u}_t(\cdot,s)\|_{L^2}\}+\|\boldsymbol{u}_t\|_{L^2(0,t;H^1)}+\|\boldsymbol{u}\|_{L^2(0,t;H^3)}. \tag{9}$$

定理 2　对任意的 $t\in[0,T]$,我们有

$$M(t)\leqslant C_0(M_0)\exp(\sqrt{t}C(M)). \tag{10}$$

从式(10)和文献[17-19]可知:

$$M(t)\leqslant C. \tag{11}$$

根据 Kato-Ponce 在文献[20]中的方法,在接下来的证明中,我们将使用双线性交换子和先验估计:

$$\|D^s(fg)-fD^sg\|_{L^p}\leqslant C(\|\nabla f\|_{L^{p_1}}\|D^{s-1}g\|_{L^{q_1}}+\|g\|_{L^{p_2}}\|D^sf\|_{L^{q_2}}), \tag{12}$$
$$\|D^s(fg)\|_{L^p}\leqslant C(\|f\|_{L^{p_1}}\|D^sg\|_{L^{q_1}}+\|D^sf\|_{L^{p_2}}\|g\|_{L^{q_2}}), \tag{13}$$

式中,$s>0,\dfrac{1}{p}=\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{q_1}=\dfrac{1}{p_2}+\dfrac{1}{q_2}$.

因此,我们只需要证明定理 2.

1　定理 2 的证明

证明　首先,由极大值原理及(1)—(2)知:

$$0\leqslant\rho\leqslant C_0. \tag{14}$$

利用 Gagliardo-Nirenberg 不等式:

$$\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^\infty}\leqslant C\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^6}^{1/2}\|\boldsymbol{u}\|_{W^{2,6}}^{1/2},$$

我们得到:

$$\int_0^t\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^\infty}\mathrm{d}s\leqslant\sqrt{t}C(M). \tag{15}$$

在(2)两端用 ∇ 作用,并乘 $|\nabla\rho|^4\nabla\rho$,得到:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla\rho\|_{L^6}\leqslant C\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^\infty}\|\nabla\rho\|_{L^6},$$

因此,由 Gronwall 不等式知:

$$\|\nabla\rho\|_{L^6}\leqslant C\|\nabla\rho_0\|_{L^6}\exp\left(\int_0^t\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^\infty}\mathrm{d}s\right)\leqslant C_0(M_0)\exp(\sqrt{t}C(M)). \tag{16}$$

很容易证明:

$$\|\boldsymbol{u}\|_{H^1}=\left\|\boldsymbol{u}_0+\int_0^t\boldsymbol{u}_t\mathrm{d}s\right\|_{H^1}\leqslant\|\boldsymbol{u}_0\|_{H^1}+\int_0^t\|\boldsymbol{u}_t\|_{H^1}\mathrm{d}s\leqslant C_0+\sqrt{t}C(M). \tag{17}$$

在(3)两端用 ∂_t 作用,并乘 $\boldsymbol{u}_t$,利用(1)和(2),我们推出:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\rho|\boldsymbol{u}_t|^2\mathrm{d}x+\int|\nabla\boldsymbol{u}_t|^2\mathrm{d}x=\int\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{u})|\boldsymbol{u}_t|^2\mathrm{d}x-\int\rho_t\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}_t\mathrm{d}x-$$
$$\int\rho\boldsymbol{u}_t\cdot\nabla\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}_t\mathrm{d}x+\int\partial_t(\nabla\boldsymbol{d}\odot\nabla\boldsymbol{d}):\nabla\boldsymbol{u}_t\mathrm{d}x=:\sum_{i=1}^4 I_i. \tag{18}$$

下面我们证明 $I_i(i=1,\cdots,4)$ 的有界性:

$$I_1=-\int\rho\boldsymbol{u}\nabla|\boldsymbol{u}_t|^2\mathrm{d}x\leqslant\|\sqrt{\rho}\|_{L^\infty}\|\boldsymbol{u}\|_{L^\infty}\|\sqrt{\rho}\boldsymbol{u}_t\|_{L^2}\|\nabla\boldsymbol{u}_t\|_{L^2}\leqslant C(M)\|\nabla\boldsymbol{u}_t\|_{L^2};$$
$$|I_2|\leqslant\|\rho_t\|_{L^2}\|\boldsymbol{u}\|_{L^6}\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^6}\|\boldsymbol{u}_t\|_{L^6}\leqslant C(M)\|\boldsymbol{u}_t\|_{L^6}\leqslant$$
$$C(M)(\|\sqrt{\rho}\boldsymbol{u}_t\|_{L^2}+\|\nabla\boldsymbol{u}_t\|_{L^2})\leqslant C(M)+C(M)\|\nabla\boldsymbol{u}_t\|_{L^2};$$
$$|I_3|\leqslant\|\sqrt{\rho}\|_{L^\infty}\|\sqrt{\rho}\boldsymbol{u}_t\|_{L^2}\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^3}\|\boldsymbol{u}_t\|_{L^6}\leqslant$$
$$C(M)\|\boldsymbol{u}_t\|_{L^6}\leqslant C(M)(\|\sqrt{\rho}\boldsymbol{u}_t\|_{L^2}+\|\nabla\boldsymbol{u}_t\|_{L^2})\leqslant C(M)+C(M)\|\nabla\boldsymbol{u}_t\|_{L^2};$$
$$|I_4|\leqslant C\|\nabla\boldsymbol{d}\|_{L^\infty}\|\nabla\boldsymbol{d}_t\|_{L^2}\|\nabla\boldsymbol{u}_t\|_{L^2}\leqslant C(M)(\|\nabla\dot{\boldsymbol{d}}\|_{L^2}+$$
$$\|\nabla(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{d})\|_{L^2})\|\nabla\boldsymbol{u}_t\|_{L^2}\leqslant C(M)\|\nabla\boldsymbol{u}_t\|_{L^2}.$$

这里我们利用了 Poincaré 不等式:

$$\|\boldsymbol{u}_t\|_{L^6}\leqslant C\|\sqrt{\rho}\boldsymbol{u}_t\|_{L^2}+C\|\nabla\boldsymbol{u}_t\|_{L^2}. \tag{19}$$

将上述估计插入(18)得到:

$$\int\rho|\boldsymbol{u}_t|^2\mathrm{d}x+\int_0^t\int|\nabla\boldsymbol{u}_t|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\leqslant C_0(M_0)\exp(\sqrt{t}C(M)). \tag{20}$$

在(3)两端同乘 $\dot{\boldsymbol{d}}$,并利用 $\boldsymbol{d}\cdot\dot{\boldsymbol{d}}=0$,得到:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int(|\dot{\boldsymbol{d}}|^2+|\nabla\boldsymbol{d}|^2)\mathrm{d}x=-\int\boldsymbol{u}\cdot\nabla\dot{\boldsymbol{d}}\cdot\dot{\boldsymbol{d}}\mathrm{d}x+\int\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{d}\cdot\Delta\boldsymbol{d}\mathrm{d}x=$$

$$\sum_{i,j}u_i\partial_i\mathrm{d}\partial_j^2d\mathrm{d}x=-\sum_{i,j}\partial_ju_i\partial_i\mathrm{d}\partial_jd\mathrm{d}x\leqslant C\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^\infty}\|\nabla\boldsymbol{d}\|_{L^2}^2,$$

因此,我们有:

$$\|\dot{\boldsymbol{d}}\|_{L^2}+\|\nabla\boldsymbol{d}\|_{L^2}\leqslant C_0(M_0)\exp(\sqrt{t}C(M)). \tag{21}$$

在(4)两端用 Δ 作用,并乘 $\Delta\dot{\boldsymbol{d}}$,利用(12)和(13),得到:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int(|\nabla\Delta\boldsymbol{d}|^2+|\Delta\dot{\boldsymbol{d}}|^2)\mathrm{d}x=-\int(\Delta(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\dot{\boldsymbol{d}})-\boldsymbol{u}\cdot\nabla\Delta\dot{\boldsymbol{d}})\Delta\dot{\boldsymbol{d}}\mathrm{d}x-\int(\nabla\Delta(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\nabla\Delta\boldsymbol{d})\nabla\Delta\boldsymbol{d}\mathrm{d}x+$$

$$\int\Delta\dot{\boldsymbol{d}}\Delta[\boldsymbol{d}(|\nabla\boldsymbol{d}|^2-|\dot{\boldsymbol{d}}|^2)]\mathrm{d}x\leqslant C(\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^\infty}\|\Delta\dot{\boldsymbol{d}}\|_{L^2}+\|\nabla\dot{\boldsymbol{d}}\|_{L^6}\|\Delta\boldsymbol{u}\|_{L^3})\|\Delta\dot{\boldsymbol{d}}\|_{L^2}+$$

$$C(\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^\infty}\|\nabla\Delta\boldsymbol{d}\|_{L^2}+\|\nabla\boldsymbol{d}\|_{L^\infty}\|\nabla\Delta\boldsymbol{u}\|_{L^2})\|\nabla\Delta\boldsymbol{d}\|_{L^2}+C\|\Delta\dot{\boldsymbol{d}}\|_{L^2}(\|\Delta(|\nabla\boldsymbol{d}|^2-|\dot{\boldsymbol{d}}|^2)\|_{L^2}+$$

$$(\|\nabla\boldsymbol{d}\|_{L^\infty}^2+\|\dot{\boldsymbol{d}}\|_{L^\infty}^2)\|\Delta\boldsymbol{d}\|_{L^2})\leqslant C\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^\infty}\|\Delta\dot{\boldsymbol{d}}\|_{L^2}^2+C\|\Delta\boldsymbol{u}\|_{L^3}\|\dot{\boldsymbol{d}}\|_{H^2}^2+$$

$$C\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^\infty}\|\nabla\Delta\boldsymbol{d}\|_{L^2}^2+C\|\nabla\Delta\boldsymbol{u}\|_{L^2}\|\boldsymbol{d}\|_{H^3}^2+C(M)\leqslant C(M)(\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^\infty}+\|\Delta\boldsymbol{u}\|_{L^3}+\|\nabla\Delta\boldsymbol{u}\|_{L^2}),$$

因此,我们有:

$$\|\boldsymbol{d}\|_{H^3}+\|\dot{\boldsymbol{d}}\|_{H^2}\leqslant C_0(M_0)\exp(\sqrt{t}C(M)). \tag{22}$$

方程(2)可以写成:

$$-\Delta\boldsymbol{u}+\nabla\pi=f:=-\rho\boldsymbol{u}_t-\rho\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}-\nabla\boldsymbol{d}\cdot\Delta\boldsymbol{d}. \tag{23}$$

由 Stokes 方程的 H^2 理论知:

$$\|\boldsymbol{u}\|_{H^2}\leqslant C\|\boldsymbol{f}\|_{L^2}\leqslant C\|\sqrt{\rho}\|_{L^\infty}\|\sqrt{\rho}\boldsymbol{u}_t\|_{L^2}+C\|\rho\|_{L^\infty}\|\boldsymbol{u}\|_{L^\infty}\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^2}+C\|\nabla\boldsymbol{d}\|_{L^\infty}\|\Delta\boldsymbol{d}\|_{L^2}\leqslant$$

$$C_0(M_0)\exp(\sqrt{t}C(M))(1+\|\boldsymbol{u}\|_{L^\infty})\leqslant C_0(M_0)\exp(\sqrt{t}C(M))(1+\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^2}^{1/2}\|\boldsymbol{u}\|_{H^2}^{1/2}),$$

因此,我们得到:

$$\|\boldsymbol{u}\|_{H^2}\leqslant C_0(M_0)\exp(\sqrt{t}C(M)). \tag{24}$$

类似的,我们有:

$$\|\boldsymbol{u}\|_{H^3}\leqslant C\|\boldsymbol{f}\|_{H^1}\leqslant C\|\boldsymbol{f}\|_{L^2}+C\|\nabla\boldsymbol{f}\|_{L^2}\leqslant C(M)+C\|\nabla\rho\|_{L^6}\|\boldsymbol{u}_t\|_{L^3}+C\|\rho\|_{L^\infty}\|\nabla\boldsymbol{u}_t\|_{L^2}+$$

$$C\|\nabla\rho\|_{L^6}\|\boldsymbol{u}\|_{L^6}\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^6}+C\|\rho\|_{L^\infty}\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^4}^2+C\|\rho\|_{L^\infty}\|\boldsymbol{u}\|_{L^\infty}\|\Delta\boldsymbol{u}\|_{L^2}+$$

$$C\|\Delta\boldsymbol{d}\|_{L^4}^2+C\|\nabla\boldsymbol{d}\|_{L^\infty}\|\nabla\Delta\boldsymbol{d}\|_{L^2}\leqslant C(M)+C(M)\|\boldsymbol{u}_t\|_{H^1},$$

因此,很容易推出:

$$\|\boldsymbol{u}\|_{L^2(0,t;H^3)}\leqslant C_0(M_0)\exp(\sqrt{t}C(M)). \tag{25}$$

最后,我们得到:

$$\|\rho_t\|_{L^6}=\|\boldsymbol{u}\nabla\rho\|_{L^6}\leqslant\|\boldsymbol{u}\|_{L^\infty}\|\nabla\rho\|_{L^6}\leqslant C_0(M_0)\exp(\sqrt{t}C(M)). \tag{26}$$

结合(14)、(16)、(17)、(20)—(25)和(26),我们推断出(10)是成立的.

证明完毕.

致谢:感谢樊继山教授对本文的指导与帮助.

[参考文献]

[1] ERICKSEN J L. Conservation laws for liquid crystals[J]. Transactions of the society of rheology,1961,5:23-34.

[2] ERICKSEN J L. Hydrostatic theory of liquid crystals[J]. Archive for rational mechanics and analysis,1962,9:371-378.

[3] ERICKSEN J L. Liquid crystals with variable degree of orientation[J]. Archive for rational mechanics and analysis,1990,

113(2):97-120.

[4] LESLIE F. Some constitutive equations for liquid crystals[J]. Archive for rational mechanics and analysis,1968,28(4):265-283.

[5] HUANG T,WANG C Y,WEN H Y. Strong solutions of the compressible nematic liquid crystal flow[J]. Journal of differential equations,2012,252(3):2222-2265.

[6] DING S J,HUANG J R,WEN H Y,et al. Incompressible limit of the compressible nematic liquid crystal flow[J]. Journal of functional analysis,2013,264(7):1711-1756.

[7] HUANG T,WANG C Y,WEN H Y. Blow up criterion for compressible nematic liquid crystal flows in dimension three[J]. Archive for rational mechanics and analysis,2012,204(1):285-311.

[8] FAN J S,LI F C,NAKAMURA G. Local well-posedness for a compressible non-isothermal model for nematic liquid crystals[J]. Journal of mathematical physics,2018,59(3):031503.

[9] 刘兰明. 液晶动力学方程数学研究[D]. 上海:复旦大学,2012.

[10] FAN J S,ZHOU Y. Uniform local well-posedness for an Ericksen-Leslie´s density-dependent parabolic-hyperbolic liquid crystals model[J]. Applied mathematics letters,2017,74:79-84.

[11] FAN J S,SAMET B,ZHOU Y. A regularity criterion for a density-dependent incompressible liquid crystals model with vacuum[J]. Hiroshima mathematical journal,2019,49(1):129-138.

[12] FAN J S,ZHOU Y. A regularity criterion for a 3D density-dependent incompressible liquid crystals model[J]. Applied mathematics letters,2016,58:119-124.

[13] WEN H Y,DING S J. Solutions of incompressible hydrodynamic flow of liquid crystals[J]. Nonlinear analysis real world applications,2011,12(3):1510-1531.

[14] JIANG N,LUO Y L. On well-posedness of Ericksen-Leslie´s hyperbolic incompressible liquid crystal model[J]. SIAM journal on mathematical analysis,2019,51(1):403-434.

[15] 王伟. 液晶动力学方程的理论分析[D]. 北京:北京大学,2012.

[16] LU S Q,CHEN M C,LIU Q L. On regularity for an Ericksen-Leslie´s parabolic-hyperbolic liquid crystals model[J]. Zeitschrift für angewandte mathematik und mechanik,2018,98(9):1574-1584.

[17] METIVIER G,SCHOCHET S. The incompressible limit of the non-isentropic Euler equations[J]. Archive for rational mechanics and analysis,2001,158(1):61-90.

[18] ALAZARD T. Low Mach number limit of the full Navier-Stokes equations[J]. Archive for rational mechanics and analysis,2006,180(1):1-73.

[19] DOU C S,JIANG S,OU Y B. Low Mach number limit of full Navier-Stokes equations in a 3D bounded domain[J]. Journal of differential equations,2015,258(2):379-398.

[20] KATO T,PONCE G. Commutator estimates and the Euler and Navier-Stokes equations[J]. Communications on pure and applied mathematics,1988,41(7):891-907.

[责任编辑:陆炳新]