doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2021.01.001

2 类特殊图的完美对集数的分类递推求法

唐保祥[1],任　韩[2]

(1.天水师范学院数学与统计学院,甘肃 天水 741001)
(2.华东师范大学数学系,上海 200062)

[摘要]　用划分、求和的方法分别给出了图 $2-nP_8$ 和 $2-nZ_3$ 的完美对集数目的递推关系式,再从得到的递推关系式中求出了这两类图的完美对集数目的显式计算公式. 本文给出了求一些图的完美对集数的一种方法,为完美对集理论的应用提供了支持.

[关键词]　完美对集,递推式关系,通解

[中图分类号]O157.5　[文献标志码]A　[文章编号]1001-4616(2021)01-0001-05

Classification and Recursive Method for Perfect Matching Number of Two Kinds of Special Graphs

Tang Baoxiang[1],Ren Han[2]

(1.School of Mathematics and Statistics Institute,Tianshui Normal University,Tianshui 741001,China)
2.Department of Mathematics,East China Normal University,Shanghai 200062,China)

Abstract:The recursive relation between the perfect matching numbers of graphs $2-nP_8$ and $2-nZ_3$ is given by the method of division and summation,and the explicit formula for the perfect matching number of these two graphs is obtained from the recursive relation obtained. This paper gives a method for finding the perfect matching number of some graphs,which provides support for the application of perfect matching theory.

Key words:perfect matching,recurrence formula,general solution

图的完美对集计数理论是近 30 年来图论研究的热点问题之一[1-6]. 对于存在完美对集的图,把完美对集按照关联某个顶点的边进行分类,求出每一类完美匹配数目的递推关系式,再把各类完美对集的递推式相加,就得到一组有相互联系的递推关系式,利用这些递推式之间的相互关系,消去那些不需要的递推关系式,从而得到这个图的完美对集数目的递推关系式,最后求出这个递推式的通解,进而就得到这个图的完美对集数目的显式公式[7-14]. 这个方法为图的完美对集理论的应用提供了支持.

1　基本概念

定义 1　若图 G 有一个 1-正则生成子图,则称这个生成子图为图 G 的完美对集.

定义 2　设图 G 是一个有完美对集的图,若图 G 的两个完美对集 W_1 和 W_2 中有一条边不同,则称 W_1 和 W_2 是 G 的两个不同的完美对集.

定义 3　设 $v_{i1}v_{i2}$是长为 1 的一条路,$u_{i1}u_{i2}u_{i3}u_{i4}u_{i5}u_{i6}u_{i1}$是长为 6 的圈. 圈上的顶点 $u_{i1},u_{i2},u_{i3},u_{i4}$分别与 v_{i2}连接一条边,圈上的顶点 $u_{i1},u_{i6},u_{i4},u_{i4}$分别与 v_{i1}连接一条边,得到的图记为 $P_8^i(i=1,2,\cdots,n)$. 给 P_8^i 与 P_8^{i+1} 添加上边 $u_{i2}u_{i+1,6},u_{i3}u_{i+1,5}(i=1,2,\cdots,n-1)$得到的图记为 $2-nP_8$,如图 1 所示.

定义 4　连接 3 圈 $u_{i1}u_{i2}u_{i3}u_{i1}$与 $v_{i1}v_{i2}v_{i3}v_{i1}$的顶点 u_{i1}与 v_{i1},u_{i2}与 v_{i2},u_{i3}与 v_{i3}得到的图记为 $Z_3^i(i=1,2,\cdots,n)$. 分别连接 Z_3^i 与 Z_3^{i+1} 的顶点 u_{i1}与 $u_{i+1,1}$,u_{i2}与 $u_{i+1,3}(i=1,2,\cdots,n-1)$得到的图记为 $2-nZ_3$,如图 2 所示.

收稿日期:2020-05-17.
基金项目:国家自然科学基金项目(11171114).
通讯作者:唐保祥,教授,研究方向:图论和组合数学研究. E-mail:tbx0618@ sina.com

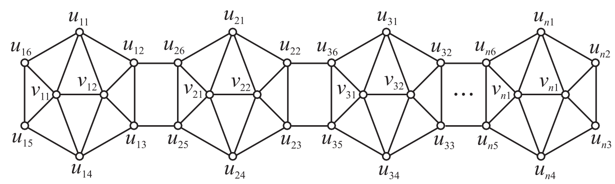

图 1　图 2-nP_8

Fig. 1　Figure of 2-nP_8

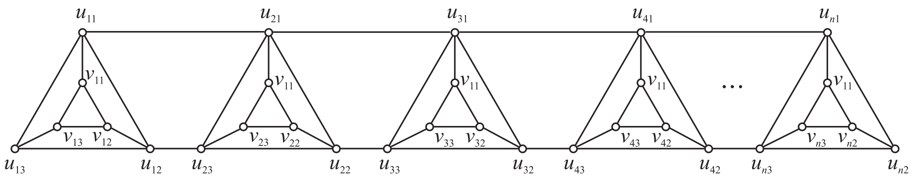

图 2　图 2-nZ_3

Fig. 2　Figure of 2-nZ_3

2　主要结果

定理 1　设图 2-nP_8 的完美对集数为 $f(n)$,则

$$f(n)=\frac{41+4\sqrt{41}}{82}(6+\sqrt{41})^n+\frac{41-4\sqrt{41}}{82}(6-\sqrt{41})^n.$$

证明　容易看出图 2-nP_8 有完美对集. 为了计算 $f(n)$ 的表达式,先定义一个图 G_1. 把路 xy 的端点 x,y 分别与图 2-nP_8 的顶点 u_{16},u_{15} 连接一条边得到的图记为 G_1,如图 3 所示.

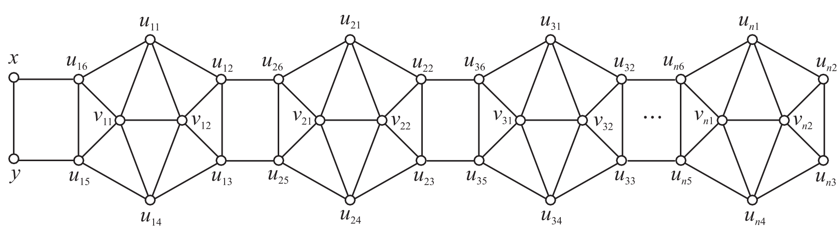

图 3　图 G_1

Fig. 3　Figure of G_1

容易看出图 G_1 有完美对集. 设图 G_1 的完美对集数为 $g(n)$,图 G_1 的完美对集集合为 W,按照 W 中元素饱和顶点 x 的情况可分两类:设 W 中包含边 xy 的完美对集集合为 W_1,W 中包含边 xu_{16}的完美对集集合为 W_2,根据不同完美对集的定义知,$W_1\cap W_2=\phi$,$W=W_1\cup W_2$,故 $g(n)=|W|=|W_1|+|W_2|$.

因为 $xy\in W_1$,故 xu_{16},$yu_{15}\notin W_1$,由 $f(n)$ 的定义知,$|W_1|=f(n)$.

W_2 可分 5 类. W_2 中包含边 xu_{16},yu_{15},$u_{11}v_{11}$,$u_{12}v_{12}$,$u_{13}u_{14}$ 的完美对集集合记为 W_2^1;W_2 中包含边 xu_{16},yu_{15},$u_{11}v_{11}$,$v_{12}u_{14}$的完美对集集合记为 W_2^2;W_2 中包含边 xu_{16},yu_{15},$u_{11}u_{12}$,$v_{11}v_{12}$,$u_{13}u_{14}$ 的完美对集集合记为 W_2^3;W_2 中包含边 xu_{16},yu_{15},$u_{11}v_{12}$,$v_{11}u_{14}$的完美对集集合记为 W_2^4;W_2 中包含边 xu_{16},yu_{15},$u_{11}u_{12}$,$v_{11}u_{14}$,$v_{12}u_{13}$ 的完美对集集合记为 W_2^5. 则 $W_2^i\cap W_2^j=\phi(1\leqslant i<j\leqslant 5)$,$W_2=W_2^1\cup W_2^2\cup W_2^3\cup W_2^4\cup W_2^5$,故$|W_2|=|W_2^1|+|W_2^2|+|W_2^3|+|W_2^4|+|W_2^5|$.

由 $f(n)$ 的定义知,$|W_2^1|=f(n-1)$,$|W_2^3|=f(n-1)$,$|W_2^5|=f(n-1)$;由 $g(n)$ 的定义知,$|W_2^2|=g(n-1)$,$|W_2^4|=g(n-1)$.

故

$$g(n)=f(n)+3f(n-1)+2g(n-1).\tag{1}$$

再求 $f(n)$ 的递推式. 设图 2-nP_8 的完美对集集合为 W,图 2-nP_8 包含边 $u_{16}u_{11}$,$u_{16}v_{11}$,$u_{16}u_{15}$的完美对集集合分别为 W_1,W_2,W_3,则 $W_i\cap W_j=\phi(1\leqslant i<j\leqslant\leqslant 3)$,$W=W_1\cup W_2\cup W_3$,故 $f(n)=|W|=|W_1|+|W_2|+|W_3|$.

W_1 可分 3 类. W_1 中包含边 $u_{16}u_{11}$，$v_{11}u_{15}$，$v_{12}u_{14}$的完美对集集合记为 W_1^1；W_1 中包含边 $u_{16}u_{11}$，$v_{11}u_{15}$，$u_{12}v_{12}$，$u_{13}u_{14}$的完美对集集合记为 W_1^2；W_1 中包含边 $u_{16}u_{11}$，$v_{11}v_{12}$，$u_{15}u_{14}$的完美对集集合记为 W_1^3；则 $W_1^i \cap W_1^j = \phi(1 \leqslant i<j \leqslant 3)$，$W_1 = W_1^1 \cup W_1^2 \cup W_1^3$，故$|W_1| = |W_1^1| + |W_1^2| + |W_1^3|$.

由 $g(n)$ 的定义知，$|W_1^1| = g(n-1)$，$|W_1^3| = g(n-1)$；由 $f(n)$ 的定义知，$|W_1^2| = f(n-1)$. 故$|W_1| = f(n-1) + 2g(n-1)$.

W_2 可分 2 类. W_2 中包含边 $u_{16}v_{11}$，$u_{11}v_{12}$，$u_{15}u_{14}$的完美对集集合记为 W_2^1；W_2 中包含边 $u_{16}v_{11}$，$u_{11}u_{12}$，$v_{12}u_{13}$，$u_{15}u_{14}$的完美对集集合记为 W_2^2；则 $W_2^1 \cap W_2^2 = \phi$，$W_2 = W_2^1 \cup W_2^2$，故$|W_2| = |W_2^1| + |W_2^2|$.

由 $g(n)$ 的定义知，$|W_2^1| = g(n-1)$；由 $f(n)$ 的定义知，$|W_2^2| = f(n-1)$. 故$|W_2| = f(n-1) + g(n-1)$.

W_3 可分 5 类. W_3 中包含边 $u_{16}u_{15}$，$u_{11}v_{11}$，$u_{12}v_{12}$，$u_{13}u_{14}$的完美对集集合记为 W_3^1；W_3 中包含边 $u_{16}u_{15}$，$u_{11}v_{11}$，$v_{12}u_{14}$的完美对集集合记为 W_3^2；W_3 中包含边 $u_{16}u_{15}$，$v_{11}v_{12}$，$u_{11}u_{12}$，$u_{13}u_{14}$的完美对集集合记为 W_3^3；W_3 中包含边 $u_{16}u_{15}$，$u_{11}v_{12}$，$v_{11}u_{14}$的完美对集集合记为 W_3^4；W_3 中包含边 $u_{16}u_{15}$，$u_{11}u_{12}$，$v_{11}u_{14}$，$v_{12}u_{13}$的完美对集集合记为 W_3^5. 由不同完美对集的定义有，$W_3^i \cap W_3^j = \phi(1 \leqslant i<j \leqslant 5)$，$W_3 = W_3^1 \cup W_3^2 \cup W_3^3 \cup W_3^4 \cup W_3^5$，故$|W_3| = |W_3^1| + |W_3^2| + |W_3^3| + |W_3^4| + |W_3^5|$.

由 $f(n)$ 的定义知，$|W_3^1| = |W_3^3| = |W_3^5| = f(n-1)$；由 $g(n)$ 的定义知，$|W_3^2| = |W_3^4| = g(n-1)$. 故$|W_3| = 3f(n-1) + 2g(n-1)$.

综上所述，

$$f(n) = 5f(n-1) + 5g(n-1). \tag{2}$$

由式(1)，得

$$g(n-1) = f(n-1) + 3f(n-2) + 2g(n-2), \tag{3}$$

把式(3)代入(2)，得

$$f(n) = 10f(n-1) + 15f(n-2) + 10g(n-2), \tag{4}$$

由式(2)，得

$$f(n-1) = 5f(n-2) + 5g(n-2), \tag{5}$$

由式(4)和(5)消去 $g(n-2)$，得

$$f(n) = 12f(n-1) + 5f(n-2). \tag{6}$$

线性递推式(6)的特征方程为 $x^2 - 12x - 5 = 0$，故它的特征根为 $6 \pm \sqrt{41}$. 所以

线性递推式(6)的通解为 $f(n) = c_1(6+\sqrt{41})^n + c_2(6-\sqrt{41})^n$.

由图 4 知，$f(1) = 10$.

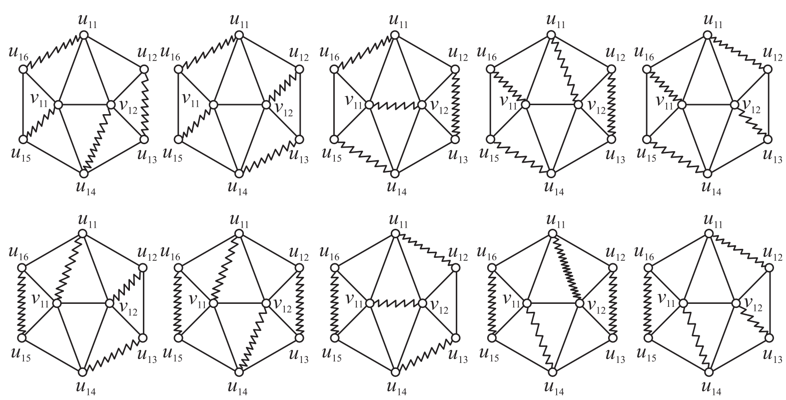

图 4　图 G_2

Fig. 4　Figure of G_2

由图 5 知，$g(1) = 15$.

所以由式(2)，得 $f(2) = 125$.

故 $f(n) = \dfrac{41+4\sqrt{41}}{82}(6+\sqrt{41})^n + \dfrac{41-4\sqrt{41}}{82}(6-\sqrt{41})^n$.

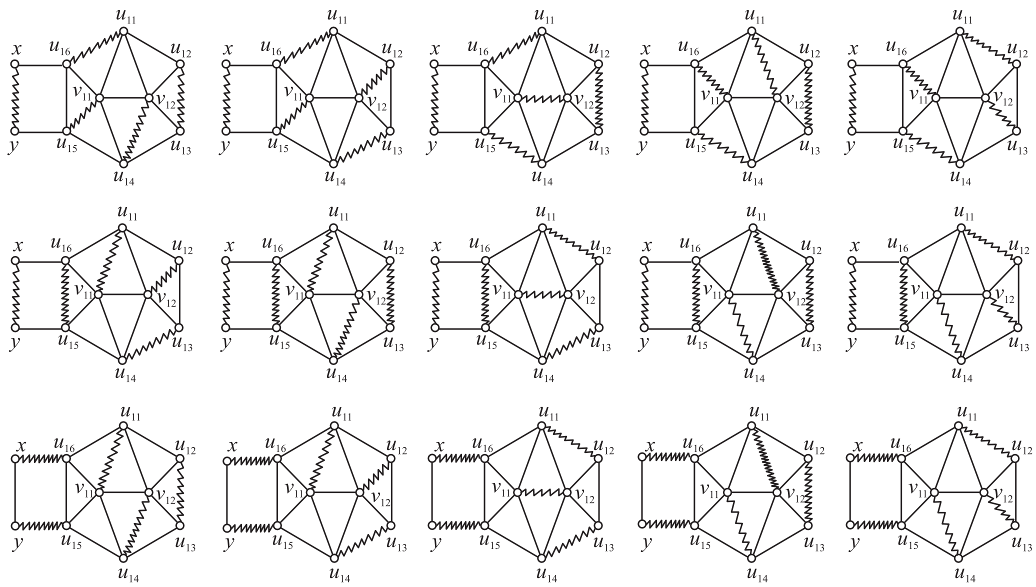

图 5　图 G_3

Fig. 5　Figure of G_3

定理 2　设图 $2-nZ_3$ 的完美对集数为 $\varphi(n)$,则

$$\varphi(n)=\frac{5+2\sqrt{5}}{10}(2+\sqrt{5})^n+\frac{5-2\sqrt{5}}{10}(2-\sqrt{5})^n.$$

证明　容易看出图 $2-nZ_3$ 有完美对集. 为了计算 $\varphi(n)$ 的表达式,先定义一个图 G_4. 把路 wt 的端点 w,t 分别与图 $2-nZ_3$ 的顶点 u_{11},u_{13} 连接一条边得到的图记为 G_4,如图 6 所示.

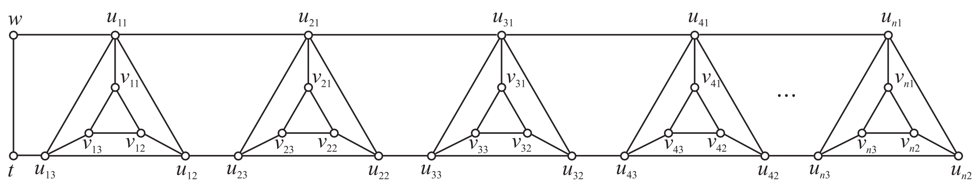

图 6　图 G_4

Fig. 6　Figure of G_4

容易看出图 G_4 有完美对集. 设图 G_4 的完美对集数为 $h(n)$,图 G_4 的完美对集集合为 N,按照 N 中元素饱和顶点 w 的情况可分两类:设 N 中包含边 wt 的完美对集集合为 N_1,N 中包含边 wu_{11} 的完美对集集合为 N_2,根据不同完美对集的定义知,$N_1\cap N_2=\phi$,$N=N_1\cup N_2$,故 $h(n)=|N|=|N_1|+|N_2|$.

因为 $wt\in N_1$,故 $wu_{11},tu_{13}\notin N_1$,由 $\varphi(n)$ 的定义知,$|N_1|=\varphi(n)$.

因为 $wu_{11}\in N_1$,所以 $tu_{13},v_{11}v_{13},v_{12}u_{12}\in N_2$,由 $\varphi(n)$ 的定义知,$|N_2|=\varphi(n-1)$.

故

$$h(n)=\varphi(n)+\varphi(n-1). \tag{7}$$

再求 $\varphi(n)$ 的递推式. 设图 $2-nZ_3$ 的完美对集集合为 N,图 $2-nZ_3$ 包含边 $u_{13}u_{11},u_{13}v_{13},u_{13}u_{12}$ 的完美对集集合分别为 N_1,N_2,N_3,则 $N_i\cap N_j=\phi(1\leqslant i<j\leqslant\leqslant 3)$,$N=N_1\cup N_2\cup N_3$,故 $\varphi(n)=|N|=|N_1|+|N_2|+|N_3|$.

因为 $u_{11}u_{13}\in N_1$,故 $v_{11}v_{13},v_{12}u_{12}\in N_1$,由 $\varphi(n)$ 的定义知,$|N_1|=\varphi(n-1)$.

N_2 可分为两类. 设 N_2 中包含边 $u_{13}v_{13},u_{11}v_{11},u_{12}v_{12}$ 的完美对集集合为 N_2^1,N_2 中包含边 $u_{13}v_{13},v_{11}v_{12}$ 的完美对集集合为 N_2^2,则 $N_2^1\cap N_2^2=\phi$,$N_2=N_2^1\cup N_2^2$,故 $|N_2|=|N_2^1|+|N_2^2|$.

由 $\varphi(n)$ 的定义知,$|N_2^1|=\varphi(n-1)$;由 $h(n)$ 的定义知,$|N_2^2|=h(n-1)$.

故 $|N_2|=\varphi(n-1)+h(n-1)$.

因为 $u_{13}u_{12}\in N_3$,故 $v_{12}v_{13},u_{11}v_{11}\in N_3$,由 $\varphi(n)$ 的定义知,$|N_3|=\varphi(n-1)$.

所以

$$\varphi(n)=3\varphi(n-1)+h(n-1). \tag{8}$$

由式(7)和(8),得

$$\varphi(n)=4\varphi(n-1)+\varphi(n-2). \tag{9}$$

线性递推式(9)的特征方程为 $x^2-4x-1=0$,特征根为 $2\pm\sqrt{5}$. 所以线性递推式(9)的通解为 $\varphi(n)=c_1(2+\sqrt{5})^n+c_2(2-\sqrt{5})^n$.

由图 7 知,$\varphi(1)=4$.

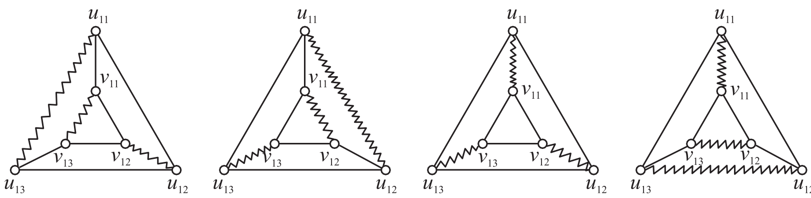

图 7　图 G_5

Fig. 7　Figure of G_5

由图 8 知,$h(1)=5$.

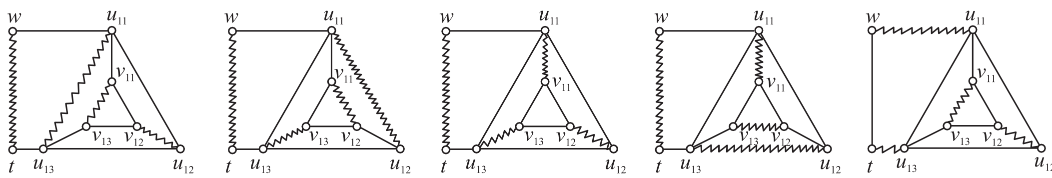

图 8　图 G_6

Fig. 8　Figure of G_6

由式(8),得 $\varphi(2)=17$.

故 $\varphi(n)=\dfrac{5+2\sqrt{5}}{10}(2+\sqrt{5})^n+\dfrac{5-2\sqrt{5}}{10}(2-\sqrt{5})^n$.

[参考文献]

[1] LOVÁSZ L,PLUMMER M D. Matching theory[M]. New York:North-Holland Press,1986.

[2] ZHANG H P,ZHANG F J. Perfect matchings of polyomino graphs[J]. Graphs and combinatorics,1997,13:259-304.

[3] LI S L,YAN W G. The matching energy of graphs with given parameters[J]. Discrete applied mathematics,2014,162:415-420.

[4] DONG F M,YAN W G,ZHANG F J. On the number of perfect matchings of line graphs[J]. Discrete applied mathematics,2013,161:794-801.

[5] YAN W G,ZHANG F J. A quadratic identity for the number of perfect matchings of plane graphs[J]. Theoretical computer science,2008,409:405-410.

[6] CHANG A,SHIU W C. On the kth eigenvalues of trees with perfect matchings[J]. Discrete mathematics and theoretical computer science,2007,9(1):321-332.

[7] 林泓,林晓霞. 若干四角系统完美匹配数的计算[J]. 福州大学学报(自然科学版),2005,33(6):704-710.

[8] 唐保祥,任韩. 3 类特殊图完美对集数的计算[J]. 南开大学学报(自然科学版),2014,47(5):11-16.

[9] 唐保祥,任韩. 4 类图完美匹配的计数[J]. 武汉大学学报(理学版),2012,58(5):441-446.

[10] 唐保祥,任韩. 两类图完美匹配的计数公式[J]. 吉林大学学报(理学版),2016,54(4):790-792.

[11] 唐保祥,任韩. 2 类图完美匹配数目的解析式[J]. 中山大学学报(自然科学版),2016,55(4):15-17.

[12] 唐保祥,任韩. 2 类特殊图中的完美匹配数[J]. 浙江大学学报(理学版),2017,44(3):266-269.

[13] 唐保祥,任韩. 4 类图完美匹配数目的递推求法[J]. 数学杂志,2015,353(2):626-634.

[14] 唐保祥,任韩. 3 类图完美匹配数目的计算公式[J]. 南京师大学报(自然科学版),2016,39(4):1-4.

[责任编辑:陆炳新]